

基于多参数规划的显式模型预测系统设计的可行域扩张算法

张 聚, 郝 平, 王万良

(浙江工业大学 自动化研究所, 浙江 杭州 310014)

摘要: 基于约束线性优化控制问题的多参数二次规划求解方法, 提出设计显式模型预测控制系统的可行域逐步扩张算法. 首先建立一种求取优化控制问题输出不变集的迭代算法. 以该输出不变集作为多参数规划问题中状态区域约束限制的初始条件, 通过反复求解多参数规划问题和不断改变状态区域约束限制, 能够逐步扩大显式模型预测控制系统的无限时间可行区域, 直到可行域不再继续扩大. 算法收敛时设计得到的显式模型预测控制系统在其所有的状态分区上都是无限时间可行的. 通过数值仿真计算, 验证本文提出算法的有效性.

关键词: 多参数二次规划; 显式模型预测控制系统; 可行域逐步扩张法

中图分类号: TP273.1 **文献标识码:** A

A multi-parametric-programming-based feasible region-expansion algorithm for synthesis of explicit model predictive control system

ZHANG Ju, HAO Ping, WANG Wan-liang

(Institute of Automation, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310014, China)

Abstract: Based on the multi-parametric quadratic programming(MPQP) for the linear constrained optimal control problem, a feasible and a feasible-region-expansion algorithm is proposed for synthesis of the explicit model predictive control(MPC) systems. Firstly, an iterative algorithm for computing the output invariant set of the optimal control problem is established; the computed invariant set is then used as the initial constraint for the state region in the MPQP problem. By iteratively solving the MPQP problem and replacing its constraint for the state region, the feasible region of the explicit MPC system is progressively expanded until its convergence. The state trajectory of the resulting explicit MPC systems starting from any state in its state partitions is always infinite time-feasible. Simulations also show that the proposed algorithm is effective.

Key words: multi-parametric quadratic programming(MPQP); synthesis of explicit model predictive control system; feasible region-expansion algorithm.

1 引言(Introduction)

模型预测控制技术是一种处理多变量约束系统最优控制问题的最有效方法之一. 基于反复在线优化模型预测控制系统的主要不足是: 1) 通常适用于被控对象问题规模不大或系统的动态变化较慢的场合; 2) 闭环预测控制系统在本质上是属于一类隐性的非线性系统. 针对这些不足, 近几年国际上对于优化控制问题显式求解和显式模型预测控制方面的研究非常活跃^[1~3], 特别是Bemporad等学者所做的开创性工作^[1]. 文献[1]把多参数规划理论引入约束线性优化控制问题的求解中, 得到了最优控制律与优化问题所含参数(状态)之间的显式函数关系, 并建

立与隐式模型预测控制系统等价的显式分段仿射模型.

现有文献中研究显式模型预测控制的主要侧重点是: 1) 如何把基于反复在线优化计算的隐式模型预测控制系统转化为显式模型预测控制系统, 以提高预测控制的在线计算速度和扩大预测控制系统的适用范围^[1~3]. 2) 求解多参数规划问题的不同状态分区方法和不同的求解效率, 以及减少显式模型预测系统的状态分区数目^[4~6]. 事实上, 无论是隐式还是显式模型预测控制系统, 他们之间是一种等价的转化, 也就是说系统的性能(稳定性, 可行性和收敛性等)不会改变. 而直接对于显式模型预测控制系统

进行性能分析和设计,在文献中还不太多.文献[7]基于PWA模型,分析了显式模型预测控制系统的稳定性和可行性.本文研究与文献[7]相反的一个问题,即如何设计显式模型预测控制系统,提出一种设计显式模型预测控制系统的可行域逐步扩张算法,使设计得到的显式模型预测控制系统在其所有的状态分区上都是无限时间可行的.

2 显式模型预测系统设计的可行域逐步扩张算法(Synthesis of explicit model predictive control system with feasible region expanding)

考虑有限时域二次优化控制问题(1):

$$\begin{cases} J^*(x(0)) = \\ \min_{U_N x(0)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} (\|Qx_k\|_2 + \|Ru_k\|_2) + \|Px_N\|_2 \right), \\ \text{s.t. } Ex_k + Lu_k \leq M, k = 0, \dots, N-1, \\ x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, x_0 = x(0), x_1 \in \chi_{\text{set}}. \end{cases} \quad (1)$$

$x_1 \in \chi_{\text{set}}$ 为问题(1)中引入 $k = 1$ 时刻状态 x_1 的状态区域约束限制, χ_{set} 为凸集.

