

电动Stewart平台分散子系统不确定性加权函数选择

傅绍文¹, 姚郁¹, 韩蕾²

(1. 哈尔滨工业大学 控制与仿真中心, 黑龙江 哈尔滨 150080;

2. 中国民航大学 航空自动化学院航空电子系, 天津 300300)

摘要: 以降低电动Stewart平台两输入两输出子系统不确定性描述的保守性为目的, 提出一种不确定性加权函数选择方法. 首先通过机理分析, 确定以反馈形式来描述平台子系统中低频的结构不确定性, 并得到具有3个待定参数的加权函数. 然后给出标称模型输出与实验数据相匹配的条件, 由此利用实验数据优化加权函数中的待定参数. 最后为方便控制器设计, 将系统不确定性描述化为统一的表达形式. 所提方法在描述系统不确定性时, 尽可能将模型中的已知部分分离出来, 并通过实验数据优化加权函数中的待定参数, 从而使得不确定性描述的保守性最小.

关键词: Stewart平台; 模型不确定性; 加权函数; 鲁棒控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Selection of uncertainty weighting function for decentralized subsystems of an electrical Stewart platform

FU Shao-wen¹, YAO Yu¹, HAN Lei²

(1. Control and Simulation Center, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150080, China;

2. College of Aeronautic Automation, Civil Aviation University of China, Tianjin 300300, China)

Abstract: To reduce the conservation in describing the uncertainty in the double input/ double output (DIDO) subsystems of an electrical Stewart platform, we propose a method for selecting the weighting function. First, the structured uncertainty at low and middle frequencies is described in a feedback format based on the model analysis, and a weighting function of 3 undetermined parameters is obtained. Secondly, a criterion is proposed for matching the output with the experiment data; this criterion is then used for optimizing the parameters in the weighting function. Finally, the system uncertainty is transformed into a uniform expression for control design. Since the deterministic part of the system has been separated as far as possible, and the parameters of the weighting function have been optimized with using experiment data, the proposed method for uncertainty description has been rendered less conservative.

Key words: Stewart platform; model uncertainty; weight function; robust control

1 引言(Introduction)

Stewart平台, 即6自由度并联机器人, 较传统串联机构具有更高精度、更高刚度以及更大载重比, 成为近年来研究热点. 其控制方法主要有基于平台动力学模型的多输入多输出集中控制方法^[1], 以及将平台分解为多个子系统的分散控制方法^[2]. 由于平台位置反解容易以及分散控制便于工程实现^[3], 实际工程中往往采用分散控制方法设计平台控制器. 针对应用广泛的对称Stewart平台, 文[4,5]指出与其几何结构相符的特征: 平台关节空间惯性矩阵是块对角占优的, 因此可将平台划分为3个两输入两输出(DIDO)子系统进行分散控制. 当采用线性系统鲁

棒控制方法设计平台分散子系统控制器时, 需要给出描述模型不确定性的加权函数.

不确定性加权函数选择是鲁棒控制系统设计的重要环节, 然而给出一个统一的加权函数选择方法是比较困难的^[6,7]. 但不论用什么方法均应遵循: 尽可能减少不确定性描述的保守性, 使得不确定性加权函数所描述的模型摄动贴近实际情况. 特别是在对控制系统性能影响较大的中低频段应尽量使加权函数不过分超过模型摄动的范围. 本文针对电动Stewart平台DIDO子系统模型不确定性描述问题, 提出一种加权函数选择方法, 以使得不确定性描述保守性较小.

2 平台动力学模型建立及不确定性分析(Platform dynamics modeling and uncertainty analysis)

Stewart平台关节空间刚体动力学模型为

$$M_J(q)\ddot{\theta} + C_J(q, \dot{q})\dot{\theta} + G_J(q) = \tau, \quad (1)$$

其中: τ 为6个支路电机驱动力矩矢量, q 为上平台的广义坐标, θ 为6个支路电机转角矢量, M_J , C_J 以及 G_J 分别为平台惯性矩阵、科氏力与离心力矩阵以及重力矢量. 由于 θ 到 q 的位置正解过程不是解析的, 式(1)关于 θ 不具有解析形式.

