

传输受限情形下非线性离散系统的镇定

王隔霞¹, 汪志鸣², 郑毓蕃²

(1. 上海电力学院 数理系, 上海 200090; 2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 在信息受限条件下, 研究了一类非线性离散系统的镇定问题. 给出了为实现镇定目标而对信号传输过程中编码器和解码-控制器的具体设计以及对信道容量的要求. 采用线性矩阵不等式给出了该设计方案的一个充分条件. 同时, 在不考虑控制输入的情况下, 得出系统可检测的结论. 数值例子说明所给方法的有效性.

关键词: 网络化控制系统; 镇定; 检测; 编码; 解码

中图分类号: O231 **文献标识码:** A

Stabilization of nonlinear discrete-time systems with communication constraints

WANG Ge-xia¹, WANG Zhi-ming², ZHENG Yu-fan²

(1. Department of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China;

2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: The stabilization is studied for a class of nonlinear discrete-time systems with communication constraint. A sufficient condition for the stabilization is presented in terms of linear matrix inequalities. A stabilizing coder-decoder-controller is then developed and the requirement for the channel capacity is also derived. In addition, a corollary of the system observability is deduced for zero input. Finally, an example is given to illustrate the efficiency and feasibility of the proposed approach.

Key words: networked control systems; stabilization; detection; coder; decoder

1 引言(Introduction)

网络化控制系统近期受到广泛关注. 将网络引入到闭环控制系统中会引起许多新的控制问题, 如网络延时, 丢包和传输带宽受限等问题. 由于传输媒介自身的物理特性使得传输带宽受限这类问题更受到关注^[1~10]. 在带宽受限的传输条件下, 通过该信道传输的数据需要考虑量化误差. 量化的精度取决于信道的传输能力. 文[1~9]将量化器看成一个编码器, 将接收到的信号进行编码, 而有限的通信能力就体现在它的编码器只有有限个码字. 在这种传输方式下, 如何设计出合理的且只有有限个码字的编码方式来达到一定的控制目标是研究该问题的关键.

上述传输方式下, 文[1]研究了一类非线性连续系统的检测和镇定问题. 为了实现检测和镇定目标, 它设计了编码器和解码器, 并给出了对信道容

量的要求. 根据系统的参数, 给出了Riccati不等式来确保整个设计过程的有效性. 文[1]中结合系统参数来设计编码解码器, 并将控制器和编码解码器的设计结合起来, 这是有别于以往控制器设计的地方. 但将上述方法推广到离散系统会产生新的困难, 因为文[1]中设计的编码器和解码器利用了极限 $\hat{x}(jT-0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{x}(jT-\varepsilon)$ 的定义. 但在离散系统中此极限是没有意义的. 因此, 如何克服这一困难成了解决问题的关键. 为此, 本文在设计中添加了一个辅助系统来解决上述极限无定义的问题. 这一做法目前文献中还没有见过. 而且在证明过程中, 由于此极限无定义, 本文给出不同的证明方法. 同时, 本文给出线性矩阵不等式的条件来确保整个设计过程的有效性. 值得指出的是虽然本文只考虑镇定问题, 但当控制输入为零时, 即得系统可检测的结果.

2 问题描述及预备知识(Problem formulation and preliminaries)

考虑如下离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B\phi(k, x(k), u(k)) + B_1 u(k), \\ y(k) = Cx(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^s$ 分别是系统的状态和可测输出, $u \in \mathbb{R}^t$ 是控制输入; A , B , B_1 及 C 是给定的适维矩阵; 向量函数 $\phi(k, x(k), u(k)) \in \mathbb{R}^m$ 满足 $\phi(k, 0, 0) \equiv 0$ ($\forall k \in \mathbb{Z}^+$), 对任意的 $x_i(k) \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_i(k) \in \mathbb{R}^t$ ($i = 1, 2$) 有 Lipschitz 条件成立

$$\|\phi(k, x_1(k), u_1(k)) - \phi(k, x_2(k), u_2(k))\|_2 \leq \alpha \|x_1(k) - x_2(k)\|_2 + \beta \|u_1(k) - u_2(k)\|_2. \quad (2)$$

其中: $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 是常数, $\|\cdot\|_2$ 代表欧氏范数. 初始条件 $x(0)$ 未知, 但包含在一已知的有界集 χ_0 内.