首先给出优化问题输出不变集的定义并提出一种求输出不变集的迭代算法. χ_I 为优化问题(1)的输出不变集,定义为^[8]

$$\chi_I = \left\{ x(0) \in \mathbb{R}^n \mid Ex_k + Lu_k \leq M, u_k = Kx_k, \right. \\ \left. x_{k+1} = (A + BK)x_k, k \geq 0. \right\}.$$

K 为与优化问题(1)对应的无约束无限时间优化控制问题的状态反馈阵.由 χ_I 的定义知, χ_I 为无约束无限时间状态反馈控制律满足优化问题(1)中约束条件的所有初始状态的集合.根据输出不变集 χ_I 的定义,建立一种如下的求取 χ_I 的迭代算法.

求取 χ_I 的迭代算法

Step 1 由无约束无限时间二次最优控制问题求得 K ;满足 $(E + LK)x_0 \leq M$ 的 x_0 集合为 χ_{set} ;置 $k = 1$.

Step 2 同时满足 $(E + LK)(A + BK)^k x_0 \leq M$ 和 χ_{set} 的 x_0 集合为 χ_k .

Step 3 比较 χ_k 与 χ_{set} .若 $\chi_k \neq \chi_{\text{set}}$,则 $\chi_{\text{set}} \leftarrow \chi_k, k \leftarrow k + 1$,转Step 2继续.

若 $\chi_k = \chi_{\text{set}}$,迭代过程停止,算法收敛. χ_{set} 即为不变集 χ_I .

由Step 1求解得到的 χ_{set} 为一步($k = 0$)可行的状态区域,在该区域内并不能保证以后各步($k \geq 1$)也是满足优化问题的约束条件. Step 2和Step 3的迭代循环,就是不断地从一步可行区域 χ_{set} 中逐步剔除

掉在以后各步中不可行的状态区域,直至收敛.算法收敛时,得到的状态区域 $\chi_k = \chi_{\text{set}}$ 是一个不变集. χ_I 是包含原点的一个凸多面体.

考虑优化问题(1).显式模型预测控制系统设计的可行域逐步扩张算法的主要思想是,以输出不变集作为多参数规划问题中状态区域约束限制 $x_1 \in \chi_{\text{set}}$ 的初始条件,通过反复求解多参数规划问题和不断改变状态区域约束限制,能够逐步扩大显式模型预测控制系统的无限时间可行区域,直到可行域不再继续扩大.

(可行域逐步扩张算法)迭代算法的步骤如下:

初始化 令 $\chi_{\text{set}} \leftarrow \chi_I$. χ_I 为优化问题(1)的输出不变集.

Step 1 求解优化问题(1)对应的多参数二次规划问题,得到优化问题(1)为可行的所有 $x(0)$ 集合 χ 和状态可行域 χ 的分区 $CR^i (\chi = \bigcup_i CR^i)$, χ 是凸多面体集.

Step 2 替换优化问题(1)中 $k = 1$ 时刻系统状态 x_1 的约束区域,即令 $\chi_{\text{set}} \leftarrow \chi$,然后重新求解优化问题(1)对应的多参数二次规划问题.此时,求解多参数二次规划问题得到的所有可行 $x(0)$ 集合记为 χ_1 , χ_1 为多面体集.显然 $\chi_1 \supseteq \chi_{\text{set}}$.

Step 3

若 $\chi_1 \supset \chi_{\text{set}}$,则 $\chi \leftarrow \chi_1$ 后转至Step 2.

若 $\chi_1 = \chi_{\text{set}}$ 迭代算法停止,算法收敛.

第1遍循环(Step 1~ Step 3).

求解的多参数二次规划问题包含状态约束条件 $x_1 \in \chi_I$,对应求解得到的 $x(0)$ 集合为 χ .初始状态从 χ 出发的模型预测控制系统的状态能够在一步的时间内进入系统的输出不变集 χ_I ,此后模型预测控制系统的状态演化都处在输出不变集 χ_I 内,因此状态集合 χ 就是模型预测控制系统的一个无限时间可行区域(不变集),但不一定是模型预测控制系统的最大无限时间可行区域.

Step 2算法得到的闭环模型预测控制系统,从任意状态 $x_0 \in \chi_1$ 出发,在一步的时间内即进入第一步求解得到的模型预测控制系统的无限时间可行区域 χ (不变集),因此 χ_1 也是模型预测控制系统的无限时间可行域(不变集),且 $\chi_1 \supseteq \chi_{\text{set}} (\chi_{\text{set}} = \chi)$,即模型预测控制系统的无限时间可行区域在不断扩大,但此时 χ_1 不一定是模型预测控制系统的最大无限时间可行区域.

多遍循环执行(反复执行Step 2~ Step 3).