电动Stewart平台DIDO子系统动力学结构特性如图1所示(以支路1、支路2组成子系统为例), 其中, K_e 为电机反电动势系数, K_V 为功放系数, K_s 为逆变器增益, K_f 为电流环反馈系数, K_c 为电流调节器比例系数, K_T 为电机的力矩系数, L 为电机电枢电感, R 为电枢电阻, B 为黏性摩擦系数. $J_1 = (M_J)_{11}$, $J_{12} = (M_J)_{12}$, $J_2 = (M_J)_{22}$ 分别为支路1等效惯性

负载、支路1与支路2的惯性耦合系数、支路2的等效惯性负载, $[d_1 \ d_2]^T$ 为干扰力矩.

电动Stewart平台动力学模型不确定性主要由永磁同步电动机模型线性化、驱动器参数摄动以及平台刚体部分惯性参数不确定性引起的中低频结构不确定性. 具体而言, 系统不确定性主要体现在: 反电势系数摄动 $K_e = K_{e0}(1 + \delta_e)$, 功放系数摄动 $K_V = K_{V0}(1 + \delta_V)$, 逆变器增益摄动 $K_s = K_{s0}(1 + \delta_s)$, 电流环调节器比例系数摄动 $K_c = K_{c0}(1 + \delta_c)$, 电流环反馈系数摄动 $K_f = K_{f0}(1 + \delta_f)$, 支路负载摄动 $J_1 = J_{10}(1 + \delta_{J1})$, $J_{12} = J_{120}(1 + \delta_{J12})$, $J_2 = J_{20}(1 + \delta_{J2})$.

3 不确定性加权函数结构的选择(Structure selection of uncertainty weight function)

由于中低频不确定性描述的保守性对系统性能影响较大, 因此选择加权函数时应尽可能降低其保守性. 将图1所示的DIDO被控对象进行简化, 可得图2所示方框图.

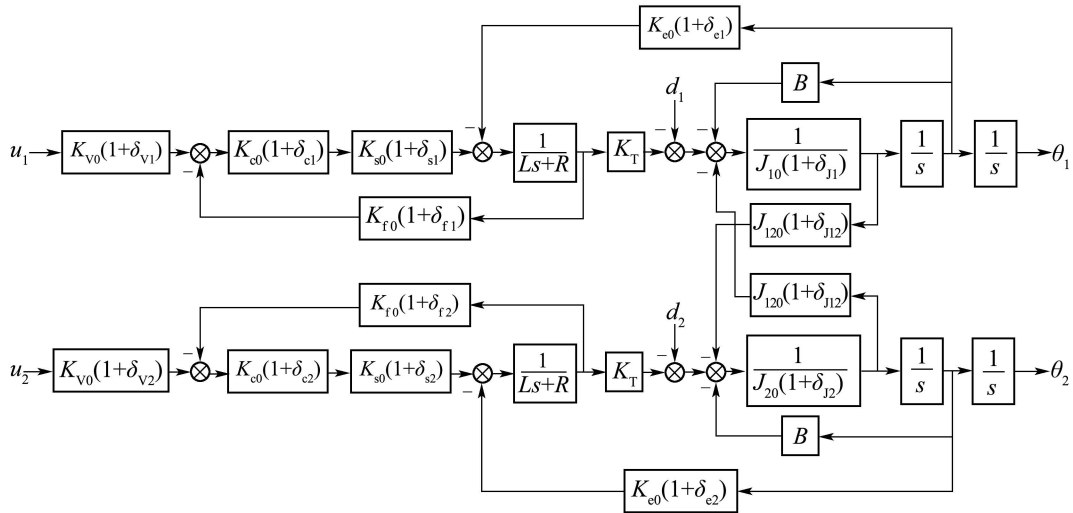


图1 电动Stewart平台DIDO子系统框图

Fig. 1 The DIDO subsystem diagram of electrical Stewart platform

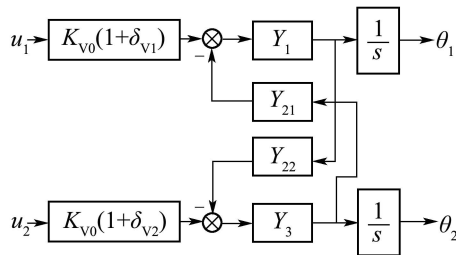


图2 简化的子系统框图

Fig. 2 The simplified subsystem diagram

其中

$$Y_1 = \frac{g_1(1 + b_1\delta_{t1})}{1 + g_2w_1\Delta_{s1}}, \quad (2)$$

式中

$$g_1 = \frac{k_{10}}{s^2 + a_{10}s + a_{20}}, \quad b_1\delta_{t1} = \delta_1, \\ g_2 = \frac{a_{10}s + a_{20}}{s^2 + a_{10}s + a_{20}}, \quad w_1\Delta_{s1} = \frac{a_{10}\delta_2s + a_{20}\delta_3}{a_{10}s + a_{20}}, \\ a_{10} = \frac{B}{J_{10}} + \frac{R + K_{cs0}K_{f0}}{L}, \quad k_{10} = \frac{K_{cs0}K_T}{J_{10}L},$$

