

文章编号: 1000-8152(2009)04-0443-03

# 无模型SISO时滞系统的PID参数稳定域研究

林示麟, 欧林林, 俞 立

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

**摘要:** 针对无精确模型的单输入单输出(SISO)时滞系统, 利用频率响应数据, 给出确定PID参数稳定域的解析方法。首先通过继电反馈频域辨识法得到系统的频率响应数据, 然后基于该数据确定控制参数的奇异边界线和非奇异边界线, 并判断边界线的哪一侧具有更少的不稳定极点, 从而给出能使闭环系统稳定的控制参数区域。该方法避免了模型辨识的复杂计算过程, 为无模型SISO时滞系统的PID控制器设计和调节提供了一条简单有效的途径。仿真结果验证了方法的有效性。

**关键词:** 单输入单输出系统; 时滞; 频率响应; PID参数; 稳定域

中图分类号: TP273 文献标识码: A

## Stability regions of PID parameters for model-free SISO systems with time delay

LIN Shi-lin, OU Lin-lin, YU Li

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China)

**Abstract:** For the single-input and single-output (SISO) time-delay system with no accurate model, we propose an analytical method for determining the stability regions of PID parameters by using the frequency response data. The frequency response data are obtained by using the method of frequency response identification from relay feedback. Then, the singular and nonsingular boundaries of the PID parameters are determined from the frequency response data. By comparing the number of unstable poles on both sides of a boundary, we select the side with less unstable poles for determining the regions of PID parameters which make the closed-loop system stable. For the model-free SISO system with time delay, the proposed method avoids the complexity of the model identification, and thus provides a convenient approach for the design and tuning of the PID controller. The simulation results demonstrate the validity of this method.

**Key words:** SISO system; time-delay; frequency response; PID parameters; stability region

## 1 引言(Introduction)

PID控制器原理简单, 通用性强, 在实际工业控制领域中应用广泛<sup>[1]</sup>。保证闭环控制系统稳定是PID控制器设计和整定的最基本要求, 故确定PID参数稳定域就显得尤为重要。但由于包含时滞的闭环特征方程具有无穷多个零点, 因此很难确定时滞系统的PID参数稳定域。针对该问题, 已提出了各种不同的控制参数稳定域求解方法<sup>[2~4]</sup>, 但大多都是基于已知的数学模型。文献[5]基于频率响应数据给出了不依赖数学模型的低阶控制器稳定域求解方法, 但必须通过在不同区域内选取控制参数值进行稳定性测试才能确定稳定域。

本文针对SISO时滞对象, 基于频率响应数据, 给出一种确定PID参数稳定域的解析方法。在稳定域

的求解过程中, 无需建立对象的数学模型, 故该方法在无法精确获得对象模型或者辨识过程比较复杂的场合具有一定的实际应用价值。

## 2 问题描述(Problem description)

考虑图1中的继电反馈系统, 其中的 $G$ 为被控时滞对象:

$$G(s) = \frac{D(s)}{N(s)} e^{-\theta s},$$

$C$ 为具有以下形式的PID控制器:

$$C(s) = \frac{K_i + K_p s + K_d s^2}{s(1 + Ts)},$$

这里,  $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ 分别为比例、积分、微分系数,  $T$ 为一较小的正实数(一般取 $T = 0.01 \sim 0.1$ )。

收稿日期: 2007-09-24; 收修改稿日期: 2008-08-29。

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60525304, 60704021)。

本文要解决的主要问题是：当时滞对象 $G$ 的模型未知时，如何只利用 $G(j\omega)$ 的实部数据 $G_r(\omega)$ 和虚部数据 $G_j(\omega)$ 确定PID参数稳定域。

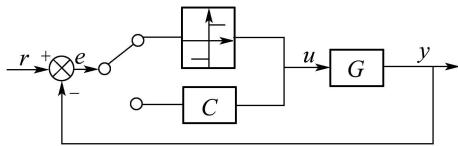


图1 继电反馈系统框图

Fig. 1 The block diagram of relay feedback system

### 3 时滞对象的多点频率响应辨识 (Multiple-point frequency response identification for time-delay process)

由于过程在继电反馈下的响应既不是周期的也不是绝对可积的，所以可把过程在继电反馈下的响应分为稳态部分和暂态部分：

$$\begin{aligned} y(t) &= \Delta y(t) + y_s(t), \\ u(t) &= \Delta u(t) + u_s(t). \end{aligned}$$

