第 26 卷第 4 期
2009 年 4 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 4
Apr. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)04−0455−04

基于变结构思想的OGY同步控制器

申立群[1], 王　茂[2], 刘宛予[1]

(1. 哈尔滨工业大学 电气工程及自动化学院, 黑龙江 哈尔滨 150001;

2. 哈尔滨工业大学 空间控制与惯性技术研究中心, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 为扩展混沌控制方法在混沌同步中的应用, 设计了一种基于变结构思想的Ott-Grebogi-Yorke(OGY)同步控制器. 基于变结构控制的思想, 将OGY混沌控制方法进行了扩展, 通过误差系统近似的线性模型寻找合适的稳定流形, 进而通过变结构控制器将误差系统的轨迹控制到稳定流形上面, 实现混沌系统的同步. 这种变结构控制策略使得OGY方法可以应用到混沌同步当中. Hénon映射的仿真结果验证了该控制策略的有效性.

关键词: 变结构控制; OGY 方法; 混沌同步; Hénon映射

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Ott-Grebogi-Yorke synchronization controller based on variable structure spirit

SHEN Li-qun[1], WANG Mao[2], LIU Wan-yu[1]

(1. School of Electrical Engineering and Automation,
Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China;
2. Space Control and Inertia Technology Research Center, Harbin Institute of Technology, Harbin Heilongjiang 150001, China)

Abstract: To generalize the chaos control scheme to chaos synchronization, an Ott-Grebogi-Yorke(OGY) chaos synchronization controller based on variable structure spirit is designed. The OGY chaos control method is generalized to chaos synchronization by the variable structure control scheme. A linearization of the error system between the two chaotic systems is then made. The stable manifold can also be found. By pushing the trajectory of the error system onto the stable manifold, the two chaotic systems are thus synchronized. The OGY method can be applied to chaos synchronization by this variable structure scheme. Finally, the simulation results of Hénon map verify the effectiveness of the proposed method.

Key words: variable structure control; OGY method; chaos synchronization; Hénon map

1　引言(Introduction)

混沌控制与混沌同步问题是混沌研究领域中研究最为广泛的两个课题. 自从Ott-Grebogi-Yorke(OGY)混沌控制方法[1]和Pecora-Carroll(P-C)混沌同步化方法[2]被提出以来, 混沌系统的控制问题[3~7]和同步问题[8~10]的研究得到了迅速的发展. 但是, 研究者们通常将混沌系统的控制问题和同步问题看作是两个分立的研究领域. 而事实上, 混沌系统的控制问题和同步问题具有相通之处, 已经有研究者用经典的OGY方法实现了混沌系统的同步[11].

OGY方法是最经典的混沌控制方法之一. 通过微小的参数扰动, 将系统轨迹控制到不稳定不动点的稳定流形上, 从而实现不稳定不动点的稳定化. OGY方法的主要优点之一是控制输入非常小, 不会根本性地改变混沌系统的动态特性, 是一种高效的控制方法, 很多混沌控制方法都是针对于OGY方法的扩展和提高[3~5]. 如果我们能够将OGY方法应用到混沌同步当中, 它的优点也将被保留下来.

Lai和Grebogi提出了一种基于OGY方法的同步化方法[11], 通过误差系统的线性化模型实施OGY控制. 但是他们给出的寻找稳定流形的方法非常复杂, 而且需要大量的计算[12]. 本文设计了一种基于变结构策略的OGY同步控制器, 如果系统的数学模型

收稿日期: 2007−11−22; 收修改稿日期: 2008−08−29.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60777004); 科技部国际合作项目(2007DFB30320); 黑龙江省科技攻关重点项目(2006G0223-00); 黑龙江省博士后基金项目.

已知, 可以通过解析的方法选择稳定流形, 使误差系统在原点稳定, 从而达到混沌系统的同步控制. Hénon映射的仿真结果验证了该控制策略的有效性.

2 问题描述(Problem statement)

在混沌系统的同步问题中, 我们经常考察驱动系统与响应系统之间的误差系统的动态特性. 如果能够通过施加合适的控制使误差系统在原点稳定, 驱动系统和响应系统将实现同步. 驱动系统和响应系统都是混沌系统, 本文假定误差系统也是混沌系统. 很显然, 原点是误差系统的一个不稳定不动点. 这样, 将OGY方法应用于混沌同步的条件就满足了, 这样的混沌同步控制器将具有OGY控制器的优点.