反复执行 Step 2到 Step 3,多参数二次规划问题得到的可行 $x(0)$ 集合 χ_1 在逐步扩大,算法收敛时 $\chi_1 = \chi_{\text{set}}$,得到的闭环模型预测控制系统具有

最大的不变集 χ_1 . 任意从 χ_1 中出发的初始状态, 闭环预测控制系统的状态演化在任意时刻都不会离开 χ_1 , 在任意时刻都是可行的.

算法收敛时得到的显式模型预测控制系统, 在整个状态分区上系统是无限时间可行的, 但并不能保证在无限时间可行域上闭环模型预测系统是稳定的和收敛的(例如可能存在极限环等情况). 借助文献[7]的分段二次Lyapunov方法, 可以分析设计得到的显式模型预测控制系统的稳定性.

3 数值仿真算例(Numerical example)

对本文提出的算法并借助多参数规划工具箱^[9]做数值仿真计算. 某2阶系统离散模型的状态空间实现为

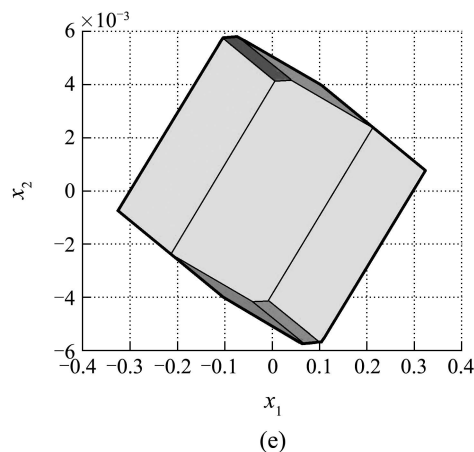
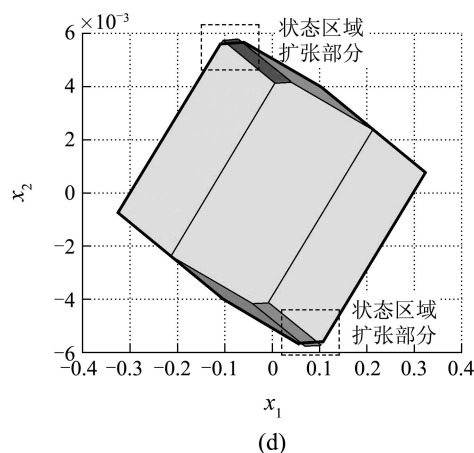
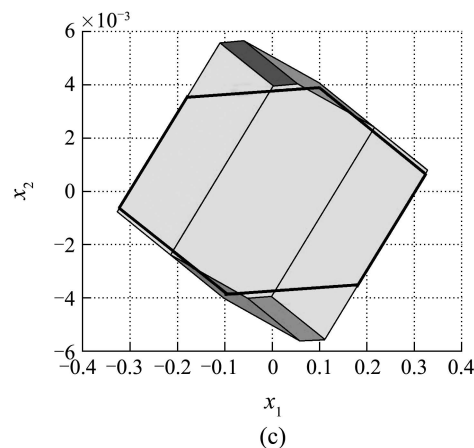
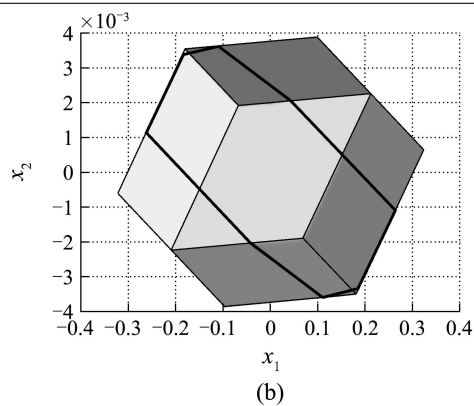
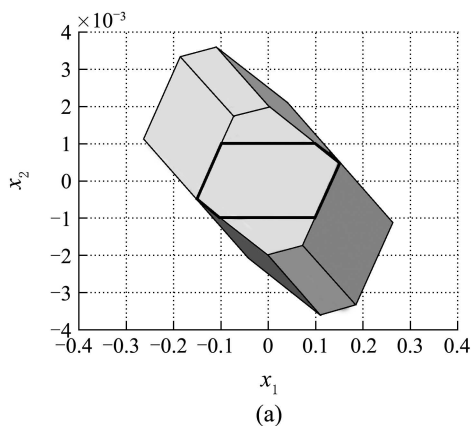
$$A = \begin{bmatrix} -0.4084 & -75.16 \\ 0.007516 & -0.2581 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0.007516 \\ 0.0001258 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10^4 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