写成传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\Delta Y(s) + Y_s(s)}{\Delta U(s) + U_s(s)},$$

其中： $\Delta Y(s)$ 和 $\Delta U(s)$ 分别是暂态部分 $\Delta y$ 和 $\Delta u$ 的拉普拉斯变换。 $Y_s(s)$ 和 $U_s(s)$ 分别是稳态部分 $y_s$ 和 $u_s$ 的拉普拉斯变换。

设过程达到周期振荡后，其振荡周期为 $T_c$ ，则过程的频率响应为：

$$G(j\omega) = \frac{\Delta Y(j\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T_c}} \int_0^{T_c} y_s(t) e^{-j\omega t} dt}{\Delta U(j\omega) + \frac{1}{1 - e^{-j\omega T_c}} \int_0^{T_c} u_s(t) e^{-j\omega t} dt}.$$

可以利用FFT方法计算 $\Delta Y(j\omega)$ 和 $\Delta U(j\omega)$ ，而 $Y_s(j\omega)$ 和 $U_s(j\omega)$ 则可利用数字积分计算得到<sup>[6]</sup>。

如果获得过程在继电反馈下的输入和输出数据，利用上述方法就可求得该对象的多点频率响应数据。

### 4 PID参数稳定域确定(Determination of stability region of PID parameters)

在控制参数空间中，稳定域边界包括奇异边界线( $\omega = 0, \omega = \infty$ )和非奇异边界线( $0 < \omega < \infty$ )<sup>[2]</sup>。

a)  $\omega = 0$ 。

假设多项式 $N(s)$ 和 $D(s)$ 的 $s^0$ 项系数分别为 $a_0$ 和 $b_0$ ，若 $s \rightarrow 0$ ，闭环系统特征多项式可近似为：

$$s \cong -\frac{a_0 K_i}{b_0 + a_0 K_p}, \quad (1)$$

当 $a_0/[b_0 + a_0 K_p] < 0$ 时， $K_i < 0$ 的一侧比 $K_i > 0$ 的

一侧少一个不稳定的闭环极点；当 $a_0/[b_0 + a_0 K_p] > 0$ 时， $K_i > 0$ 的一侧比 $K_i < 0$ 的一侧少一个不稳定的闭环极点。由此可知：

i) 若 $a_0 \neq 0$ 且 $b_0 \neq 0$ ，则 $G_r(0) = a_0/b_0 \neq 0$ ， $G_j(0) = 0$ 。则当 $K_p < -1/G_r(0)$ 时，稳定域在 $K_i < 0$ 的一侧；当 $K_p > -1/G_r(0)$ 时，稳定域在 $K_i > 0$ 的一侧。

ii) 若 $G(s)$ 在原点处有极点，即 $b_0 = 0$ 。则当 $K_p < 0$ 时，稳定域在 $K_i < 0$ 的一侧；当 $K_p > 0$ 时，稳定域在 $K_i > 0$ 的一侧。

b)  $0 < \omega < +\infty$ 。

当 $K_d$ 固定时，根据文献[2]可推得：

$$\begin{bmatrix} K_i \\ K_p \end{bmatrix} = \frac{1}{(N'_r)^2 \omega + (N'_j)^2 \omega} \begin{bmatrix} N'_r \omega & N'_j \omega \\ -N'_j & N'_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} N'_r K_d \omega^2 + D_j \omega + TD_r \omega^2 \\ N'_j K_d \omega^2 - D_r \omega + TD_j \omega^2 \end{bmatrix},$$

$$N'_r = N_r \cos(\theta\omega) + N_j \sin(\theta\omega),$$

$$N'_j = N_j \cos(\theta\omega) - N_r \sin(\theta\omega),$$

又由于

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{N'^2_r + N'^2_j}{D_r^2 + D_j^2},$$