本文考虑系统(1)在有限容量信道连接情形下的镇定问题. 如图1所示, 本文的控制模型包括两部分: 第1部分首先检测系统(1)的输出 $y(k)$ ($(j-1)p \leq k < jp$), 对其编码得到码字 $h(jp)$; 第2部分与第1部分通过远程有限容量信道相连, 并利用接收到的码字 $h(jp)$ 设计输入控制 $u(k)$ ($jp \leq k < (j+1)p$). 控制目标就是利用系统(1)的有限信息来设计镇定系统(1)的控制 $u(k)$.

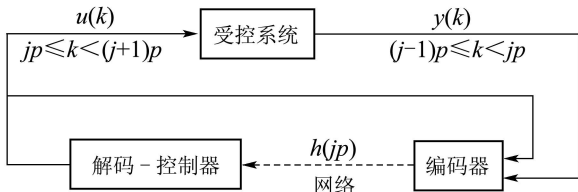


图1 传输受限下系统的镇定

Fig. 1 Stabilization of systems with limited information

要实现这种信息受限下的镇定, 必须合理地设计编码器和解码器来达到控制目的, 在本文的控制模型下, 编码器和解码-控制器分别采取如下形式:

编码器:

$$\begin{cases} a((j+1)p) = f(a(jp)), a(0) = m_0, \\ h(jp) = F_j(y(\cdot)|_0^{jp}). \end{cases} \quad (3)$$

解码-控制器:

$$\begin{cases} a((j+1)p) = f(a(jp)), a(0) = m_0, \\ u(jp+k)|_{k=0}^{p-1} = G_j(a(jp), h(p), \dots, h(jp)). \end{cases} \quad (4)$$

其中: p 是正整数; $a(jp)$ 是每隔 p 步更新一次的量化度量, 初始值为 $a(0) = m_0$; 函数 f , F_j 及 G_j 待定, $j = 1, 2, 3, \dots$.

注1 量化度量 $a(jp)$ 的作用就是使得在第 jp 步要被

编码的状态不会溢出以原点为中心的边长为 $2a(jp)$ 的超立方体. 而其更新规则 f 将会在后面具体给出.

注2 F_j 是编码映射, 它在 $k = jp$ 时将系统(1)的输出 $y(k)$ 映射到码字 $h(jp)$ ($j = 1, 2, \dots$). 注意编码映射 F_j 在每一步都是不一样的, 它依赖于量化度量 $a(jp)$ 的定义. 而码字 $h(jp)$ 是在 jp 时刻从大小为 l 的离散符号集 H 里挑选出来. 函数 G_j 利用量化度量 $a(jp)$ 和接收到的码字 $h(jp)$ 设计控制器.

定义1 状态 $x \in \mathbb{R}^n$ 的编码就是从 x 的取值空间到离散符号集 H 的映射: $h: x \rightarrow H$, 这里 $h(x)$ 表示 x 的码字.

注3 离散符号集 H 的大小是由信道的传输能力决定的. 例如当信道每次传输 ν 个字节时, H 的大小为 2^ν . 本文有限容量的传输信道就体现在离散符号集 H 的大小是有限的. 本文中不考虑噪音和时滞对信道的影响.

注4 由于离散符号集 H 只有有限个码字, 当状态限制在一个区域内时, 编码映射必定不是一一对应的, 故信息不能够实现精确的传输, 亦即信息受限.

定义2 系统(1)称为由容量为 l 的数字信道可镇定, 若存在形式为式(3)(4)的编码器和解码-控制器使得相应闭环系统的解 $x(k)$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k)\|_\infty = 0, \quad (5)$$

并称满足式(5)的式(3)(4)为镇定的编码器和解码-控制器.

下面引进状态的一致划分, 它是对状态进行编码的基础. 令 $B_a = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq a\}$, 其中 $a > 0$ 是常数. q 是一个待定的正整数. 按如下方法将 B_a 划分成 q^n 个超立方体: 对于每一个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 将 x 的第 i 个分量 x_i 按以下方式分成 q 个不交的区域:

$$\begin{cases} I_1^i(a) := \{x_i : -a \leq x_i < -a + \frac{2a}{q}\}, \\ I_2^i(a) := \{x_i : -a + \frac{2a}{q} \leq x_i < -a + \frac{4a}{q}\}, \\ \vdots \\ I_q^i(a) := \{x_i : a - \frac{2a}{q} \leq x_i < a\}, \end{cases} \quad (6)$$

则任给 $x \in B_a$, 存在唯一的一组整数 $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, q\}$ 使得 $x \in I_{i_1}^1(a) \times I_{i_2}^2(a) \times \dots \times I_{i_n}^n(a)$. 详细内容参见文献[1].

