

一类具有零动态不确定非线性系统的 停息时间可调的有限时间镇定

常 霞, 刘允刚

(山东大学 控制科学与工程学院, 山东 济南 250061)

摘要: 研究了一类带有零动态不确定非线性系统有限时间镇定问题, 给出了具有更强实用性的停息时间可调的有限时间稳定控制设计方法. 基于有限时间稳定的Lyapunov理论和反推技术, 给出了停息时间可调有限时间稳定控制器的设计步骤. 所设计的状态反馈控制器使得闭环系统全局有限时间稳定, 且停息时间可调整, 特别是当系统初始值已知时, 停息时间可以任意调节. 仿真例子验证了本文的主要结论.

关键词: 不确定非线性系统; 零动态; 有限时间镇定; 可调停息时间; 反推方法

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

The finite-time stabilization for a class of zero-dynamics uncertain nonlinear systems with adjustable-settling-time

CHANG Xia, LIU Yun-gang

(School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan Shandong 250061, China)

Abstract: The finite-time stabilization is investigated for a class of zero-dynamics uncertain nonlinear systems, for which a practical adjustable settling-time controller is designed by using the Lyapunov theory of finite-time stability and the backstepping methodology. With the designed state-feedback controller, the closed-loop system is globally stable in a finite time with an adjustable settling-time. Especially, when the initial conditions are known, the settling-time can be arbitrarily adjusted. Simulation results are also given to illustrate correctness of the main results.

Key words: uncertain nonlinear systems; zero dynamics; finite-time stabilization; adjustable-settling-time; backstepping approach

1 引言(Introduction)

近10多年来, 有限时间稳定控制问题受到了较大的关注, 得到了充分发展, 形成了有限时间稳定的Lyapunov理论和各种设计有限时间稳定控制器的方法^[1~14].

众所周知, 经典最优控制理论研究了一些有限时间稳定的例子. 其中之一是双重积分器系统的Bang-Bang时间最优反馈控制^[15]. 这是一个非连续的时间最优控制, 并且使得闭环系统的解在有限时间内达到原点(即有限时间稳定), 因而较指数稳定具有更快的收敛速度. 有限时间稳定控制系统还具有更高的跟踪精度和更强的抗干扰性等特性^[1,2]. 为了克服非连续性可能导致的抖动现象, 文[3]给出了连续但时变的有限时间稳定控制器. 但是时变系统的稳定性分析比自治系统复杂、困难得多, 所以随后的研究集中在针对自治系统的时不变连续有限时间

稳定控制问题^[1,4~14]. 具体地, 文[1]确立了有限时间稳定的基础理论, 给出了分析和判定有限时间稳定的Lyapunov定理. 文[4]进一步放松文[1]的条件, 给出了局部有限时间稳定的充分条件. 文[5, 6]基于齐次性理论, 分别给出了双重积分器系统的状态反馈和动态输出反馈的有限时间稳定控制器的设计方法. 文[7~14]利用构造性控制设计方法解决了几类非线性系统的全局有限时间稳定控制设计问题, 特别是最近文[7]研究了输出反馈有限时间稳定控制设计, 文[8]研究了自适应有限时间稳定控制设计. 有必要指出的是, 在文[4~14]中所设计的有限时间稳定控制器, 其停息时间都不可调整. 能否设计控制器, 使得有限时间稳定的停息时间可以根据实际需要任意调整, 将更具有理论和实际意义, 这将是本文研究的目标.

本文研究了一类带有零动态不确定非线性系统

收稿日期: 2008-02-16; 收修改稿日期: 2008-08-23.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674036); 山东省科技发展计划资助项目(2004GG4204014); 教育部新世纪人才支持计划资助项目(NCET-07-0513); 山东省优秀中青年科学家科研奖励基金资助项目(2007BS01010); 教育部科学技术重点资助项目(108079).

的停息时间可调整的全局有限时间稳定控制问题. 首先, 本文所研究的非线性系统较文[9~12]中研究的系统更为一般: 1) 系统具有不可量测零动态; 2) 系统的控制系数具有不确定性. 其次, 对于有限时间稳定的停息时间可调整问题, 文[3]研究了具有任意停息时间的时变连续有限时间稳定, 但是由于其时变性导致性能分析过程十分复杂. 本文通过灵活运用有限时间稳定的Lyapunov理论和反推技术, 更简洁、明了地给出了时不变连续有限时间稳定控制器的迭代设计步骤, 得到了控制器的完整显式表达. 另外, 不同于现有文献[1,5~14], 本文得到的有限时间稳定控制的停息时间可调整, 特别是当系统初始值已知时, 有限时间稳定控制的停息时间可以任意调节, 所以本文所设计的控制器具有更强的实用性. 最后, 本文还通过仿真算例验证了所得到理论结果的正确性.

2 预备知识与问题描述(Preliminaries and problem formulation)

2.1 预备知识(Preliminaries)

本文采用如下一些符号: $\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间; 对任意向量或矩阵 A , A^T 表示 A 的转置, $\|A\|$ 表示向量 A 的欧氏范数或相应的导出范数(当 A 是矩阵时); 对任意 $x \in \mathbb{R}^n$, $x_{[i]} = [x_1, \dots, x_i]^T$, $i \leq n$.

考虑如下 n 维自治系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (1)$$

其中, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续函数, 且 $f(0) = 0$; 系统初始条件为 $x(0) = x_0$.

如下有限时间稳定的定义参见文献[1,5,10,12], 并且现今已经得到了广泛承认和应用.