$$a_{20} = \frac{K_{e0}K_T + B(R + K_{cs0}K_{f0})}{J_{10}L},$$

$$\delta_1 = \frac{\delta_{s1} - \delta_{J1}}{1 + \delta_{J1}},$$

$$\delta_2 = \frac{\delta_{s1} + \delta_{f1} + \delta_{s1}\delta_{f1}}{B/J_{10} + (R + K_{cs0}K_{f0})/L},$$

$$\delta_3 = \frac{\delta_{e1} - \delta_{J1}}{1 + \delta_{J1}},$$

其中: $K_{cs0} = K_{c0}K_{s0}$, $|\delta_{t1}| \leq 1$, $\|\Delta_{s1}\| \leq 1$, $b_1 > 0$.

Y_{21} 表达式为:

$$Y_{21} = g_{21}(1 + w_3\Delta_{s3}), \quad (3)$$

式中:

$$g_{21} = k_{20}(a_{30}s^2 + a_{40}s),$$

$$w_3\Delta_{s3} = \frac{a_{30}\delta_4s^2 + a_{40}(\delta_4 + \delta_5 + \delta_4\delta_5)s}{a_{30}s^2 + a_{40}s},$$

$$k_{20} = \frac{J_{120}}{K_{cs0}}, \quad a_{30} = \frac{L}{K_T}, \quad a_{40} = \frac{(R + K_{cs0}K_{f0})}{K_T},$$

$$\delta_4 = \frac{\delta_{J12} - \delta_{s1}}{1 + \delta_{s1}}, \quad \delta_5 = \frac{K_{cs0}K_{f0}(\delta_{s1} + \delta_{f1} + \delta_{s1}\delta_{f1})}{R + K_{cs0}K_{f0}},$$

其中 $\|\Delta_{s3}\| \leq 1$. 类似地,

$$Y_3 = \frac{g_3(1 + b_2\delta_{t2})}{1 + g_4w_2\Delta_{s2}}, \quad Y_{22} = g_{22}(1 + w_4\Delta_{s4}).$$

根据平台的对称性, 可将不确定性部分处理为:

$$\begin{bmatrix} b_1\delta_{t1} & 0 \\ 0 & b_2\delta_{t2} \end{bmatrix} = b\delta, \quad \begin{bmatrix} w_1\Delta_{s1} & 0 \\ 0 & w_2\Delta_{s2} \end{bmatrix} = w_{s1}\Delta_{c1},$$

$$\begin{bmatrix} w_4\Delta_{s4} & 0 \\ 0 & w_3\Delta_{s3} \end{bmatrix} = w_{s2}\Delta_{c2},$$

其中: δ , Δ_{c1} , Δ_{c2} 均为对角结构的不确定性矩阵. 令

$$G_1 = \begin{bmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_3 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 & g_{21} \\ g_{22} & 0 \end{bmatrix}, \quad G_3 = \begin{bmatrix} g_2 & 0 \\ 0 & g_4 \end{bmatrix}.$$

则图2中耦合部分传递函数为

$$G = [I + G_1(I + b\delta)(I + w_{s1}\Delta_{c1}G_3)^{-1}G_2 \times (I + w_{s2}\Delta_{c2})]^{-1}G_1(I + b\delta)(I + w_{s1}\Delta_{c1}G_3)^{-1}.$$

令 $G_0 = (I + G_1G_2)^{-1}G_1$, 可得

$$G = G_0[I + \Delta'W'G_2G_0]^{-1}(I + b\delta), \quad (4)$$

其中

$$\Delta'W' =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a_{31}\delta_{c1}s + a_{41}\delta_{c2}}{a_{31}s + a_{41}} & \frac{a_{11}\delta_{c3}s + a_{21}\delta_{c4}}{k_{11}k_{22}(a_{32}s + a_{42})} \\ \frac{a_{12}\delta_{c5}s + a_{22}\delta_{c6}}{k_{12}k_{21}(a_{31}s + a_{41})} & \frac{a_{32}\delta_{c7}s + a_{42}\delta_{c8}}{a_{32}s + a_{42}} \end{bmatrix},$$

