

DC-DC变换器分段线性系统的最小投影法切换律

肖文勋, 张 波, 陈良刚

(华南理工大学 电力学院, 广东 广州 510640)

摘要: 采用分段线性系统分析方法, DC-DC变换器的稳定性研究和控制器设计变得十分简单和有效. 本文首先基于分段线性系统的稳定性原理, 建立实现系统全局稳定的最小投影法切换律. 其次提出基于最小投影法的收敛率分析方法, 揭示了分段线性系统在整个状态邻域收敛率快慢的本质, 为改善最小投影法切换律的收敛率提供理论依据. 最后以Boost DC-DC变换器为例说明以上理论研究的正确性, 并以实验验证最小投影法切换律在DC-DC变换器实际应用中的可行性.

关键词: DC-DC变换器; 分段线性系统; 最小投影法; 切换律

中图分类号: TM46 **文献标识码:** A

Min-projection-strategy switching rules for DC-DC converters modeled as piecewise linear systems

XIAO Wen-xun, ZHANG Bo, CHEN Liang-gang

(Electrical Power College, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: Stability and control of DC-DC converters are handled easily and efficiently by utilizing piecewise linear system analysis approach. Applying the stability theorem of piecewise linear systems, we establish the min-projection-strategy switching rules for realizing the global stability of the system. The method for analyzing the convergence-rate based on the min-projection strategy is then proposed. This analysis reveals the nature of the convergence-rate of piecewise linear systems in the entire state-range, and supplies theoretical basis for improving the convergence-rate of the min-projection-strategy switching rules. Finally, the Boost DC-DC converter is selected as an example for verifying the above theory. Experimental results from this DC-DC converter demonstrate the feasibility of the min-projection-strategy switching rules.

Key words: DC-DC converters; piecewise linear systems; min-projection-strategy; switching rules

1 引言(Introduction)

分段线性系统由多个线性子系统与协调子系统之间切换的切换律构成. 由于分段线性系统模型能够完全精确地描述许多复杂的动态过程, 而且通过分段的线性分析, 较易进行稳定性分析与控制器设计, 因此在许多工程系统中得到了应用^[1~3].

从DC-DC变换器的工作特性来看, 它就是一类典型的分段线性系统^[4,5]. DC-DC变换器的各个子系统具有独立的平衡点, 而且这些平衡点都不相同, 期望系统到达的平衡点也不在这些子系统的平衡点集合里^[6]. 单个子系统工作不可能稳定于期望平衡点, 只能通过切换律控制子系统之间的切换, 使系统轨迹逼近期望平衡点, 并稳定运行于该平衡点邻域内.

为此, 本文基于分段线性系统的稳定性原理, 提出具有全局稳定性的最小投影法切换律, 并给出基于最小投影法的收敛率分析方法. 该最小投影法切换律的本质是分段线性系统在任意状态始终能够选择一个指向平衡点的速度矢量场, 使系统轨迹沿着该速度矢量场收敛至平衡点.

2 DC-DC变换器的最小投影法切换律(Switching rules based on min-projection strategy for DC-DC converters)

DC-DC变换器的分段线性系统模型描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = f_{\sigma}(x) = A_{\sigma}x + B_{\sigma}, \\ y = C_{\sigma}x, \\ \sigma \in \{1, 2, \dots, m\}. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统的连续状态变量, $y \in \mathbb{R}^q$ 为输出变量. A_σ, B_σ 和 C_σ 均为相应维数的系数矩阵. σ 为切换信号, 它标志系统的工作模式, 当 $\sigma = i$ 时, 表示第 i 个子系统 Σ_i 在工作, 在任何时刻有且只有一个子系统在工作.

定义 1 对于分段线性系统(1), 假设系统的平衡点为原点, 其子系统 Σ_σ 的速度矢量场 $f_\sigma(x)$ 在向量 x 上的投影定义为

$$\Gamma_\sigma(x) = x^T f_\sigma(x) / \|x\|, \quad x \neq 0. \quad (2)$$

当 $\Gamma_\sigma(x) < 0$ 时, 表明系统沿着速度矢量场 $f_\sigma(x)$ 的轨迹不断趋近平衡点, 而且投影值越小系统趋近平衡点的速度越快.