定义立方体 $I_{i_1}^1(a) \times I_{i_2}^2(a) \times \dots \times I_{i_n}^n(a)$ 的中心向量 $\eta_a(i_1, i_2, \dots, i_n)$:

$$\left[-a + \frac{(2i_1 - 1)a}{q}, -a + \frac{(2i_2 - 1)a}{q}, \dots, -a + \frac{(2i_n - 1)a}{q} \right]^T.$$

3 主要结果(Main results)

引理 1 存在常数 $\mu \geq 0$, 对系统(1)的任意两个解 $x_1(k)$ 和 $x_2(k)$ 有

$$\|x_1(k+1) - x_2(k+1)\|_\infty \leq \mu \|x_1(k) - x_2(k)\|_\infty \quad (7)$$

成立, 其中 $\mu = \|A\|_\infty + \sqrt{n}\alpha\|B\|_\infty$, $k = 1, 2, \dots$.

引理 2 如果存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times s}$ 使得下面的LMI

$$\begin{bmatrix} -P & PA - XC & PB \\ A^T P - C^T X^T & \alpha^2 I_n - P & 0 \\ B^T P & 0 & -I_m \end{bmatrix} < 0 \quad (8)$$

成立, 则存在正整数 p 及常数 c ($0 < c < 1$) 使得系统(1)的解 $x(k)$ 和系统(1)观测器的解 $\tilde{x}(k)$ 满足:

$$\|x(k+p) - \tilde{x}(k+p)\|_\infty \leq c \|x(k) - \tilde{x}(k)\|_\infty. \quad (9)$$

其中系统(1)的观测器为

$$\begin{cases} \tilde{x}(k+1) = (A - LC)\tilde{x}(k) + Ly(k) + \\ \quad B\phi(k, \tilde{x}(k), u(k)) + B_1 u(k), \\ \tilde{x}(0) = 0, L = P^{-1}X. \end{cases} \quad (10)$$

引理 3 如果存在正定矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{t \times n}$ 使得下面的LMI

$$\begin{bmatrix} -Z + BB^T & AZ + B_1 Y & 0 & 0 \\ (AZ + B_1 Y)^T & -Z & \rho_1 Z & \rho_2 Y^T \\ 0 & \rho_1 Z & -\rho_1 I_n & 0 \\ 0 & \rho_2 Y & 0 & -\rho_2 I_t \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

成立, 其中 $\rho_1 = \alpha^2 + \alpha\beta$, $\rho_2 = \beta^2 + \alpha\beta$, 则存在正整数 p_1 和常数 c_1 ($0 < c_1 < 1$), 使得系统(1)在状态反馈 $u(k) = Fx(k)$ 作用下闭环系统的解 $x(k)$ 满足

$$\|x(k+p_1)\|_\infty \leq c_1 \|x(k)\|_\infty, \quad (12)$$

其中 $F = YZ^{-1}$.

假定LMI(8)和(11)有解, 则由引理2和引理3可知取正整数 p 及常数 c ($0 < c < 1$) 使得式(9)成立; 并可取到正整数 p_1 和常数 c_1 ($0 < c_1 < 1$) 使得式(12)成立. 这里约定 $p \geq p_1$. 对于该正整数 p 及常数 c ($0 < c < 1$) 有如下的定义:

$$\begin{cases} m_0 = \sup_{x_0 \in \chi_0} \|x_0\|_\infty; a(p) = c m_0 + \mu^p m_0; \\ a(jp) = \frac{\mu^p}{q} a((j-1)p) + (c^j + \mu^p c^{j-1}) m_0, \\ j \geq 2. \end{cases} \quad (13)$$

下面给出本文的编码器和解码-控制器.