定义 1 在包含原点 0 的域 D 内考虑系统(1). 如果存在原点的一个开邻域 U 和(停息时间)函数 $T: U \setminus \{0\} \rightarrow (0, \infty)$, 使得

1) 有限时间收敛. 对任意 $x_0 \in U \setminus \{0\}$, $x(t)$ 在 $[0, T(x_0))$ 有定义, 且 $x(t) \in U \setminus \{0\}$, $\forall t \in [0, T(x_0))$ 以及 $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$;

2) Lyapunov 稳定. 对任意包含原点的开集 $U_\varepsilon \subset U$, 存在另一开集 U_δ 使得 $0 \in U_\delta \subset U$, 且对任意 $x_0 \in U_\delta \setminus \{0\}$, $x(t) \in U_\varepsilon$, $\forall t \in [0, T(x_0))$.

则系统(1)的零解是有限时间稳定的. 进一步, 若 $D = U = \mathbb{R}^n$, 则系统(1)的零解是全局有限时间稳定的.

如下定理给出了判定系统(1)为全局有限时间稳定的充分条件. 该定理以及证明可在文献[1,5,6,10]中找到.

定理 1 若存在正定和径向无界的连续可导函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, 沿系统(1)的解满足 $\dot{V}(x) + c_0 V^{\alpha_0}(x) \leq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, 其中, $c_0 > 0$, $0 < \alpha_0 < 1$, 则系统(1)的零解是全局有限时间稳定的, 且停息时间 $T(x_0) \leq \frac{1}{c_0(1-\alpha_0)} V(x_0)^{1-\alpha_0}$.

下面引理给出3个在后文控制设计中频繁使用的不等式, 其证明参见文献[7,13,16].

引理 1 对任意 $x, y \in \mathbb{R}^+$, 有如下关系成立:

- 1) 若 $0 < p \leq 2$, 则 $x^p \leq 1 + x^2$;
- 2) 若 $0 < p \leq 1$, 则 $(x + y)^p \leq x^p + y^p$;
- 3) 对于满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 的正数 p 和 q , 若 $w > 0$,

则下式成立:

$$xy \leq \frac{w^p}{p} x^p + \frac{w^{-q}}{q} y^q.$$

2.2 系统模型与控制目标(System model and control objective)

考虑如下—类带有零动态不确定非线性系统的全局有限时间稳定控制设计问题:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = f_0(\xi, x_1), \\ \dot{x}_1 = d_1(t, x_1)x_2 + f_1(\xi, x_1), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = d_{n-1}(t, x_{[n-1]})x_n + f_{n-1}(\xi, x_{[n-1]}), \\ \dot{x}_n = d_n(t, x)u + f_n(\xi, x), \end{cases} \quad (2)$$

其中, $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 和 $\xi \in \mathbb{R}^l$ 分别是系统的可量测和不可量测状态, 其初值分别为 $x(0) = x_0$ 和 $\xi(0) = \xi_0$; $u \in \mathbb{R}$ 为系统控制输入; $d_i: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = 1, \dots, n$ 是符号已知的不确定的连续函数, 称之为控制系数; $f_0: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $f_i: \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ 是不确定的连续函数, 特别地, $f_0(0, 0) = 0$.

微分方程(2)是至今已经得到广泛研究的几类非线性控制系统的一般表达式. 当 $f_0(\cdot) \equiv 0$ 时, 即著名的具有下三角结构的严格反馈非线性系统, 该系统在过去10多年间得到了全面研究[10,12,16]. 最近, 文[8,12,13]研究了系统(2)的有限时间稳定控制设计问题, 其中文[13]考虑了不确定性控制系数具有已知常数上下界的情况, 文[8]研究了控制系数为1、但是系统的非线性的上界具有未知参数的情况, 给出了设计自适应有限时间稳定控制器的新方法. 但是上述文献所设计的有限时间稳定控制的停息时间不可调整, 因此, 设计具有更强实用性的停息时间可调整的有限时间稳定控制器具有重要的理论和实际意义.

本文的主要结果建立在如下假设条件之上:

假设 1 存在一次连续可导的、正定的、径向无界的Lyapunov函数 $U_0(\xi)$, 使得

$$\begin{cases} \underline{\kappa}(\|\xi\|) \leq U_0(\xi) \leq \bar{\kappa}(\|\xi\|), \\ \frac{\partial U_0}{\partial \xi} f_0(\xi, x_1) \leq -U_0^\alpha(\xi) + \beta(x_1), \end{cases}$$

其中, $\underline{\kappa}(\cdot)$, $\bar{\kappa}(\cdot)$ 是 $\mathcal{K}_\infty$ 类函数, $0 < \alpha < 1$, $\beta(\cdot)$ 是二次连续可导的非负函数并且 $\beta(0) = 0$.

假设 2 对于 $i = 1, \dots, n$, 存在正数 a_i , b_i 和连续函数 $\lambda_i(x_{[i]}) > 0$, $\mu_i(x_{[i]}) > 0$, 使得

$$0 < a_i \lambda_i(x_{[i]}) \leq |d_i(t, x_{[i]})| \leq b_i \mu_i(x_{[i]}).$$

假设 3 对于 $i = 1, \dots, n$, 存在

$$|f_i(\xi, x_{[i]})| \leq \phi(U_0(\xi)) + (|x_1| + \dots + |x_i|)\gamma_i(x_{[i]}), \quad (3)$$

其中, γ_i 为连续、非负函数, ϕ 为 $\mathcal{K}$ 类函数, 并存在正整数 $m \geq n$ 满足 $\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}} \geq \alpha$, 以及连续的 $\bar{\phi}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, 使得

$$\phi(\theta) \leq \bar{\phi}(\theta)\theta^{\frac{4^{m+1}-1}{2 \cdot 4^{m+1}}}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^+. \quad (4)$$