故可得 $(K_p, K_i)$ 的非奇异边界线

$$\begin{cases} K_i = \omega^2 K_d - \frac{G_j(\omega)}{|G(j\omega)|^2} \omega + \frac{G_r(\omega)}{|G(j\omega)|^2} \omega^3 T, \\ K_p = -\frac{G_r(\omega)}{|G(j\omega)|^2} - \frac{G_j(\omega)}{|G(j\omega)|^2} \omega^2 T. \end{cases} \quad (2)$$

当 $0 < \omega < +\infty$ 时总有 $(N'_r)^2 \omega + (N'_j)^2 \omega > 0$ ，故沿 $\omega$ 增大的方向，由公式(2)所确定的非奇异边界线的右侧比其左侧有更多的不稳定极点，即稳定域在边界线的右侧。

c)  $\omega = \infty$ 。

假设 $a_n$ 为多项式 $D(s)$ 的最高次幂 $s^n$ 的系数，且 $a_n \neq 0$ ， $b_m$ 为多项式 $N(s)$ 的最高次幂 $s^m$ 的系数。由于 $m \leq n-1$ ，因此，当 $\omega = \infty$ 时，闭环特征方程等价于 $T a_n s^{n+2} = 0$ ，与控制参数无关。

综上可得：PID控制参数的奇异边界线为 $K_i = 0$ 。若 $K_p < -1/G_r(0)$ ，则稳定域在 $K_i < 0$ 一侧；若 $K_p > -1/G_r(0)$ ，则稳定域在 $K_i > 0$ 一侧。PID控制参数的非奇异边界线由式(2)确定，稳定域在非奇异边界线的右侧。

### 5 仿真示例(Example)

考虑对象：

$$G(s) = \frac{-0.5s + 1}{(s + 1)^2(2s + 1)} e^{-0.6s}, \quad (3)$$

控制器中的参数 $T$ 取0.01。仿真时引入白噪声。根据对象在继电反馈下的输出响应,可得到多点频率响应数据,如图2所示。

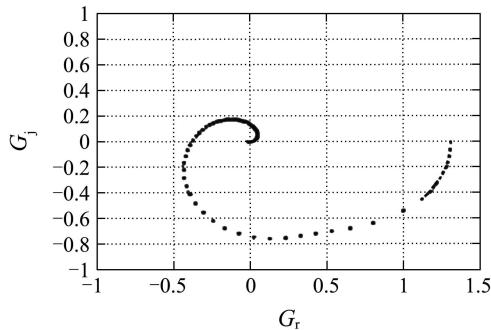


图2  $G(s)$ 的多点频率响应数据图

Fig. 2 Multiple-plot frequency response data of  $G(s)$

令 $K_d = 0.3$ ,由式(2)得图3中以实线表示PID参数非奇异边界线。虚线为利用式(3)的精确模型 $G(s)$ 得到的非奇异边界线。依据第4节得到的结论可知,( $K_p, K_i$ )的稳定域是由该非奇异边界线和奇异边界 $K_i = 0$ 所包围的区域。图3中的虚线为基于精确模型所得到的PID参数非奇异边界线。由图3可知,利用频率响应数据得到的稳定域和利用精确模型计算得到的稳定域相当吻合,仅在 $-1 < K_p < -0.75$ 的非奇异边界线有比较明显的偏差。产生该偏差的主要原因是,在获取频率响应数据的过程中引入了白噪声(噪声干扰在实际中不可避免)。