编码器 当

$$(\tilde{x}(jp) - \bar{x}(jp)) \in$$

$$I_{i_1}^1(a(jp)) \times I_{i_2}^2(a(jp)) \times \dots \times I_{i_n}^n(a(jp)) \subset B_{a(jp)}$$

时,

$$h(jp) = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}, \quad (14)$$

其中 $\bar{x}(k)$ 是以下辅助系统的解:

$$\begin{cases} \bar{x}(0) = 0; \bar{x}(k) = \hat{x}(k), k \neq jp; \\ \bar{x}(k+1) = A\bar{x}(k) + B\phi(k, \bar{x}(k), u(k)) + \\ \quad B_1 u(k), k = jp - 1. \end{cases} \quad (15)$$

解码-控制器

$$\begin{cases} \hat{x}(0) = 0; \\ \hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + B\phi(k, \hat{x}(k), u(k)) + \\ \quad B_1 u(k), k \neq jp - 1; \\ \hat{x}(jp) = \bar{x}(jp) + \eta_{a(jp)}(i_1, i_2, \dots, i_n); \\ u(k) = F\hat{x}(k). \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\eta_{a(jp)}(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 是立方体 $I_{i_1}^1(a(jp)) \times I_{i_2}^2(a(jp)) \times \dots \times I_{i_n}^n(a(jp))$ 的中心向量.

注 5 方程(13) (15)和(16)同时为编码器和解码-控制器的一部分.

注 6 每隔 p 步系统(16)的状态会被接收到的信息更新一次, 而辅助系统(15)的作用就是用来存储系统(16)的旧值. 这一做法克服了极限 $\hat{x}(jT - 0)$ 在离散情况下无定义困难, 它在以往文献中很少见.

定理 1 假定存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times s}$ 使得LMI(8)成立, 并且存在正定矩阵 $Z \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $Y \in \mathbb{R}^{t \times n}$ 使得LMI(11)成立. 相应可取正整数 p 及常数 c ($0 < c < 1$) 使得式(9)成立和正整数 p_1 和常数 c_1 ($0 < c_1 < 1$) 使得式(12)成立. 并且 $p \geq p_1$. 则对于此正整数 p 及常数 c ($0 < c < 1$), 当 $q > \mu^p$ 成立时, 对于任意的初始值 $x_0 \in \chi_0$, 上述定义的编码器和解码-控制器(13)~(16)渐近镇定系统(1).

从定理1的证明可以看出, 当控制输入 $u(k) \equiv 0$ 时, 本文设计的编码器和解码-控制器能够渐近检测系统(1)的状态.

推论 1 假定存在正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 和矩阵 $X \in \mathbb{R}^{n \times s}$ 使得LMI(8)成立. 相应的可取正整数 p 及常数 c ($0 < c < 1$) 使得式(9)成立. 同时令控制输入 $u(k) \equiv 0$. 则对于该正整数 p 及常数 c ($0 < c < 1$), 当 $q > \mu^p$ 成立时, 对于任意的初始值 $x_0 \in \chi_0$, 系统(1)的解 $x(k)$ 满足

$$\|x(k) - \hat{x}(k)\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty,$$

其中 $\hat{x}(k)$ 是系统(16)的解.

4 数值例子(Simulations)

考察系统(1), 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.4 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -2.8 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$C = [1 \ 1], \phi = 0.12 \begin{bmatrix} \sin(x_1(k)) + \sin(u(k)) \\ e^{-k} \sin(x_2(k)) \end{bmatrix}.$$

易知非线性项 $\phi(k, x(k), u(k))$ 满足Lipstchiz条件(2), 其中参数 $\alpha = \beta = 0.12$. 用MATLAB软件的LMI工具箱可以求出LMI(8)和(11)的解(略), 并可取得参数如下: 当 $p = p_1 = 6$ 时,

$$c = 0.7456, \mu = 1.5697, c_1 = 0.8649.$$

因 $\mu^p = 14.9592$, 故依据定理可选取 $q = 21 > \mu^p$.

在本文给出的解密器和解密-控制器(13)~(16)的作用下闭环系统(17)的状态响应参见图2; 图3给出了镇定传输过程中的码字.