假设1是很标准的, 和文献[13,14,17]中的有关假设相似. 该假设表明系统(2)的不可测量零动态是输入(x_1)到状态(ξ)稳定的. 特别是当 $x_1 = 0$ 时, 由定理1知 ξ 子系统是有限时间稳定的. 假设2较文[13,16, 17]中的有关假设弱, 因而本文所研究的系统(2)更加一般. 由该假设和连续性, 可知不确定控制系数函数恒为正或者恒为负, 且不为零, 从而系统(2)除了零动态之外是可控的. 表明上看, 假设3和文[14,17]中的有关假设相似, 但是与之有较大的不同, 因为要实现有限时间稳定控制和停息时间可调整, 式(3)中的函数 $\phi(\cdot)$ 满足更强的限制, 即(4). 此外, 由于 $\phi(\cdot)$ 是 $\mathcal{K}$ 类函数, 所以 $\phi(0) = 0$, 进而由(3)可知, 当 $\xi = 0, x = 0$ 时, $f_i(0, 0) = 0, i = 1, \dots, n$. 由此及 $f_0(0, 0) = 0$ 可知系统(2)的平衡点为原点 $(\xi^T, x^T)^T = 0$.

本文目标是设计连续的状态反馈控制器 $u(x)$ 使得系统(2)的状态(ξ, x)全局有限时间收敛到平衡点(即原点), 并且停息时间 T 可以适当调整, 特别是在系统初始值已知的情况下, 停息时间 T 可任意调整. 该目标将在下节中通过构造性控制设计方法实现.

3 有限时间稳定控制器设计(Design of finite-time stabilizing controller)

本节基于有限时间稳定的Lyapunov理论和反推技术, 给出系统(2)的停息时间可调有限时间稳定控

制器的设计步骤, 并证明所设计的状态反馈控制器使得闭环系统全局有限时间稳定, 且停息时间可调整, 特别是当系统初始值已知时, 停息时间可以任意调节.

3.1 初始设置(Initial setting)

首先对于系统(2)的不可量测的零动态 ξ , 定义如下函数:

$$V_0(\xi) = \int_0^{cU_0(\xi)} \eta(s)ds, \quad (5)$$

其中, $U_0(\cdot)$ 是由假设1给出的函数; c 为正的待定设计参数; $\eta(\cdot)$ 是连续、非减的待定函数且满足 $\eta(0) = 0$; $\eta(s) > 0, \forall s > 0$; $\int_0^\infty \eta(s)ds = \infty$. 不难证明 $V_0(\xi)$ 是一次连续可导的、正定的、径向无界的, 故可以作为控制设计和稳定性分析的Lyapunov函数.

由(5)和假设1, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(\xi) &= \frac{\partial V_0}{\partial \xi} f_0(\xi, x_1) \leq \\ &c\eta(cU_0(\xi))\beta(x_1) - c\eta(cU_0(\xi))U_0^\alpha(\xi). \end{aligned}$$

那么, 若 $U_0^\alpha(\xi) \leq 2\beta(x_1)$, 即 $U_0(\xi) \leq (2\beta(x_1))^{1/\alpha}$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial \xi} f_0(\xi, x_1) &\leq \\ &c\eta(c(2\beta(x_1))^{1/\alpha})\beta(x_1) - 0.5c\eta(cU_0(\xi))U_0^\alpha(\xi). \end{aligned}$$

另一方面, 若 $U_0^\alpha(\xi) \geq 2\beta(x_1)$, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial \xi} f_0(\xi, x_1) &\leq \\ &c\eta(cU_0(\xi))\beta(x_1) - c\eta(cU_0(\xi))U_0^\alpha(\xi) \leq \\ &c\eta(c(2\beta(x_1))^{1/\alpha})\beta(x_1) - 0.5c\eta(cU_0(\xi))U_0^\alpha(\xi). \end{aligned}$$

选取连续、正定函数 $\hat{\beta}(x_1) = c\eta(c(2\beta(x_1) + 1)^{1/\alpha})\beta(x_1)$. 显然, 由假设2易知 $\hat{\beta}(0) = 0, \hat{\beta}(x_1) = x_1^2 \tilde{\beta}(x_1)$, 其中 $\tilde{\beta}$ 是连续、正定的. 如此, 函数 $V_0(\xi)$ 满足

$$\frac{\partial V_0}{\partial \xi} f_0(\xi, x_1) \leq \hat{\beta}(x_1) - 0.5c\eta(cU_0(\xi))U_0^\alpha(\xi). \quad (6)$$

3.2 控制器反推设计(Backstepping design of controller)

受到文献[10,12~16]的启发, 本小节利用反推方法设计系统(2)的停息时间可调整的有限时间稳定控制器. 为叙述方便起见, 在迭代设计停息时间可调的有限时间稳定控制器 $u = u(x)$ 前, 先引入如下形式的 n 个Lyapunov候选函数 $V_k, k = 1, \dots, n$:

$$\begin{cases} W_k(x_{[k]}) = \int_{\hat{x}_k}^{x_k} (s^{1/\alpha_k} - \hat{x}_k^{1/\alpha_k})ds, \\ V_k(\xi, x_{[k]}) = V_{k-1}(\xi, x_{[k-1]}) + W_k(x_{[k]}), \end{cases} \quad (7)$$

其中, $x_{[0]} = 0$; $\alpha_k = \frac{4^{m-k+2} - 1}{4^{m-k+2} + 1}$, $k = 1, \dots, n$, m 为不小于 n 的整数;

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = 0, \\ z_k = x_k^{1/\alpha_k} - \hat{x}_k^{1/\alpha_k}, k = 1, \dots, n, \\ \hat{x}_k = -z_{k-1}^{2\alpha_{k-1}-1} \omega_{k-1}(x_{[k-1]}), k = 2, 3, \dots, n, \end{cases} \quad (8)$$