考虑如下一个混沌系统

$$\dot{x} = f(x, p_0), \tag{1}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n$, p_0是系统的参数或参数向量. 通过Poincaré截面方法[1]或其它方法将系统(1)离散化可得

$$X(k+1) = F(X(k), p_0), \tag{2}$$

其中, $X \in \mathbb{R}^m$为Poincaré截面上的延迟坐标向量或离散化之后的系统的状态向量. 方程(1)的动态特性可以由方程(2)来描述. 令方程(1)作为驱动系统, 则方程(2)为驱动系统在Poincaré截面上的动态特性. 取如下的响应系统

$$\dot{y} = f(y, p_0 + \Delta p), \tag{3}$$

其中$y \in \mathbb{R}^n$, $p_0 + \Delta p$是响应系统的参数或参数向量, Δp是需要设计的参数扰动. 使用同样的方法, 可得离散形式的响应系统如下:

$$Y(k+1) = F(Y(k), p_0 + \Delta p(k)), \tag{4}$$

其中: $Y \in \mathbb{R}^m$为Poincaré截面上的延迟坐标向量或离散化之后的系统的状态向量, $\Delta p(k)$是第k个采样点时刻的参数扰动. 通过设计合适的$\Delta p(k)$, 就可以实现混沌系统在采样点上的同步.

3 主要结果(Main results)

方程(2)减去方程(4), 可得误差系统如下:

$$\begin{aligned} E(k+1) = & F(Y(k), p_0 + \Delta p(k)) - \\ & F(X(k), p_0), \end{aligned} \tag{5}$$

其中$E(k) = Y(k) - X(k)$. 显然, $E(k+1)$将被$Y(k)$, $X(k)$, $E(k)$ 和Δp影响. 为了便于分析, 将方程(5)变换为

$$E(k+1) = H(E(k), X(k), Y(k), \Delta p(k)), \tag{6}$$

其中$H(E(k), X(k), Y(k), \Delta p(k)) = F(Y(k), p_0 + \Delta p(k)) - F(X(k), p_0)$. 由于方程(2)和方程(4)都是混沌系统, 而方程(6)是它们之间的误差系统, 本文假定方程(6)也是混沌系统. 通过OGY方法, 可以将混沌系统稳定在不动点上, 方程(6)的不动点满足

$$E_F = H(E_F, X(k), Y(k), 0), \tag{7}$$

显然, $E_F = 0$是一个不稳定不动点. 如果我们能够将方程(6)稳定在$E_F = 0$上, 方程(2)和方程(4)就实现了同步. 于是, 本文第2部分所描述的混沌同步问题就被解决了.

根据OGY方法, 下一步需要找到不稳定不动点附近的稳定流形和不稳定流形. 在OGY方法中, 稳定流形和不稳定流形可以通过不稳定不动点附近的近似线性化得到[1]. 但是在方程(7)中, 稳定流形和不稳定流形与$Y(k)$和$X(k)$相关. 这是应用OGY方法的难点.

令控制输入为$\Delta p(k)$, 在$E_F = 0$附近对方程(6)进行线性化, 可得

$$E(k+1) = M(X(k))E(k) + G(X(k))\Delta p(k). \tag{8}$$

其中

$$M(X(k)) = \frac{\partial H(0, X(k), X(k), 0)}{\partial E},$$
$$G(X(k)) = \frac{\partial H(0, X(k), X(k), 0)}{\partial p}$$

为$X(k)$的函数. 为了便于分析, 假定方程(8)中的$E(k)$ 为一个二维向量. 于是, 可以推导出$M(X(k))$的特征值:

$$\lambda_1 = g_1(X(k)), \tag{9}$$
$$\lambda_2 = g_2(X(k)), \tag{10}$$

其中, $g_1(X(k))$和$g_2(X(k))$为$X(k)$的函数. 于是, λ_1和λ_2的右特征向量和左特征向量$v_1, w_1^{\mathrm{T}}, v_2, w_2^{\mathrm{T}}$可以分别导出. 但是, 这里的稳定流形是随着$X(k)$不断变化的. 与文献[11]不同, 我们通过观察$\lambda_1$和$\lambda_2$来确定稳定流形. 因此, 这里的控制输入需要根据$\lambda_1$和$\lambda_2$ 的情况作相应变化, 我们引入如下的变结构控制策略.