式中: a_{11} 表示支路1的 a_{10} , $a_{ij}(i = 1, \dots, 4, j = 1, 2)$ 类似, $\delta_{ci}(i = 1, \dots, 8)$ 为式(2)与(3)中的摄动参数 δ_{t1} , δ_{t2} , δ_2 , δ_3 等的函数, 亦为实值不确定参数. 为了将 $\Delta'W'$ 中的已知部分分离出来, 且使得系统不确定性部分是稳定正则的, 引入中间式 $c_1s^2 + c_2s$, 其中 $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, 可得

$$\Delta' = \begin{bmatrix} \frac{a_{31}\delta_1s + a_{41}\delta_2}{c_1s + c_2} & \frac{a_{11}\delta_3s + a_{21}\delta_4}{k_{11}k_{22}(c_1s + c_2)} \\ \frac{a_{12}\delta_5s + a_{22}\delta_6}{k_{12}k_{21}(c_1s + c_2)} & \frac{a_{32}\delta_7s + a_{42}\delta_8}{c_1s + c_2} \end{bmatrix},$$

$$W' = \begin{bmatrix} \frac{c_1s^2 + c_2s}{a_{31}s^2 + a_{41}s} & 0 \\ 0 & \frac{c_1s^2 + c_2s}{a_{32}s^2 + a_{42}s} \end{bmatrix}.$$

选择合适的 c_1, c_2 可使得 $\|\Delta'\| \leq 1$, 且 Δ' 是稳定有理正则的, 因此, 选择不确定性加权函数为

$$W_F = W'G_2G_0 = (c_1s^2 + c_2s) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} G_0, \quad (5)$$

界函数 W_F 是正则的, 则耦合部分动力学模型为

$$G = G_0[I + \Delta'W_F]^{-1}(I + b\delta), \quad (6)$$

即描述系统结构不确定性的加权函数为 W_F 与 b , 共有 c_1, c_2 及 b_3 个待定参数.

4 不确定性加权函数待定参数的优化(Uncertainty weight function parameters optimization)

式(6)中有 c_1, c_2, b_3 个待定参数, 可根据实验数据对其进行优化, 以保证不确定性描述具有较小的保守性. 由于

$$(I + b\delta)^{-1} = I + \begin{bmatrix} \frac{b\delta_1}{1 - b\delta_1} & 0 \\ 0 & \frac{b\delta_2}{1 - b\delta_2} \end{bmatrix} = (I + b'\delta'),$$

则式(6)可化为

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_{V0}}{s} G_0 (I + b'\delta' + \Delta_q(c_1s^2 + c_2s) G_{F0})^{-1}, \quad (7)$$

其中: $(I + b\delta)^{-1} \Delta' = \Delta_q$, $G_{F0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} G_0$.

4.1 输出匹配条件(Output matching condition)

平台子系统不确定性模型结构如图3所示, 其

中 v 是标称系统输出, y 为实验测得实际系统的输出. 则 $e = v - y = [b'\delta' + \Delta_q (c_1 s^2 + c_2 s) G_{F0}] y$, $\|\delta'\| \leq 1$, $\|\Delta_q\| \leq 1$. 令 $e^* = \frac{v-y}{\|y\|}$, 则标称系统输出与实验数据应满足匹配条件

$$\|e^*\| = \|[b'\delta' + \Delta_q (c_1 s^2 + c_2 s) G_{F0}] \frac{y}{\|y\|}\|, \quad (8)$$

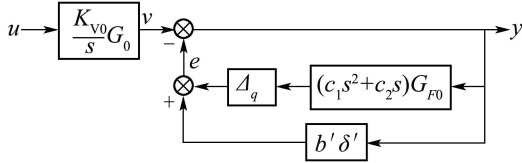


图3 系统中低频动态结构

Fig. 3 The system diagram in low and middle frequency

为了具体量化输出匹配条件, 需要去掉式(8)中的不确定部分. 进行 m 次实验, 每次实验记录 n 个频率点处的 $\|e_k^*(j\omega_i)\|$, $k = 1, \dots, m$, $i = 1, \dots, n$, 则式(8)可化为:

$$\max_{k=1, \dots, m} \|e_k^*(j\omega_i)\| \leq b' + \|(-c_1\omega_i^2 + c_2\omega_i j) G_{F0}(j\omega_i)\|. \quad (9)$$