定义 2 分段线性系统在任意状态向量 x 处的固有最小投影值定义为

$$\Gamma_M(x) = \min_{\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}} \{\Gamma_\sigma(x)\}, \quad x \neq 0. \quad (3)$$

当只考虑速度矢量场 $f_\sigma(x)$ 在向量 x 上投影的方向性时, 将 $\Gamma_\sigma(x) \leq 0$ 表示为

$$Q_\sigma = x^T f_\sigma(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4)$$

该处理方法消除了 $x \neq 0$ 约束, 而且不影响各子系统的 $f_\sigma(x)$ 在向量 x 上投影的方向性和幅值比.

分段线性系统基于最小投影法的切换律定义为

$$\sigma = \arg \min_{\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}} \{x^T P f_\sigma(x)\}, \quad (5)$$

式中 P 为正定对称矩阵. 该切换律的含义是当 $Q_\sigma = x^T P f_\sigma(x)$ 最小时子系统 Σ_σ 工作. 由该切换律划分的子系统工作邻域为

$$\Omega_\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \min_{\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}} \{x^T P f_\sigma(x)\} < 0\}. \quad (6)$$

由式(5)的切换律控制的闭环分段线性系统的稳定性充分条件为

定理 1 如果对于整个状态领域 $x \in \mathbb{R}^n$, 存在邻域 $\Omega_\sigma \subseteq \mathbb{R}^n$, 且 $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \mathbb{R}^n$, 使得在每个领域 Ω_σ 内, 至少存在一个 $x^T P f_\sigma(x) < 0$, P 为正定对称矩阵, 那么由该切换律控制的闭环分段线性系统是全局渐近稳定的.

证 取 Lyapunov 函数 $V_\sigma(x) = x^T P x$, 其中 P 为正定对称矩阵, 那么 $\dot{V}_\sigma(x) = 2x^T P f_\sigma(x) = 2Q_\sigma$. 如果对于整个状态领域 $x \in \mathbb{R}^n$, 总存在一个向量场 $f_\sigma(x)$ 使得 $x^T P f_\sigma(x) < 0$, 那么 $\dot{V}(x) = 2 \min_{\sigma \in \{1, 2, \dots, m\}} \{x^T P f_\sigma(x)\} < 0$, 由 Lyapunov 稳定性的直接法可知, 该系统的原点是 Lyapunov 意义下全局渐近稳定的^[7~9].

根据定理1, 设计如式(5)的切换律, 选择正定对称矩阵 P 使得由切换律划分的子系统工作领域满

足 $\bigcup_{i=1}^n \Omega_i = \mathbb{R}^n$, 则该最小投影法切换律是实现系统全局稳定性的最小投影法切换律.

子系统工作邻域 Ω_i 和 Ω_j 的切换面(即交界面) S_{ij} 定义为

$$S_{ij} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q_{ij} = Q_i - Q_j = 0\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m, \quad i \neq j. \quad (7)$$

由于子系统速度矢量场 $f_\sigma(x)$ 在某状态向量 x 处的投影值 $\Gamma_\sigma(x)$ 反映了子系统在该状态处沿着速度矢量场 $f_\sigma(x)$ 的收敛率, 因此可以通过求解系统的最小投影值 $\Gamma_M(x)$ 来分析系统在整个状态领域内的固有收敛率. 系统轨迹在稳定切换律的控制下经过若干时间必能到达切换面, 并沿着切换面收敛至平衡点, 因此系统在切换面上的收敛率决定了系统在整个状态领域的收敛率. 系统在切换面上的收敛率可通过求解切换面上的最小投影值 $\Gamma_M(x)$ 来分析.