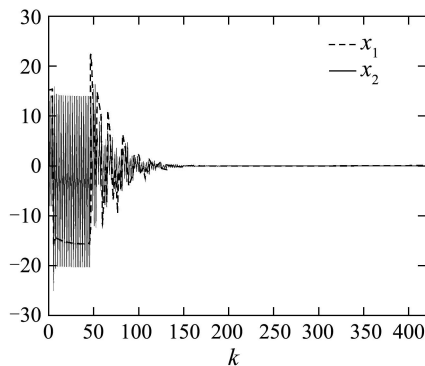


图2 闭环系统(17)的状态响应

Fig. 2 Response of the closed-loop(17)

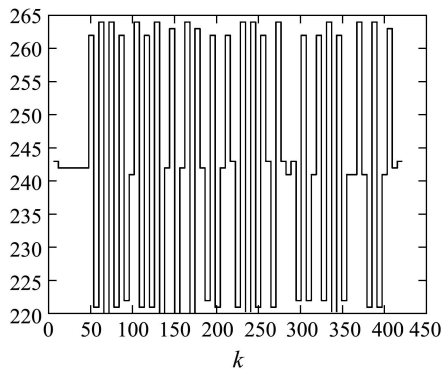


图3 镇定传输过程中的码字

Fig. 3 The codewords

参考文献(References):

- [1] SAVKIN A. Detectability and output feedback stabilizability of nonlinear networked control systems[C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain: [s.n.], 2005: 8174 – 8178.
- [2] PHAT V, JIANG J, SAVKIN A, et al. Robust stabilization of linear uncertain discrete-time systems via a limited capacity communication channel[J]. *System & Control Letters*, 2004, 53(5): 347 – 360.
- [3] SAVKIN A, PETERSON I. Set-valued state estimation via a limited capacity communication channel[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(4): 676 – 680.
- [4] LIBERZON D. Hybrid feedback stabilization of systems with quantized signals[J]. *Automatica*, 2003, 39(9): 1543 – 1554.
- [5] BROCKETT R, LIBERZON D. Quantized feedback of linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(7): 1279 – 1289.
- [6] LIBERZON D. On stabilization of linear systems with limited information[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(2): 304 – 307.
- [7] LIBERZON D, HESPAH J. Stabilization of nonlinear systems with limited information feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 910 – 915.
- [8] WONG W, BROCKETT R. Systems with finite communication bandwidth constraints-I: State estimation problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(9): 1294 – 1299.
- [9] WONG W, BROCKETT R. Systems with finite communication bandwidth constraints-II: State stabilization with limited information feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(5): 1049 – 1053.
- [10] ISHII H, FRANCIS B. *Limited Data Rate in Control Systems with Networks*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.

附录 主要结果的证明(Appendix Proof of main results)

引理2的证明:

令 $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$. 则

$$e(k+1) = \begin{bmatrix} A_C & B \end{bmatrix} \begin{pmatrix} e(k) \\ \Delta\phi(k) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$A_C = A - LC,$$

$$\Delta\phi(k) = \phi(k, x(k), u(k)) - \phi(k, \hat{x}(k), u(k)).$$

构造Lyapunov函数 $V(e(k)) = (e(k))^T P e(k)$, 则结合Lipstchiz 条件(2)易知 $V(e(k))$ 沿着系统(18)的差分满足

$$\Delta V(e(k)) \leq \begin{pmatrix} e(k) \\ \Delta\phi(k) \end{pmatrix}^T \Omega \begin{pmatrix} e(k) \\ \Delta\phi(k) \end{pmatrix}. \quad (19)$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_C & B \end{bmatrix}^T P \begin{bmatrix} A_C & B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha^2 I_n - P & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}. \quad (20)$$

由Schur补定理知, $\Omega < 0$ 等价于

$$\begin{bmatrix} -P & PA - PLC & PB \\ (PA - PLC)^T & \alpha^2 I_n - P & 0 \\ (PB)^T & 0 & -I_m \end{bmatrix} < 0. \quad (21)$$

令 $L = P^{-1}X$, 则不等式(8)确保(21)成立. 因此, $\lambda_{\max}(\Omega) < 0$ 和 $\Delta V(e(k)) \leq \lambda_{\max}(\Omega) \|e(k)\|_2^2$.