系统的状态与输入的约束条件为

$$\begin{aligned} -1 &\leq x_1(k) \leq 1, k = 1, 2, \dots \\ -10^{-3} &\leq x_2(k) \leq 10^{-3}, k = 1, 2, \dots \\ -10 &\leq u(k) \leq 10, k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

对应于 $N = 1$ 时的优化问题(1), 显式模型预测控制系统设计的可行域逐步扩张算法的可行域扩张过程如图1所示. 图1(a)中间的黑色状态区域为优化问题输出不变集 χ_1 . 可行域逐步扩张算法在反复计算5次多参数二次规划问题后, 可行域不再扩大, 算法收敛, 见图1(e). 依据文献[7]的方法, 在设计得到的显式模型预测控制系统的状态分区上, 找到分段二次Lyapunov函数, 因而模型预测控制系统在其所有的状态分区上是稳定的且是无限时间可行的, 因而整个状态分区即为闭环系统的收敛域. 从状态分区上任意一点出发的闭环模型预测控制系统的状态演化过程, 最终收敛于闭环系统的平衡点, 如图1(f)所示.



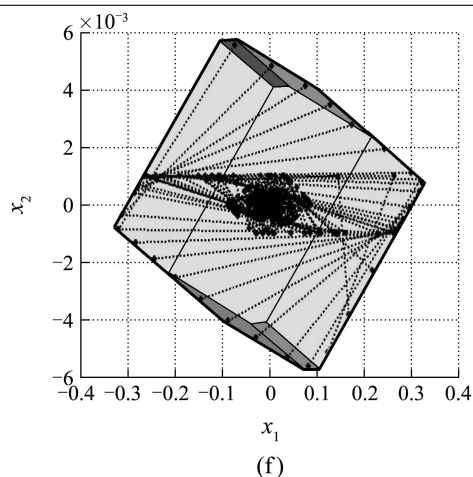


图1 可行域逐步扩张算法的收敛过程

Fig. 1 Progressively expanding process of the feasible region of explicit MPC systems

4 结语(Conclusion)

本文提出设计显式模型预测控制系统的可行域逐步扩张算法,使设计得到的显式模型预测控制系统在其所有的状态分区上都是无限时间可行的.下一步的工作是,基于显式模型预测控制系统的PWA模型,对模型预测控制系统性能分析和综合的理论与应用做进一步的研究.

参考文献(References):

- [1] BEMPORAD A, MORARI M, DUA V, et al. The explicit linear quadratic regulator for constrained systems[J]. *Automatica*, 2002, 38(1): 3 – 20.
- [2] WANG Z Y, KOTHARE M V. An efficient off-line formulation of robust model predictive control using linear matrix inequalities[J]. *Automatica*, 2003, 39(3): 837 – 2846.

- [3] MUNOZ D L, RAMIREZ D R, CAMACHO E F, et al. Explicit solution of min-max MPC with additive uncertainties and quadratic criterion[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(4): 266 – 274.
- [4] ROSSITER J A, GRIEDER P. Using interpolation to improve efficiency of multiparametric predictive control[J]. *Automatica*, 2005, 41(4): 637 – 643.
- [5] TONDEL P, JOHANSEN T A, BEMPORAD A. An algorithm for multiparametric quadratic programming and explicit MPC solutions[J]. *Automatica*, 2003, 39(3): 489 – 497.
- [6] SUARD R, LOFBERG J, GRIEDER P, et al. Efficient computation of controller partitions in multiParametric programming[C] // *Proceedings of the 43th IEEE Conference on Decision and Control, Atlantis, Paradise Island Bahamas*. Atlantis, USA: IEEE Press, 2004, 12: 14 – 17.
- [7] GRIEDER P, LUTHI M, PARILLO P, et al. Stability and feasibility of receding horizon control[C] // *Proceedings of 2003 European Control Conference*. Cambridge, United Kingdom: Springer, 2003, 9: 1 – 4.
- [8] KERRIGAN E C. *Robust constraints satisfaction: invariant sets and predictive control*[D]. United Kingdom, Cambridge: The University of Cambridge, 2000.
- [9] KVASNICA M, GRIEDER P, BAOTIC M, et al. MultiParametric Toolbox(MPT)[M] // *Hybrid Systems: Computation and Control, Lecture Notes in Computer Science*. Berlin: Springer Verlag, 2004, 2993: 448 – 462.

作者简介:

张 聚 (1973—), 男, 博士, 副教授, 目前研究方向为模型预测控制、机电系统振动控制, E-mail: zjk@zjut.edu.cn;

郝 平 (1963—), 男, 副教授, 目前的研究方向工业过程的优化于控制, E-mail: hp@zjut.edu.cn;

王万良 (1957—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能调度与控制, E-mail: ww1@zjut.edu.cn.