$\omega_{k-1}(\cdot)$ 是下文中待确定的连续的、非负的函数。

容易证明上面定义的 W_k , $k = 1, \dots, n$ 具有以下性质^[13,14,16]:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_k}{\partial x_k} = x_k^{\frac{1}{\alpha_k}} - \hat{x}_k^{\frac{1}{\alpha_k}} = z_k, \\ \frac{\partial W_k}{\partial x_i} = (x_k - \hat{x}_k) \frac{\partial(-\hat{x}_k^{\frac{1}{\alpha_k}})}{\partial x_i}, i = 1, \dots, k-1. \end{cases} \quad (9)$$

下面就可以进行有限时间稳定控制器的迭代设计(共有 n 步)。

第1步 取由(7)定义的 V_1 作为本步的Lyapunov候选函数。不失一般性, 假设 $d_i(t, x_{[i]})(1 \leq i \leq k)$ 恒为正。显然

$$V_1(\xi, x_1) = V_0(\xi) + \left(\frac{\alpha_1}{1 + \alpha_1}\right) z_1^{1+\alpha_1} \leq V_0(\xi) + 2z_1^{1+\alpha_1}.$$

如此, 由(6), 假设2、3, 引理1和不等式: $ab \leq \frac{a^2}{4} + b^2$, $\forall(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \dot{V}_0(\xi) + x_1^{1/\alpha_1} \dot{x}_1 \leq \\ &z_1^{2\alpha_1} \tilde{\beta}(x_1) - 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + z_1 d_1(x_2 - \hat{x}_2) + \\ &z_1 d_1 \hat{x}_2 + z_1 \phi(U_0) + z_1 |x_1| \gamma_1(x_1) \leq \\ &z_1^{2\alpha_1} \tilde{\beta}(x_1) - 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + z_1 d_1(x_2 - \hat{x}_2) + \\ &z_1 d_1 \hat{x}_2 + z_1^2/4 + \phi^2(U_0) + z_1^{1+\alpha_1} \gamma_1(x_1) \leq \\ &z_1^{2\alpha_1} ((1 + z_1^2) \gamma_1(x_1) + (1 + z_1^2)/4 + \tilde{\beta}(x_1)) + \\ &\phi^2(U_0) - 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + d_1 z_1 \hat{x}_2 + \\ &b_1 \mu_1(x_1) |z_1(x_2 - \hat{x}_2)|. \end{aligned} \quad (10)$$

这样, 选择如下虚拟控制:

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= -\frac{z_1^{2\alpha_1-1}}{a_1 \lambda_1(x_1)} (n-1 + c_1 + c_1 z_1^2 + \tilde{\beta}(x_1) + \\ &(1 + z_1^2) \gamma_1(x_1) + (1 + z_1^2)/4) =: \\ &-z_1^{2\alpha_1-1} \omega_1(x_1), \end{aligned} \quad (11)$$

其中, $c_1 > 0$ 是待定设计参数(下一小节中将证明 c_1 和 c 的适当选取可以调整停息时间 T), $\omega_1(\cdot)$ 是连续的非负函数。

将(11)代入(10), 从而有

$$\dot{V}_1 \leq -(n-1 + c_1) z_1^{2\alpha_1} - c_1 z_1^{2+2\alpha_1} + \phi^2(U_0) + b_1 \mu_1(x_1) |z_1(x_2 - \hat{x}_2)| - 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha.$$

至此, 步骤1设计完毕。

第 $k(k = 2, 3, \dots, n)$ 步 假设前 $k-1$ 步已经设计完毕, 且第 $k-1$ 步的Lyapunov候选函数 $V_{k-1}(\xi, x_{[k-1]})$ 是一次连续可导的、正定的、径向无界的, 且满足

$$\begin{cases} V_{k-1} \leq V_0(\xi) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{1+\alpha_i}, \\ \dot{V}_{k-1} \leq -(n-k+1 + c_1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2\alpha_i} - \\ c_1 \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2+2\alpha_i} + b_{k-1} \mu_{k-1}(x_{[k-1]}) \cdot \\ |z_{k-1}(x_k - \hat{x}_k)| - 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + \\ (k-1)\phi^2(U_0). \end{cases} \quad (12)$$

下面将证明在第 k 步中有类似(12)的关系成立。

选择由(7)定义的 V_k 为本步的Lyapunov候选函数, 进而由(12)及 $W_k(x_{[k]})$ 的性质易证明 V_k 是一次连续可导的、正定的、径向无界的, 并且满足

$$\begin{cases} V_k \leq V_0(\xi) + 2 \sum_{i=1}^k z_i^{1+\alpha_i}, \\ \dot{V}_k \leq -(n-k+1 + c_1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2\alpha_i} - c_1 \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2+2\alpha_i} - \\ 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + (k-1)\phi^2(U_0) + \\ b_{k-1} \mu_{k-1}(x_{[k-1]}) |z_{k-1}(x_k - \hat{x}_k)| + \\ z_k \dot{x}_k + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \dot{x}_i. \end{cases} \quad (13)$$

如下逐次分析不等式(13)右边的最后3项。

1) 首先由引理1和(8)易得: $|x_k - \hat{x}_k| \leq 2|z_k^{\alpha_k}|$, 进而由不等式 $2ab \leq a^2/4 + 4b^2$, $\forall(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, 可得

$$\begin{aligned} b_{k-1} \mu_{k-1}(x_{[k-1]}) |z_{k-1}(x_k - \hat{x}_k)| &\leq \\ 2b_{k-1} \mu_{k-1}(x_{[k-1]}) |z_{k-1}|^{\alpha_{k-1}} |z_{k-1}|^{1-\alpha_{k-1}} |z_k|^{\alpha_k} &\leq \\ z_{k-1}^{2\alpha_{k-1}}/4 + 4b_{k-1}^2 \mu_{k-1}^2(x_{[k-1]}) z_k^{2\alpha_k} z_{k-1}^{2-2\alpha_{k-1}} &\leq \\ z_{k-1}^{2\alpha_{k-1}}/4 + 4b_{k-1}^2 \mu_{k-1}^2(x_{[k-1]}) z_k^{2\alpha_k} (1 + z_{k-1}^2). \end{aligned} \quad (14)$$