由 $\lambda_{\max}(\Omega) < 0$, 故可以取到充分小的正数 $\delta_1 > 0$ 使得下面两式同时成立

$$\lambda_{\max}(\Omega) \leq -\delta_1 < 0, \quad 0 < 1 - \frac{\delta_1}{\lambda_{\max}(P)} < 1. \quad (22)$$

进而, $\Delta V(e(k)) \leq -\delta_1 \|e(k)\|_2^2 \leq -\frac{\delta_1}{\lambda_{\max}(P)} V(e(k))$. 由此可得

$$\|e(k+p)\|_\infty \leq \sqrt[n]{n \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \left(1 - \frac{\delta_1}{\lambda_{\max}(P)}\right)^p} \|e(k)\|_\infty,$$

由式(22)知, 可取到正整数 $p \geq 1$ 使得

$$0 < c = \sqrt[n]{n \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \left(1 - \frac{\delta_1}{\lambda_{\max}(P)}\right)^p} < 1. \quad (23)$$

则对上面选取的 p 不等式(9)成立. 证毕.

注7 引理2的证明中用到了两种范数 $\|\cdot\|_2$ 和 $\|\cdot\|_\infty$. 由于证明过程中利用了二次型的Lyapunov函数, 故得到的结论与 $\|\cdot\|_2$ 有关, 但是另一方面, 状态的一致划分是依据 $\|\cdot\|_\infty$ 定义的, 关于 $\|\cdot\|_2$ 的结论最终需转化到 $\|\cdot\|_\infty$.

注8 引理3的证明与引理2类似可得, 略.

定理1的证明:

首先证明

$$\|\tilde{x}(jp) - \bar{x}(jp)\|_\infty \leq a(jp), \quad j = 1, 2, \dots \quad (24)$$

成立.

由引理1的式(7)和引理2的式(9)知

$$\begin{aligned} \|\tilde{x}(p) - \bar{x}(p)\|_\infty &\leq \\ \|\tilde{x}(p) - x(p)\|_\infty + \|x(p) - \bar{x}(p)\|_\infty &\leq \\ cm_0 + \mu^p m_0 &= a(p). \end{aligned}$$

所以, 当 $j = 1$ 时式(24)成立. 假设式(24)在第 j 步时成立, 求证第 $j+1$ 步时仍成立. 事实上,

$$\begin{aligned} \|x((j+1)p) - \bar{x}((j+1)p)\|_\infty &\leq \\ \mu \|x((j+1)p-1) - \bar{x}((j+1)p-1)\|_\infty &= \\ \mu \|x((j+1)p-1) - \hat{x}((j+1)p-1)\|_\infty &\leq \\ \mu^2 \|x((j+1)p-2) - \hat{x}((j+1)p-2)\|_\infty &\leq \\ \vdots & \\ \mu^p \|x(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty &= \\ \|\tilde{x}((j+1)p) - \bar{x}((j+1)p)\|_\infty &\leq \\ c^{j+1} m_0 + \mu^p \|x(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty &\leq \\ c^{j+1} m_0 + \mu^p \|x(jp) - \tilde{x}(jp)\|_\infty + \mu^p \|\tilde{x}(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty &\leq \\ c^{j+1} m_0 + \mu^p c^j m_0 + \mu^p \|\tilde{x}(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty. & \quad (25) \end{aligned}$$

又由归纳假设及式(16)知, $\tilde{x}(jp) - \bar{x}(jp)$ 和 $\hat{x}(jp) - \bar{x}(jp) = \eta_{a(jp)}(i_1, i_2, \dots, i_n)$ 同在 $B_{a(jp)}$ 的一个立方体内, 故

$$\|\tilde{x}(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty \leq \frac{a(jp)}{q}. \quad (26)$$

故由式(25)和(26)知 $\|\tilde{x}((j+1)p) - \bar{x}((j+1)p)\|_\infty \leq a((j+1)p)$. 由数学归纳法知不等式(24)对于 $j = 1, 2, \dots$ 成立.

其次证明

$$\|x(k) - \hat{x}(k)\|_\infty \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (27)$$

由于 $\tilde{x}(jp) - \bar{x}(jp)$ 和 $\hat{x}(jp) - \bar{x}(jp)$ 同在 $B_{a(jp)}$ 的一个小立方体内及(9)知

$$\begin{aligned} \|x(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty &\leq \\ \|x(jp) - \tilde{x}(jp)\|_\infty + \|\tilde{x}(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty &\leq \\ c^j m_0 + \frac{a(jp)}{q}. \end{aligned}$$

由 $q > \mu^p$ 及 $0 < c < 1$ 知

$$\|x(jp) - \hat{x}(jp)\|_\infty \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \quad (28)$$

对于任意 $k \in \{p, p+1, \dots\}$, 存在正整数 j_0 使得 $j_0 p \leq k < (j_0+1)p$. 由引理1知

$$\|x(k) - \hat{x}(k)\|_\infty \leq \mu^{k-j_0 p} \|x(j_0 p) - \hat{x}(j_0 p)\|_\infty \leq \max_{i \in \{0, 1, \dots, p-1\}} \{\mu^i\} \|x(j_0 p) - \hat{x}(j_0 p)\|_\infty.$$

由上式和式(28)知式(27)成立.