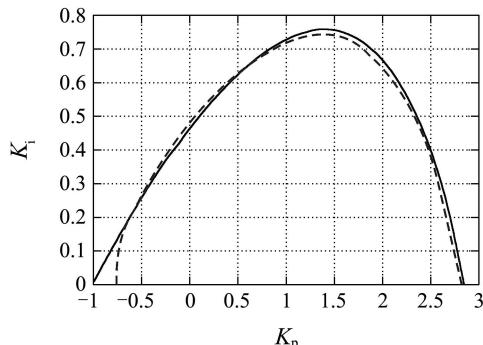


图3  $K_d = 0.3$ 时, ( $K_p, K_i$ )的稳定域

Fig. 3 Stability regions of  $(K_p, K_i)$  when  $K_d = 0.3$

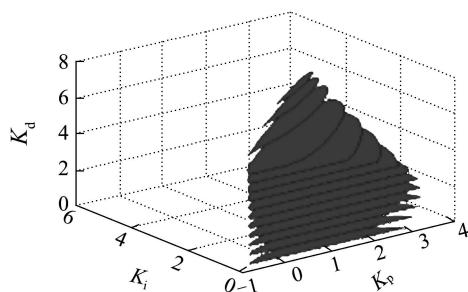


图4 不同 $K_d$ 值的( $K_p, K_i$ )稳定域

Fig. 4 Stability region of  $(K_p, K_i)$  for different value of  $K_d$

$K_d$ 取不同的值可得到不同的( $K_p, K_i$ )稳定域,如图4所示。在图4所示的稳定域中任选几组控制

参数。如 $K_p, K_i, K_d = 2.5, 1, 3.1$ ,  $K_p, K_i, K_d = 1.5, 0.5, 1$ 和 $K_p, K_i, K_d = 0.4, 0.2, 0.3$ ,都能够保证闭环系统的稳定。这几组控制参数所对应的单位阶跃输出曲线如图5所示。

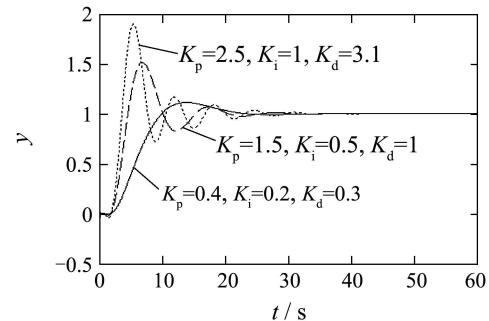


图5 对应于不同控制参数的单位阶跃响应曲线

Fig. 5 Step response under different value of controller parameters

## 6 结束语(Conclusion)

本文在不需要获得时滞对象的传递函数或状态空间模型的情况下,仅利用频率响应数据给出了一种确定PID参数稳定域的解析方法。仿真结果表明了该方法的有效性。基于该方法,还可进一步发展满足不同性能指标要求且不依赖于时滞模型的PID控制器设计方法。

## 参考文献(References):

- [1] 臧文利,王远钢,郭治,等.基于LMI的随动系统满意PID调节器设计[J].控制理论与应用,2006,23(6): 967–975.  
(ZANG Wenli, WANG Yuangang, GUO Zhi, et al. Satisfactory PID design for servo systems based on iterative LMI technique[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(6): 967 – 975.)
- [2] 欧林林,张卫东,顾诞英.一类时滞对象的PID控制器参数稳定域计算[J].控制与决策,2006,21(9): 1020 – 1023.  
(OU Linlin, ZHANG Weidong, GU Danying. Calculation of stability region of PID controllers for a class of processes with time delay[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(9): 1020 – 1023.)
- [3] PIAZZA A, VSIOLI A. A noncausal approach for PID control[J]. *Journal of Process Control*, 2006, 16(8): 831 – 843.
- [4] XIANG C, WANG Q G, LU X, et al. Stabilization of second-order unstable delay processes by simple controllers[J]. *Journal of Process Control*, 2007, 17(8): 675 – 682.
- [5] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Direct synthesis of first order controllers from frequency response measurements[C] //Proceeding of American Control Conference. New York: IEEE, 2005: 1192 – 1196.
- [6] WANG Q G, HANG C C, BI Q. A technique for frequency response identification from relay feedback[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, 7(1): 122 – 128.

## 作者简介:

林示麟 (1983—),男,硕士研究生,研究领域为PID控制,E-mail: slin40@hotmail.com;

欧林林 (1980—),女,博士,讲师,研究领域为时滞系统稳定性分析和设计,E-mail: linlinou@zjut.edu.cn;

俞立 (1961—),男,博士,教授,研究领域为网络控制系统分析与设计、鲁棒控制,E-mail: lyu@zjut.edu.cn.