2) 为了分析(13)第2不等式右边最后两项, 引入以下两个命题, 其证明参见文[12,13,16]。

命题1 对任意 $k = 2, 3, \dots, n$, 存在连续的非负函数 $\bar{\gamma}_k: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$, 使得 $f_k(\cdot)$ 满足如下不等式:

$$|f_k(\xi, x_{[k]})| \leq \phi(U_0(\xi)) + \bar{\gamma}_k(x_{[k]}) \sum_{i=1}^k |z_i|^{2\alpha_i-1},$$

$$\forall(\xi, x_{[k]}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k.$$

命题2 对任意 $k = 2, 3, \dots, n$, 存在连续的非负函数 $Q_k : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^+$ 和 $P_{k,i} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+, i = 1, \dots, k-1$, 使得对 $\forall(\xi, x_{[k]}) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^k$,

$$\left| \frac{\partial(-\hat{x}_k^{1/\alpha_k})}{\partial x_i} \dot{x}_i \right| \leq$$

$$Q_k(x_{[k-1]})\phi(U_0) + P_{k,i}(x_{[k]}) \sum_{j=1}^k |z_j|^{\alpha_j}.$$

其中 $\phi(\cdot)$ 见假设3.

由命题1及引理2可知, 对任意 $k = 2, 3, \dots, n$, 有

$$|z_k f_k(\xi, x_{[k]})| \leq$$

$$\begin{aligned} & |z_k| \left(\phi(U_0) + \bar{\gamma}_k(x_{[k]}) \sum_{i=1}^k |z_i|^{2\alpha_i-1} \right) \leq \\ & \phi^2(U_0)/2 + z_k^2/2 + z_1^{2\alpha_1}/4 + \tau_1 z_k^{2\alpha_1} \bar{\gamma}_k^{2\alpha_1} + \\ & \dots + z_{k-1}^{2\alpha_{k-1}}/4 + \tau_{k-1} z_k^{2\alpha_{k-1}} \bar{\gamma}_k^{2\alpha_{k-1}} + z_k^{2\alpha_k} \bar{\gamma}_k = \\ & \phi^2(U_0)/2 + \left(\sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2\alpha_i} \right)/4 + z_k^{2\alpha_k} \zeta_k(x_{[k]}), \end{aligned}$$

其中, $\tau_i = 2^{2\alpha_i-2}(2\alpha_i-1)^{2\alpha_i-1} \alpha_i^{-2\alpha_i}, i = 1, \dots, k-1$ 是正常数, 而 $\zeta_k(x_{[k]}) = z_k^{2-2\alpha_k}/2 + \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i z_k^{2(\alpha_i-\alpha_k)} \bar{\gamma}_k^{2\alpha_i} + \bar{\gamma}_k$ 是连续函数. 利用上式, 可得

$$\begin{aligned} & z_k \dot{x}_k \leq z_k d_k x_{k+1} + |z_k f_k(\xi, x_{[k]})| \leq \\ & z_k d_k (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}) + z_k d_k \hat{x}_{k+1} + \phi^2(U_0)/2 + \\ & (1/4) \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2\alpha_i} + z_k^{2\alpha_k} \zeta_k(x_{[k]}). \end{aligned} \quad (15)$$

3) 令 $P_k(x_{[k]}) = \sum_{i=1}^{k-1} P_{k,i}(x_{[k]}) > 0$, 则由(9)和命题2可知

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} x_i \right| \leq \sum_{i=1}^{k-1} |x_k - \hat{x}_k| \cdot \left| \frac{\partial(-\hat{x}_k^{1/\alpha_k})}{\partial x_i} \dot{x}_i \right| \leq \\ & 2|z_k|^{\alpha_k} (P_k \sum_{i=1}^k |z_i|^{\alpha_i} + (k-1)Q_k \phi(U_0)) \leq \\ & z_1^{2\alpha_1}/4 + 4z_k^{2\alpha_k} P_k^2 + \dots + z_{k-1}^{2\alpha_{k-1}}/4 + 4z_k^{2\alpha_k} P_k^2 + \\ & 2z_k^{2\alpha_k} P_k + 2(k-1)|z_k|^{\alpha_k} Q_k \phi(U_0) \leq \\ & (1/4) \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2\alpha_i} + z_k^{2\alpha_k} \bar{\zeta}_k(x_{[k]}) + \phi^2(U_0)/2, \end{aligned} \quad (16)$$

其中, $\bar{\zeta}_k(x_{[k]}) = 4(k-1)P_k^2(x_{[k]}) + 2P_k(x_{[k]}) + 2(k-1)^2 Q_k^2(x_{[k-1]}) \geq 0$ 是连续函数.

将以上结果(14)、(15)、(16)代入(13)并经适当整理, 最终得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -(n-k+c_1) \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2\alpha_i} - c_1 \sum_{i=1}^{k-1} z_i^{2+2\alpha_i} + \\ & z_k^{2\alpha_k} (4b_{k-1}^2 \mu_{k-1}^2 + 4b_{k-1}^2 \mu_{k-1}^2 z_{k-1}^2 + \\ & \zeta_k(x_{[k]}) + \bar{\zeta}_k(x_{[k]})) - 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + \end{aligned}$$

$$k\phi^2(U_0(\xi)) + z_k d_k (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}) + z_k d_k \hat{x}_{k+1}. \quad (17)$$

选择虚拟控制

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} = & -\frac{z_k^{2\alpha_k-1}}{a_k \lambda_k(x_{[k]})} (n-k+c_1+c_1 z_k^2 + \zeta_k + \\ & \bar{\zeta}_k + 4b_{k-1}^2 \mu_{k-1}^2 (1+z_{k-1}^2)) =: \\ & -z_k^{2\alpha_k-1} \omega_k(x_{[k]}). \end{aligned} \quad (18)$$

将(18)代入(17)中可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -(n-k+c_1) \sum_{i=1}^k z_i^{2\alpha_i} - c_1 \sum_{i=1}^k z_i^{2+2\alpha_i} + \\ & b_k \mu_k(x_{[k]}) |z_k (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1})| - \\ & 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + k\phi^2(U_0). \end{aligned} \quad (19)$$

至此, 第 k 步设计完毕.