4.2 参数优化(Parameter optimization)

式(9)表明, 当不等式两端取值接近时, 由参数 b' , c_1 , c_2 描述不确定性的保守性较小. 令

$$d_i = b' + \|(-c_1\omega_i^2 + c_2\omega_i j) G_{F0}(j\omega_i)\|, \\ e_i = \max_{k=1, \dots, m} \|e_k^*(j\omega_i)\|,$$

则加权函数参数优化目标为: 找到3个参数 $b' > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, 使得 $d_i \geq e_i$, 且 $\sum_{i=1}^n (d_i - e_i)^2$ 最小.

由于 d_i 的表达式复杂, 不便于直接分析, 因此, 给定 $k_p = \frac{c_2}{c_1}$, 则 $d_i = b' + c_1 \|(-\omega_i^2 + k_p\omega_i j) G_{F0}(j\omega_i)\|$. 在 k_p 给定情况下, 令 $x_i = \|(-\omega_i^2 + k_p\omega_i j) G_{F0}(j\omega_i)\|$, 定义指标 $J = \sum_{i=1}^n (b' + c_1 x_i - e_i)^2$, 通过最小化 J , 可以得到 b' , c_1 的最小二乘解为:

$$\begin{bmatrix} b' \\ c_1 \end{bmatrix} = (A_J^T A_J)^{-1} A_J^T B_J, \quad (10)$$

其中: $A_J = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$, $B_J = [e_1 \dots e_n]^T$. 选取若干 k_p 值, 以 J 值最小的 b' , c_1 为优化结果.

4.3 加权函数的统一表达形式(Weight function's uniform presentation)

平台子系统不确定性模型如式(7)所示, 可见,

模型中存在两处不确定性 δ' 与 Δ_q , 不便于控制器设计, 因此有必要将其化为统一的形式. 由于

$$P = \frac{K_{V0}}{s} G_0 [I + (\frac{b'}{c_1 s^2 + c_2 s} \delta' G_{F0}^{-1} + \Delta_p) \times (c_1 s^2 + c_2 s) G_{F0}]^{-1},$$

令 $\Delta_p = \frac{b'}{(c_1 s^2 + c_2 s)} \delta' G_{F0}^{-1} + \Delta_q$, 则

$$\|\Delta_p\| \leq \left\| \frac{b'}{(c_1 s^2 + c_2 s)} G_{F0}^{-1} \right\| + 1.$$

找到一个有理正则的传递函数 $W_c(s)$, 使得

$$\|W_c(j\omega)\| \geq \left\| \frac{b'}{(-c_1\omega^2 + c_2\omega j)} G_{F0}^{-1}(j\omega) \right\| + 1, \quad (11)$$

从而选择平台子系统的不确定性加权函数为

$$W_{tm} = W_c (c_1 s^2 + c_2 s) G_{F0}, \quad (12)$$

则

$$P = \frac{K_{V0}}{s} G_0 (I + \Delta_{tm} W_{tm})^{-1}, \quad (13)$$

其中 $\|\Delta_{tm}\| \leq 1$.

5 仿真实例(Simulation example)

给定Stewart平台参数为: 上平台半径0.2 m, 下平台半径0.4 m, 上平台邻近铰链点所对圆心角为 10° , 下平台邻近铰链点所对圆心角为 25° , 平台处于中位时高度1.2 m. 上平台质量15 kg, 绕三坐标轴转动惯量为 $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $1.0 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. 平台处于中位点处, 关节空间刚体动力学模型的惯性矩阵为:

$$M_J = \begin{bmatrix} 51.3 & -46.8 & -3.3 & 8.3 & -3.3 & -3.6 \\ -46.8 & 51.3 & -3.6 & -3.3 & 8.3 & -3.3 \\ -3.3 & -3.6 & 51.3 & -46.8 & -3.3 & 8.3 \\ 8.3 & -3.3 & -46.8 & 51.3 & -3.6 & -3.3 \\ -3.3 & 8.3 & -3.3 & -3.6 & 51.3 & -46.8 \\ -3.6 & -3.3 & 8.3 & -3.3 & -46.8 & 51.3 \end{bmatrix},$$

可见其具有块对角占优特性. 平台电气部分参数标称值为: $K_T = 1.3$, $L = 0.034$, $R = 13.1$, $K_e = 0.23$, $K_c = 500$, $K_s = 0.3$, $K_f = 1.0$, $K_V = 1.0$, $B = 0.004$, 折算到电机轴处的支路负载为 $J_1 = 0.011$, $J_2 = -0.008$, $J_3 = 0.012$, 各参数采用国际单位.