如果$|\lambda_1| < 1$, 参数扰动设计如下:

$$\Delta p(k) = \frac{\lambda_2 w_2^{\mathrm{T}} E(k)}{(\lambda_2 - 1) w_2^{\mathrm{T}} G}. \tag{11}$$

如果$|\lambda_2| < 1$, 参数扰动设计如下:

$$\Delta p(k) = \frac{\lambda_1 w_1^{\mathrm{T}} E(k)}{(\lambda_1 - 1) w_1^{\mathrm{T}} G}. \tag{12}$$

当方程(8)进入到不稳定不动点$E_F = 0$的小邻域当中时, 通过合适切换方程(11)和方程(12)所示参数扰动, 就可以实现不稳定不动点$E_F = 0$的稳定化, 从而可以实现混沌系统的同步. 其它形式的OGY方法[3~5]也可以类似的应用到混沌同步中.

4 Hénon映射的同步(Synchronization of Hénon map)

Hénon映射可以描述如下:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = A - x_1^2(k) + Bx_2(k), \\ x_2(k+1) = x_1(k). \end{cases} \tag{13}$$

当$A = 1.4$, $B = 0.3$时, Hénon映射呈现混沌状态. 方程(13)在这里作为驱动系统. 响应系统描述如下:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = A + \Delta p(k) - y_1^2(k) + By_2(k), \\ y_2(k+1) = y_1(k). \end{cases} \tag{14}$$

其中$\Delta p(k)$为需要设计的参数扰动.

方程(13)减去方程(14)得到误差系统如下:

$$\begin{cases} e_1(k+1) = -e_1(k)(x_1(k) + y_1(k)) + \\ \qquad\qquad Be_2(k) + \Delta p(k), \\ e_2(k+1) = e_1(k). \end{cases} \tag{15}$$

其中$e_1(k) = y_1(k) - x_1(k), e_2(k) = y_2(k) - x_2(k)$. 根据方程(15)和方程(8), 我们可以得到:

$$M = \begin{bmatrix} -2x_1(k) & B \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$G = \frac{1}{2x_1(k) + 1 - B} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

M的特征值可以推导如下:

$$\lambda_1 = -x_1(k) + \sqrt{x_1^2(k) + B}, \tag{18}$$

$$\lambda_2 = -x_1(k) - \sqrt{x_1^2(k) + B}, \tag{19}$$

于是, 可以计算出λ_1和λ_2对应的右特征向量和左特征向量为

$$v_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_1^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\lambda_2 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ 1 \end{bmatrix}, w_2^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

观察λ_1和λ_2与$x_1(k)$之间的关系, 我们就可以找到对应不同的$x_1(k)$时的稳定流形. 图1显示了λ_1, λ_2与$x_1(k)$之间的对应关系.

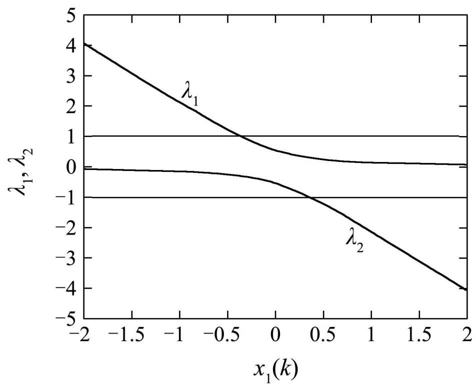

图 1　λ_1和λ_2沿$x_1(k)$的变化情况

Fig. 1　The variation of λ_1 and λ_2 along $x_1(k)$

从图1中我们可以看到, 无论$x_1(k)$位何值, 总存在$|\lambda_1| < 1$或$|\lambda_2| < 1$. 所以, 总有可以利用的稳定流形来使Hénon映射同步化.

通过上面的观察, 我们设计如下的变结构策略. 如果$x_1(k) > 0$, 选择公式(11)所示的控制策略. 否则选择公式(12)所示的控制策略. 与OGY方法相同, 只有当参数扰动小于一定值时才开启控制, 这里选择这个值为0.01. 通过这个控制策略, 方程(15)就可以被稳定在不稳定不动点$E_F = 0$上, 并且驱动系统(13)和响应系统(14)实现了同步. 仿真结果如图2所示, 图中控制器在第200次迭代后打开.