第 n 步 显然, 第 k 步的结论当 $k = n$ 时仍然成立. 因此根据第 k 步的设计过程, 易构造连续的函数 $x \mapsto \omega_n(x)$, 进而给出实际控制:

$$u = \hat{x}_{n+1} = -z_n^{2\alpha_n-1} \omega_n(x). \quad (20)$$

此外, 参照(13)和(19), 可知

$$\begin{cases} V_n \leq V_0(\xi) + 2 \sum_{i=1}^n z_i^{1+\alpha_i}, \\ \dot{V}_n \leq -c_1 \sum_{i=1}^n (z_i^{2\alpha_i} + z_i^{2+2\alpha_i}) - \\ \quad 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + n\phi^2(U_0). \end{cases} \quad (21)$$

3.3 主要结果(Main results)

本小节将选择待定的常数 c, c_1 和函数 $\eta(\theta) = \eta'(\theta)\theta^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}} - \alpha, \forall \theta \in \mathbb{R}^+$ (即选择 $\eta'(\cdot)$), 最终完成上小节的控制器设计, 并证明上小节构造的Lyapunov函数 V_n 满足全局有限时间稳定的条件(即定理1), 即闭环系统是全局有限时间稳定的; 此外, 待定参数 c, c_1 的恰当选取可实现停息时间的适当调整, 从而得到本文的主要结果(即下面的定理2).

显然, 由关系式(21), 易知

$$\begin{cases} W =: V_n - V_0 \leq 2 \sum_{i=1}^n z_i^{1+\alpha_i}, \\ \dot{V}_0 + \dot{W} \leq -c_1 \sum_{i=1}^n (z_i^{2\alpha_i} + z_i^{2+2\alpha_i}) - \\ \quad 0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + n\phi^2(U_0). \end{cases} \quad (22)$$

进而由假设3可知(22)第2不等式最后两项满足

$$\begin{aligned} & -0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + n\phi^2(U_0) \leq \\ & -0.5c\eta(cU_0)U_0^\alpha + n\bar{\phi}^2(U_0)U_0^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}} = \\ & -0.5c\eta'(cU_0)(cU_0)^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}-\alpha}U_0^\alpha + \\ & n\bar{\phi}^2(U_0)U_0^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}}. \end{aligned}$$

选取连续的、非降的 $\eta': \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ 使得

$$\eta'(\theta) \geq \max \left\{ \theta^{(4^{m+1}-1)(\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}-\alpha)}, \bar{\phi}^2(\theta) \right\} \geq \eta'_0 > 0, \forall \theta \in \mathbb{R}^+, \quad (23)$$

其中 η'_0 是常数.

注1 需指出的是, 使得(23)成立的连续、非降函数 $\eta'(\cdot)$ 总是存在的. 可以证明 $\eta'(\theta) \triangleq \eta'_0 + \bar{\phi}'(\theta) + \theta^{(4^{m+1}-1)(\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}-\alpha)}$, $\theta \in \mathbb{R}^+$ 就是一个合理的选择, 其中, $\bar{\phi}'(\theta) \triangleq \sup_{s \in [0, \theta]} \bar{\phi}^2(s)$, $\theta \geq 0$. 实际上, 由于 $\bar{\phi}'(\theta) \geq \bar{\phi}^2(\theta)$, $\forall \theta \geq 0$, 故如上定义的 $\eta'(\cdot)$ 满足(23). 由 $\bar{\phi}'(\cdot)$ 的定义, 其非降性是显而易见的, 下面证明它的连续性. 这只需验证对任意给定的 $\theta_1 > 0$, 当 $\theta_2 > \theta_1$ 且 $\theta_2 \rightarrow \theta_1$ 时, 有 $\bar{\phi}'(\theta_2) \rightarrow \bar{\phi}'(\theta_1)$.

1) 若在 $\bar{\theta}_1 \in [0, \theta_1]$ 处, 函数 $\bar{\phi}^2(\cdot)$ 在区间 $[0, \theta_1]$ 上取得极大值且 $\bar{\phi}^2(\theta_1) < \bar{\phi}^2(\bar{\theta}_1)$, 则由 $\bar{\phi}^2(\cdot)$ 的连续性(由假设3确保)知存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\bar{\phi}^2(\theta_1 + \delta) \leq \bar{\phi}^2(\bar{\theta}_1)$, $\forall \delta \in (0, \varepsilon]$, 进而令 $\theta_2 = \theta_1 + \delta$, $\delta \in (0, \varepsilon]$, 则 $\sup_{s \in [0, \theta_2]} \bar{\phi}^2(s) = \sup_{s \in [0, \theta_1]} \bar{\phi}^2(s)$, 从而对这种情况, 当 $\theta_2 \rightarrow \theta_1$ 时, $\bar{\phi}'(\theta_2) = \bar{\phi}'(\theta_1)$;

2) 若 $\bar{\phi}^2(\theta_1) = \sup_{s \in [0, \theta_1]} \bar{\phi}^2(s)$, 则

$$\sup_{s \in [0, \theta_2]} \bar{\phi}^2(s) = \sup_{s \in [\theta_1, \theta_2]} \bar{\phi}^2(s),$$

故当 $\theta_2 \rightarrow \theta_1$ 时,

$$\sup_{s \in [0, \theta_2]} \bar{\phi}^2(s) \rightarrow \bar{\phi}^2(\theta_1) = \sup_{s \in [0, \theta_1]} \bar{\phi}^2(s),$$

即 $\bar{\phi}'(\theta_2) \rightarrow \bar{\phi}'(\theta_1)$.