最后证明

$$\|\hat{x}(k)\|_\infty \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (29)$$

因为 $\|\eta_{a(jp)}(i_1, i_2, \dots, i_n)\|_\infty \leq \frac{(q-1)a(jp)}{q} \leq a(jp)$, $j \in \mathbb{Z}^+$. 故由式(16)中的第3个式子知

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(jp+p)\|_\infty &\leq \\ \|\tilde{x}(jp+p)\|_\infty + \|\eta_{a((j+1)p)}(i_1, i_2, \dots, i_n)\|_\infty &\leq \\ c_1 \|\hat{x}(jp)\|_\infty + a((j+1)p). \end{aligned}$$

迭代可得

$$\|\hat{x}(jp+p)\|_\infty \leq c_1^j \|\hat{x}(p)\|_\infty + \sum_{i=1}^j c_1^{j-i} a((i+1)p). \quad (30)$$

假定 $v = \frac{\mu^p}{q}$ 和 $c \neq c_1, c \neq v$. 由式(13)中 $a(jp)$ 的定义并知

$$a(jp) = va((j-1)p) + c^{j-1} a(p),$$

进而迭代可知

$$a(jp) = \frac{v^j - c^j}{v - c} a(p). \quad (31)$$

将式(31)代入式(30)并计算可得

$$\begin{aligned} \|\hat{x}(jp+p)\|_\infty &\leq \\ c_1^j \|\hat{x}(p)\|_\infty + v^2 \frac{v^j - c_1^j}{v - c_1} + c^2 \frac{c_1^j - c^j}{c_1 - c}. \end{aligned} \quad (32)$$

因为 $q > \mu^p$ 和 $0 < c, c_1 < 1$, 所以由式(32)知

$$\|\hat{x}(jp)\|_\infty \rightarrow 0, j \rightarrow \infty. \quad (33)$$

由引理3知在状态反馈 $u(k) = Fx(k)$ 作用下闭环系统(1)的解 $x(k)$ 满足

$$\|x(k)\|_\infty \leq \sqrt{n \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \left(1 - \frac{\delta_2}{\lambda_{\max}(Q)}\right)} \|x(jp)\|_\infty, \\ jp < k < (j+1)p. \quad (34)$$

注意系统(16)除掉在 $k = jp$ 时刻有一次跳跃, 在 $jp < k < (j+1)p$ 时间段上是以状态反馈 $u(k) = F\hat{x}(k)$ 构成的闭环系统运行的. 所以上述不等式(34)对于系统(16)在 $jp < k < (j+1)p$ 时间段上仍成立. 也即:

$$\|\hat{x}(k)\|_\infty \leq \sqrt{n \frac{\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \left(1 - \frac{\delta_2}{\lambda_{\max}(Q)}\right)} \|\hat{x}(jp)\|_\infty. \quad (35)$$

从式(33)和式(35)可知式(29)是正确的.

由式(27)和式(29)知

$$\|x(k)\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (36)$$

这说明编码器和解码-控制器(13)~(16)渐近镇定系统(1). 证毕.

作者简介:

王隔霞 (1981—), 女, 2008年毕业于华东师范大学数学系系统理论专业, 上海电力学院数理系讲师, 研究方向为网络化控制系统、非线性控制系统及奇摄动控制系统, E-mail: gxwang_2004@163.com;

汪志鸣 (1953—), 男, 华东师范大学数学系博士, 副教授, 研究方向为网络化控制系统、非线性控制系统及奇摄动控制系统, E-mail: zmwang@math.ecnu.edu.cn;

郑毓蕃 (1941—), 男, 华东师范大学数学系教授, 主要研究方向为网络化控制系统的分析与设计、复杂系统稳定性分析和控制器的设计, E-mail: yfzheng@math.ecnu.edu.cn.