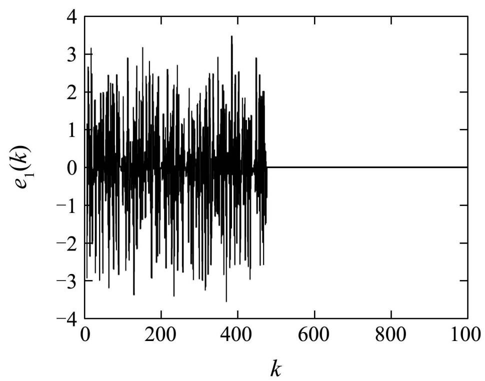

图 2　驱动系统与响应系统之间的误差响应

Fig. 2　The error response between the drive system and the response system

与OGY方法不同的是, 这里的稳定流形和不稳定流形是随着系统的运动不断变化的. 但是主要思想是一致的, 而且OGY方法的优点, 如小参数扰动及对系统动态特性影响小都被保留了下来. 图3为响应系统的控制输入. 从图中可以看出只需要很小的参数扰动就可以实现控制目的.

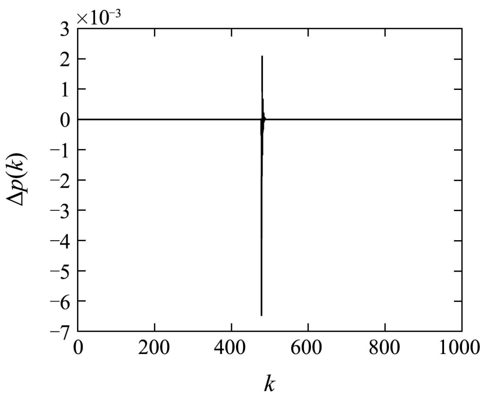

图 3　响应系统的参数扰动

Fig. 3　The parameter perturbation of the response system

5 结论(Conclusion)

基于变结构控制策略, 本文设计了一种将OGY混沌控制方法应用到混沌同步的具体方法.

该方法与OGY方法具有类似的特点, 如微小的控制输入、对系统动态特性影响小, 但是去除了稳定流形方向与不稳定流形方向必须固定的限制. 通过观察系统雅可比矩阵的特征值的变化情况, 应用合适的变结构策略, 就可以实现混沌系统的同步. Hénon映射的仿真结果验证了该控制策略的有效性.

参考文献(References):

[1] OTT E, GREBOGI C, YORKE J A. Controlling chaos[J]. *Physics Review Letters*, 1990, 64(11): 1196 – 1199.

[2] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physics Review Letters*, 1990, 64(8): 821 – 824.

[3] YU X, CHEN G, XIA Y, et al. An invariant-manifold-based method for chaos control[J]. *IEEE Transactions on Circuits Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2001, 48(8): 930 – 937.

[4] EPUREANU B I, DOWELL E H. On the optimality of the Ott-Grebogi-Yorke control scheme[J]. *Physica D*, 1998, 116(1): 1 – 7.

[5] DRESSLER U, NITSCHE G. Controlling chaos using time delay coordinate[J]. *Physics Review Letters*, 1992, 68(1): 1 – 4.

[6] DITTO W L, SPANO M L, LINDNER J F. Techniques for the control of chaos[J]. *Physica D*, 1995, 86(1/2): 198 – 211.

[7] YU X. Variable structure control approach for controlling chaos[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 1997, 8(9): 1577 – 1586.

[8] HUANG L, FENG R, WANG M. Synchronization of uncertain chaotic systems with perturbation based on variable structure control[J]. *Physics Letters A*, 2006, 350(3/4): 197 – 200.

[9] FOTSIN H B, WOAFO P. Adaptive synchronization of a modified and uncertain chaotic Van der Pol-Duffing oscillator based on parameter identification[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 24(5): 1363 – 1371.

[10] LI Z, CHEN G. Design of coupling functions for global synchronization of uncertain chaotic dynamical networks[J]. *Physics Letters A*, 2004, 326(5/6): 333 – 339.

[11] LAI Y, GREBOGI C. Synchronization of chaotic trajectories using control[J]. *Physical Review E*, 1993, 47(4): 2357 – 2360.

[12] LAI Y, DING M, GREBOGI C. Controlling Hamiltonian chaos[J]. *Physical Review E*, 1993, 47(1): 86 – 92.

作者简介:

申立群 (1979—), 男, 讲师, 主要研究混沌的控制及其同步问题以及相关的控制理论, E-mail: liqunshen@gmail.com;

王　茂 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、变结构控制和惯性技术研究;

刘宛予 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 从事图象处理与光电检测技术、生物医学工程与生物图像测量技术、现代公路自动检测技术的研究.