对于如上选定的函数 $\eta'(\cdot)$, 有

$$\begin{aligned} \eta'(cU_0) &\geq \\ &(\eta'(cU_0) \cdot (cU_0)^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}-\alpha})^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} = \\ &(\eta(cU_0))^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}}. \end{aligned}$$

进一步, 由于 $\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1} < 1$, $2\alpha_k < \frac{2\alpha_1(1+\alpha_k)}{1+\alpha_1} < 2 + 2\alpha_k$ 和引理1, 所以

$$W^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} \leq 2 \left(\sum_{i=1}^n z_i^{1+\alpha_i} \right)^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} \leq 2 \sum_{i=1}^n (z_i^{2\alpha_i} + z_i^{2+2\alpha_i}).$$

由此以及(22), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 + \dot{W} + (c_1/4)W^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} &\leq \\ -0.5c_1 \sum_{i=1}^n (z_i^{2\alpha_i} + z_i^{2+2\alpha_i}) - (c^{1-\alpha}/2)\eta'(cU_0) \cdot \\ &(cU_0)^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}-\alpha} \cdot (cU_0)^\alpha + n\bar{\phi}^2(U_0)U_0^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}}. \end{aligned}$$

如此, 选择设计参数 $c > 0$ 使得 $c^{1-\alpha} > 4n$, 进而由(23)和 $c_1 > 0$, 得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_0 + \dot{W} + (c_1/4)W^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} &\leq \\ -(c^{1-\alpha}/4)\eta'(cU_0) \cdot (cU_0)^{\frac{4^{m+1}-1}{4^{m+1}}-\alpha} \cdot (cU_0)^\alpha &\leq \\ -(c^{1-\alpha}/4)(\eta(cU_0))^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} (cU_0)^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} &\leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-(c^{1-\alpha}/4) \left(\int_0^{cU_0} \eta(s)ds \right)^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}} = \\ &-(c^{1-\alpha}/4)V_0^{\frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1}}, \end{aligned}$$

由此并令

$$\tilde{\alpha} = \frac{2\alpha_1}{1+\alpha_1} \in (0, 1), \quad k = \min \left\{ \frac{c_1}{4}, \frac{c^{1-\alpha}}{4} \right\},$$

可得

$$\dot{V}_0 + \dot{W} \leq -\frac{c_1 W^{\tilde{\alpha}}}{4} - \frac{c^{1-\alpha} V_0^{\tilde{\alpha}}}{4} \leq -k(W + V_0)^{\tilde{\alpha}}.$$

由定理1, 这意味着闭环系统是全局有限时间稳定的, 且停息时间 T 满足

$$T \leq \frac{1}{k(1-\tilde{\alpha})} (W(x_0) + V_0(\xi_0))^{1-\tilde{\alpha}}.$$

进一步, 由 k 的定义易知, 当 c_1 和 c 足够大, 那么 k 将变得充分大, 进而由上式知停息时间 T 可实现适当调整. 若系统的初始值已知, 那么通过选择 c_1 和 c , 进而通过 k 实现停息时间 T 的任意调整. 因此, 使停息时间 T 变得任意小是可行的. 但是 c, c_1 是常数, 不可能取到无穷大, 因此停息时间 T 不会为0.

本文的主要结果可以概括成如下定理, 其证明是显而易见的.

定理2 考虑满足假设1~假设3的一类带有零动态的不确定非线性系统(2). 设函数 $\eta'(\cdot)$ 满足(23), $c > (4n)^{1/(1-\alpha)}$, $c_1 > 0$, 那么由(20)给出的连续的状态反馈控制器 $u(x)$ 使得闭环系统全局有限时间稳定, 并且恰当选取 c 和 c_1 可实现停息时间 T 的适当调整. 进一步, 若系统的初始值已知, 则停息时间 T 可以任意调整.

注2 可以看出, 设计非线性系统(2)的可调停息时间有限时间稳定控制器的难点之一是如何有效地处理系统的不可测量零动态, 特别是设计函数 $\eta(\cdot)$ 的构造十分关键. 然而, 当系统(2)无零动态, 即 $f_0(\cdot) \equiv 0$ 时, 只需令 $V_0(\cdot) \equiv 0$ 和 $\eta(\cdot) \equiv 0$, 从而控制设计过程变得十分简单.

4 仿真算例(Simulation example)

考虑如下带有不可测零动态 ξ 的简单不确定非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -3\xi^{1/3} + x, \\ \dot{x} = (1.5 + 0.5 \cos(\theta x))u + \xi x. \end{cases} \quad (24)$$

其中, θ 表示系统的未知参数, 它的存在导致控制系数函数 $d_1(x) = 1.5 + 0.5 \cos(\theta x)$ 未知, 但是该系统满足 $1 \leq d_1(x) \leq 2$. 在如下仿真中, 假设 $\theta = 1$.

显然, 若 $U_0(\xi) = \xi^2/2$, 则该系统满足假设1, 且 $\alpha = 2/3$, $\kappa(s) = \bar{\kappa}(s) = s^2/2$, $s \in \mathbb{R}^+$, $\beta(x) = x^4/4$. 该系统满足假设2, 且 $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $\lambda_1 = \mu_1 = a_2 = b_2 = \lambda_2 = \mu_2 = 1$. 另一方面, 该系统也满足假设3, 且 $m = 1$, $\phi(s) = s$, $s \in \mathbb{R}^+$, $\bar{\phi}(s) =$

$s^{17/32}$, $s \in \mathbb{R}^+$, $\gamma_1(x) = |x|/2$.