3 例子(Example)

本节以 Boost DC-DC 变换器为例, 验证分段线性系统的稳定性原理与收敛率分析法. Boost DC-DC 变换器的电路拓扑及工作原理参见文[5,10]. 具有两个子系统的 Boost DC-DC 变换器的分段线性系统模型如式(1), 以电感电流 i_L 与电容电压 u_C 为状态变量, 即 $x = [x_1 \ x_2]^T = [i_L \ u_C]^T$, 输出电压 u_O 为输出变量 y , 相应的系数矩阵为

$$A_\sigma = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sigma-1}{L} \\ \frac{\sigma-1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad B_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{U_{in}}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_\sigma = [0 \ 1],$$

其中: 当 $\sigma = 1$ 时, 子系统对应导通工作模式; 当 $\sigma = 2$ 时, 子系统对应关断工作模式.

系统参数: $U_c = 24 \text{ V}$, $R = 48 \ \Omega$, $L = 500 \ \mu\text{H}$, $C = 180 \ \mu\text{F}$. 控制目标是输出 $y(u_O) = 48 \text{ V}$, 即期望平衡点为 $x^* = [x_1^* \ x_2^*]^T = [2 \ 48]^T$.

根据式(5)设计最小投影法切换律:

$$\sigma = \arg \min_{\sigma \in \{1, 2\}} \{(x - x^*)^T P f_\sigma(x)\}. \quad (8)$$

分别取正定对称矩阵为 $P^{(1)} = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$, $P^{(2)} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix}$, 对应的两个切换律分别为 $\sigma^{(1)}$ 和 $\sigma^{(2)}$, 由此构造的切换面 $S^{(1)}$ 与 $S^{(2)}$ 的函数分别为

$$Q_{12}^{(1)} = 48x_1 - 2x_2,$$

$$Q_{12}^{(2)} = 81x_2^2 - 225x_1^2 - 160x_1x_2 + 12450x_1 - 4068x_2.$$

当 $Q_{12}^{(\cdot)} \leq 0$ 时 $\sigma = 1$, 子系统 Σ_1 工作; $Q_{12}^{(\cdot)} > 0$ 时 $\sigma = 2$, 子系统 Σ_2 工作.

分段线性系统的固有最小投影值为

$$\Gamma_M(x) = \min_{\sigma \in \{1,2\}} \{(x-x^*)^T f_\sigma(x) / \|x-x^*\|\}, \quad x \neq x^*. \quad (9)$$

切换律 $\sigma^{(1)}$ 和 $\sigma^{(2)}$ 在切换面 $S^{(1)}$ 与 $S^{(2)}$ 上的固有最小投影值轨迹如图1所示. 这两个切换律的 $\Gamma_M(x)$ 均小于零, 表明系统轨迹沿着切换面 $S^{(1)}$ 与 $S^{(2)}$ 运行时均收敛至平衡点. 而且 $\sigma^{(2)}$ 比 $\sigma^{(1)}$ 具有较小的投影值轨迹, 说明 $\sigma^{(2)}$ 比 $\sigma^{(1)}$ 具有较快的收敛率.

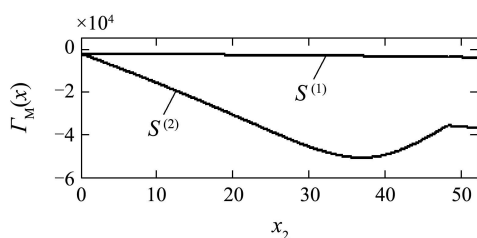
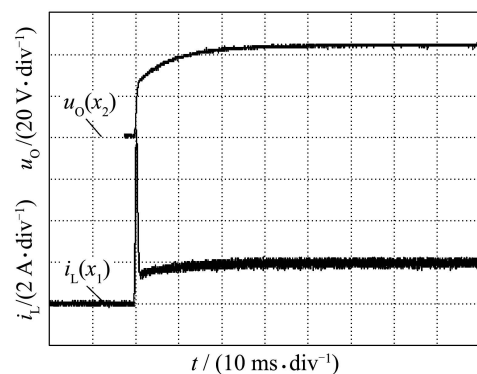
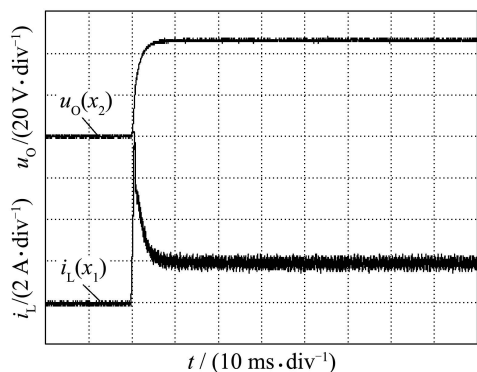