假设不确定参数在其标称值基础上随机摄动5%, 得到100个摄动模型. 取 $k_p = 80$, 可优化得出 $b' = 0.064$, $c_1 = 5.3 \times 10^{-6}$. d_i 与 e_i 的具体数值如图4所示, 可以看出, d_i 与 e_i 充分接近且 $d_i \geq e_i$,

表明不确定性描述保守性较小, 相应得到

$$W_c = \frac{0.182s^3 + 816s^2 + 6.11 \times 10^4 s + 6.87 \times 10^6}{2.38 \times 10^{-4} s^3 + 1.83s^2 + 4180s + 3.01 \times 10^6}.$$

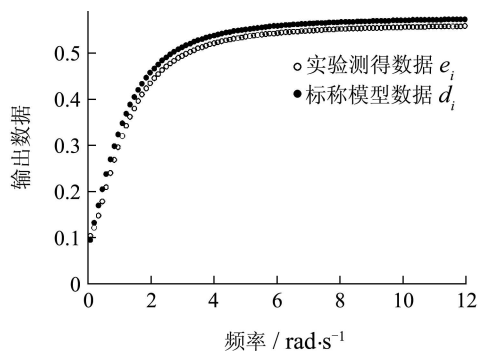


图4 参数优化后 d_i 与 e_i 对比

Fig. 4 Contrast of d_i and e_i after parameters' optimization

6 结论(Conclusions)

针对电动Stewart平台DIDO子系统不确定性描述的问题, 提出了一种加权函数选择方法. 由于加权函数选择过程中尽可能分离出模型中的已知部分, 所得加权函数具有较小保守性. 所提方法为多自由度机电系统鲁棒控制器设计提供了参考.

参考文献(References):

- [1] KIM H S, CHO Y M, LEE K I. Robust nonlinear task space control for 6 DOF parallel manipulator[J]. *Automatica*, 2005, 41(9): 1591 – 1600.
- [2] SU Y X, DUAN B Y, ZHENG C H, et al. Disturbance rejection high-precision motion control of a Stewart platform[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2004, 12(3): 364 – 374.

- [3] 蒋朝辉, 桂卫华, 谢永芳, 等. 不确定关联大系统分散鲁棒 H_∞ 输出反馈控制[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(5): 743 – 748.
(JIANG Chaohui, GUI Weihua, XIE Yongfang, et al. Decentralized robust H_∞ output feedback control for uncertainty interconnected large-scale systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 743 – 748.)
- [4] 傅绍文, 姚郁. 一种新的六自由度并联机器人分散控制方法[J]. *控制与决策*, 2008, 23(3): 320 – 324.
(FU Shaowen, YAO Yu. A new decentralized control for six degrees of freedom parallel robot[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(3): 320 – 324.)
- [5] 姚郁, 傅绍文, 韩蕾. Stewart平台关节空间惯性矩阵块对角占优分析与判别[J]. *机械工程学报*, 2008, 44(6): 101 – 106.
(YAO Yu, FU Shaowen, HAN Lei. Block diagonal dominance analysis and judgment of Stewart platform's joint-space inertia matrix[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2008, 44(6): 101 – 106.)
- [6] BOLING J M, HAGGBLOM K E, NYSTROM R H. Multivariable uncertainty estimation based on multi-model output matching[J]. *Journal of Process Control*, 2004, 14(3): 293 – 304.
- [7] NYSTROM R H, HAGGBLOM K E, BOLING J M. Derivation and selection of norm-bounded uncertainty descriptions based on multiple models[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(7): 717 – 727.

作者简介:

傅绍文 (1978—), 男, 哈尔滨工业大学控制与仿真中心博士研究生, 研究方向为并联机构动力学与控制, E-mail: shaowenfu@sohu.com;

姚郁 (1963—), 男, 哈尔滨工业大学教授, 博士生导师, 研究方向为先进控制理论与应用;

韩蕾 (1978—), 女, 中国民航大学讲师, 研究方向为机电系统运动控制.