选择 $\eta'(s) = 1 + s^{17/16} + s^{195/48}$, $s \in \mathbb{R}^+$, 则 $\eta(s) = \eta'(s)s^{13/48}$, $s \in \mathbb{R}^+$. 故参照第2节所给出的设计步骤, 可得到控制器:

$$u = -z^{13/17}(c_1 + c_1 z^2 + (1 + z^2)\gamma_1(x) + (1 + z^2)/4 + \tilde{\beta}(x)),$$

其中 $z = x^{17/15}$, $\tilde{\beta}(x) = \frac{c}{4}\eta(c(1 + 2\beta(x))^{3/2})x^2$.

设系统(24)的初始值为 $\xi(0) = 1.2$, $x(0) = -1$. 如下图1和图2分别描述了当 $c = 70$, $c_1 = 0.01$ 和 $c = 100$, $c_1 = 8$ 时闭环系统各个状态的有限时间收敛行为. 具体地, 当 $c = 70$, $c_1 = 0.01$ 时, 闭环系统的停息时间 $T \approx 6.2$ s; 而 $c = 100$, $c_1 = 8$ 时, 闭环系统的停息时间 $T \approx 0.6$ s. 这样, 通过改变 c 和 c_1 的取值, 停息时间 T 得到了调整, 从而验证了本文方法的有效性和结论的正确性.

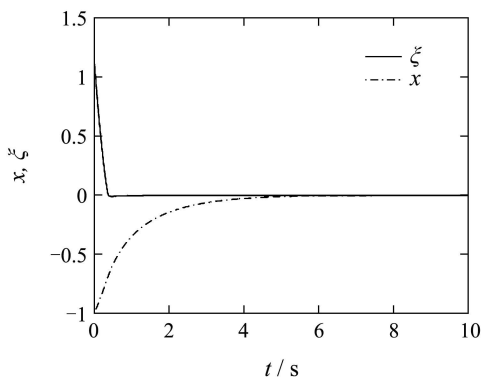


图1 当 $c = 70$, $c_1 = 0.01$ 时零动态 ξ 和状态 x

Fig. 1 Zero dynamics ξ and state x when $c = 70$, $c_1 = 0.01$

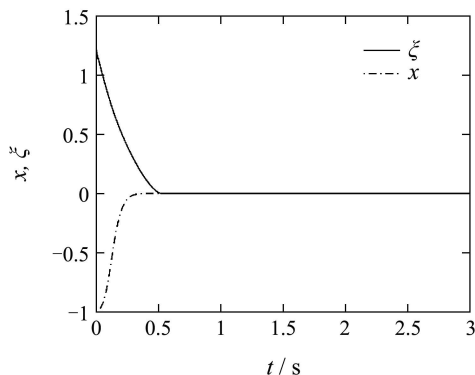


图2 当 $c = 100$, $c_1 = 8$ 时零动态 ξ 和状态 x

Fig. 2 Zero dynamics ξ and state x when $c = 100$, $c_1 = 8$

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类带有零动态不确定非线性系统的可调停息时间全局有限时间镇定问题. 通过灵活运用有限时间稳定的Lyapunov理论和控制器的反推设计技术, 给出了具有更强实用性的停息时间可调

的有限时间稳定控制器的迭代设计步骤, 并通过仿真例子验证了理论结果的正确性. 需要进一步研究的问题是, 当系统控制系数未知且无上下界信息时, 如何设计可调停息时间全局有限时间稳定控制器.

参考文献(References):

- [1] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [2] HAIMO V T. Finite time controllers[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1986, 24(4): 760 – 770.
- [3] CORON J M. On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1995, 33(3): 804 – 833.
- [4] SHEN Y J, XIA X H. Semi-global finite-time observers for nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2008, 44(12): 3152 – 3156.
- [5] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(5): 678 – 682.
- [6] HONG Y, HUANG J, XU Y. On an output feedback finite-time stabilization problem[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(2): 305 – 309.
- [7] QIAN C, LI J. Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observable linearization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 885 – 890.
- [8] HONG Y, WANG J, CHENG D. Adaptive finite-time control of nonlinear systems with parametric uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(5): 858 – 862.
- [9] HONG Y. Finite-time stabilization and stabilizability of a class of controllable systems[J]. *Systems and Control Letters*, 2002, 46(4): 231 – 236.
- [10] 洪奕光, 王剑魁. 一类非线性系统的非光滑有限时间镇定[J]. 中国科学E辑, 2005, 35(6): 663 – 672.
(HONG Yiguang, WANG Jiankui. Nonsmooth finite-time stabilization of a class of nonlinear systems[J]. *Science in China, Series E*, 2005, 35(6): 663 – 672.)
- [11] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of homogeneous systems[C] // *Proceedings of American Control Conference*. Evanston: American Automatic Control Council, 1997, 4: 2513 – 2514.
- [12] HUANG X, LIN W, YANG B. Global finite-time stabilization of a class of uncertain nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2005, 41(5): 881 – 888.
- [13] HUANG X. Finite-time stabilization and detection of nonlinear systems[D]. USA: Case Western Reserve University, 2003.
- [14] HONG Y, JIANG Z. Finite-time stabilization of nonlinear systems with parametric and dynamic uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(12): 1950 – 1956.
- [15] BRYSON A E, HO Y C. *Applied Optimal Control*[M]. New York: John Wiley & Sons, 1975.
- [16] QIAN C, LIN W. A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(7): 1061 – 1079.
- [17] LIN W, PONGVUTHITHUM R. Global stabilization of cascade systems by C^0 partial-state feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1356 – 1362.

作者简介:

常霞 (1983—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为非线性系统控制;

刘允刚 (1970—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为随机控制、非线性系统分析、自适应控制等, E-mail: lygfr@sdu.edu.cn.