图1 切换面上的最小投影值轨迹

Fig. 1 Min-projection trajectory on the switching surfaces



(a) 切换律 $\sigma^{(1)}$



(b) 切换律 $\sigma^{(2)}$

图2 系统动态响应

Fig. 2 Dynamic responses of system

图2的实验波形显示 $\sigma^{(2)}$ 控制的系统比 $\sigma^{(1)}$ 的快收敛至平衡点(2,48), 验证了前面关于稳定性与收敛率的分析.

4 结论(Conclusion)

本文介绍了分段线性系统的最小投影法概念, 并提出了具有全局稳定性的最小投影法切换律, 以及基于最小投影法的收敛率分析方法. 以Boost DC-DC变换器为例, 理论和实验验证了分段线性系统的稳定性原理与收敛率分析方法的正确性, 并证明了分段线性系统模型及其最小投影法切换律在实际DC-DC变换器中的可行性与有效性.

参考文献(References):

- [1] SUN Z D, GE S Z S. *Switched Linear Systems: Control and Design*[M]. Germany: Springer, 2005: 3 – 18.
- [2] 程代展, 郭宇涛. 切换系统进展[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 954 – 960.
(CHENG Daizhan, GUO Yuqian. Advances on switched systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(6): 954 – 960.)
- [3] 丛岫, 费树岷, 费吉庆. 时滞切换系统动态反馈 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(1): 132 – 136.
(CONG Shen, FEI Shumin, FEI Jiqing. Dynamic feedback H_∞ control of switched systems with time-delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(1): 132 – 136.)
- [4] RUBENSSON M, LENNARTSON B. Global convergence analysis for piecewise linear systems applied to limit cycles in a DC/DC converter[C] // *Proceedings of American Control Conference*. Anchorage, AK: AACC Press, 2002, 2: 1272 – 1277.
- [5] XIAO W X, ZHANG B, QIU D Y. Control strategy based on discrete-time Lyapunov theory for DC-DC converters[C] // *Proceedings of American Control Conference*. Taipei, Taiwan: IEEE Press, 2007: 1501 – 1505.
- [6] BOLZERN P, SPINELLI W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point[C] // *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Industrial Electronics Society*. Boston, Massachusetts: AACC Press, 2004, 5: 3890 – 3895.
- [7] PETTERSSON S, LENNARTSON B. Controller design of hybrid systems[C] // *International Workshop, HART*. Grenoble, France: Springer, 1997: 240 – 254.
- [8] PETTERSSON S, LENNARTSON B. Stabilization of hybrid systems using a min-projection strategy[C] // *Proceedings of American Control Conference*. Arlington, VA: AACC Press, 2001, 1: 223 – 228.
- [9] 田玉平, 蒋珉, 李世华. 自动控制原理(第2版)[M]. 北京: 科学出版社, 2006: 190 – 197.
- [10] 张占松, 蔡宣三. 开关电源的原理与设计[M]. 北京: 电子工业出版社, 2002: 19 – 28.

作者简介:

肖文勋 (1979—), 男, 博士研究生, 研究方向为电力电子非线性控制理论, E-mail: epxwx@yahoo.com.cn;

张波 (1962—), 男, 博士生导师, 研究方向为电力电子与电气传动、电力电子非线性控制理论等, E-mail: epbzhang@scut.edu.cn;

陈良刚 (1982—), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力电子非线性控制理论, E-mail: 0101439aaa@163.com.