文章编号: 1000−8152(2009)05−0487−07

一种新的多输入非线性控制系统线性化的计算方法

张 健, 李春光, 徐红兵

(电子科技大学 自动化工程学院, 四川 成都 610054)

摘要: 通常, 即使对于一个可逼近反馈线性化的非线性系统, 求得一个所需的坐标变换和反馈仍然是困难的, 原因在于需要求解一组偏微分方程. 在本文中, 为了求得逼近反馈线性化所需的非线性反馈及坐标变换, 首先引入了一个扩展的坐标空间, 针对一类线性可控的多输入非线性系统, 推导了系统新的矩阵表达式. 然后, 提出了一种新的有效的构造化算法, 它降低了计算所需的运算量. 最后通过一个例子介绍了本方法的应用.

关键词: 逼近线性化; 多输入; 非线性控制系统

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

A new algorithm for computing the linearization of multiple-input nonlinear control systems

ZHANG Jian, LI Chun-guang, XU Hong-bing

(School of Automation Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu Sichuan 610054, China)

Abstract: In practice, it is difficult to determine a coordinate transformation and a feedback for the linear approximation of a nonlinear system, even though the system is approximately feedback-linearizable. The reason is that it is necessary to solve a set of partial differential equations. An extended coordinate space is firstly introduced. A new matrix presentation is then presented for a general form of linearly controllable multiple-input nonlinear systems. Based on these preparations, we develop an effective constructive algorithm procedure with reduced computation for obtaining a coordinate transformation and the feedback. Finally a dynamic feedback-linearizable system is given as an example to illustrate the application.

Key words: approximate linearization; muti-input; nonlinear control systems

1 引言(Introduction)

反馈线性化是非线性控制理论中常用的方法. 基于微分几何的非线性控制理论为精确线性化设计提供了强有力的工具[1,2]. 然而, 它需要系统满足确定的结构和条件, 例如对合、相对阶等, 并且需要精确地对消非线性项. 因此, 一些研究者提出了几种通过坐标变换和非线性反馈近似线性化非线性系统的方法. 这些方法不是精确的线性化, 但却比精确线性化适用于更多的系统. 这方面的研究包括高阶逼近线性化、伪线性化、扩展线性化等. 文献[3]提供了一个逼近线性化方法的综述.

美国学者Krener首次提出了高阶逼近反馈线性化方法[4]. 通过坐标变换和非线性反馈, 一个非线性系统可以被线性化到预定的阶次. 在这种方法中, 如何得到一个合适的坐标变换和非线性反馈是非常关键的, 它需要求解一组被称为“Generalized homological equations”的偏微分方程. 在文献[5]中, 一个方程求解的框架被提出, 文献[6]将问题简化到求解一组代数方程, 当该方程组无精确解时, 给出了一种以最小二乘解近似替代的策略. 此后, 许多符号或数值的求解算法被广泛研究[7~10]. 文献[11, 12]讨论了单输入非线性系统的逼近线性化, 一个嵌入的状态空间被引入, 并推导了一个矩阵形式的代数方程组. 通过计算矩阵方程组的解, 可以求得所需的非线性反馈和坐标变换.

与高阶逼近线性化相关的一个问题是自治非线性系统的范式理论. 许多研究者提出了大量的计算范式的方法, 如李括号法、内积法、基于$\mathrm{sl}_2(R)$表示理论的方法等. 文献[13, 14]提出了一种新的自治非线性系统的范式, 它改善了传统范式, 给出了基于Carleman线性化方法的求解程序.

本文将讨论多输入线性可控非线性系统的高阶逼近线性化问题. 首先, 引入一个扩展状态空间, 在该空间中推导了系统新的表达式. 接下来, 提出了一

收稿日期: 2008−03−25; 收修改稿日期: 2008−09−01.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60502009, 60804015).

种构造化的算法, 它大大减少了逼近线性化该系统所需求解的多项式系数的个数, 降低了运算量. 需要指出的是, 除了所引入的扩展状态空间类似外, 本文与文献[11, 12]在研究对象、主要思想、算法细节等方面都是完全不同的.

2 预备知识(Preliminaries)

考虑如下形式的仿射非线性系统:

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^{r} g_i(x)u_i. \tag{1}$$

这里: $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x), g_i(x)$是充分光滑的函数. 不失一般性, 当$u_i = 0(1 \leqslant i \leqslant r)$时假设$x = 0$是系统的一个平衡点, 即$f(0) = 0$. 将上述系统在原点附近作泰勒级数展开至$k$阶, 得到

$$\dot{x} = Ax + Bu + f^{[2]}(x) + \sum_{i=1}^{r} g_i^{[1]}(x)u_i + \cdots + f^{[k]}(x) + \sum_{i=1}^{r} g_i^{[k-1]}(x)u_i + \mathrm{O}^{[k]}(x,u), \tag{2}$$

其中: $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0), B = g(0)$.

下面, 将文献[15]中线性可控非线性系统的定义由单输入系统推广到多输入非线性系统.

定义 1 如果式(2)中线性部分(A, B)是可控的, 那么称多输入非线性系统(1)是线性可控的.

在本文中, 总是假设多输入非线性系统是线性可控的. 由线性系统理论, 给出如下引理.

引理 1 对于完全能控的多输入线性定常系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

设其满足rank $B = r$, 则可以找到一个线性非奇异变换$\hat{x} = Tx$将上述系统变换为下述形式:

$$\dot{\hat{x}} = A_c\hat{x} + B_cu, \tag{3}$$

其中:

$$A_c = \begin{bmatrix} A_{11} \cdots A_{1r} \\ \vdots \quad\quad \vdots \\ A_{r1} \cdots A_{rr} \end{bmatrix}_{(n\times n)}, B_c = \begin{bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_r \end{bmatrix}_{(n\times r)},$$

$$A_{ii} = \begin{bmatrix} 0\,1 & & \\ \vdots & \ddots & \\ 0\,0 \cdots 1 \\ *\,* \cdots * \end{bmatrix}_{(\mu_i\times\mu_i)}, A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 \\ \vdots \quad \vdots \\ 0 \cdots 0 \\ * \cdots * \end{bmatrix}_{(\mu_i\times\mu_j)}, i \neq j,$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \ \cdots \ 0\,0 \cdots 0 \\ \vdots \quad\quad \vdots\,\vdots \quad \vdots \\ 0 \ \cdots \ 0\,0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0\,1\,* \cdots * \end{bmatrix}_{(\mu_i\times r)}, i, j = 1, \cdots, r.$$

上式中$*$表示可能的非零元, $\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r\}$构成系统的能控型指数集, 满足$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r = n$. 这里, 引入一个新的变量$\sigma_i = \sum\limits_{j=0}^{i} \mu_j$. 易知$\sigma_r = n$, 特别的令$\sigma_0 = 0$.

由上述引理得到, 对于线性可控的多输入非线性系统, 总存在一个非奇异变换, 使得系统(2)变换为

$$\dot{\hat{x}} = A_c\hat{x} + B_cu + \hat{f}^{[2]}(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{r} \hat{g}_i^{[1]}(\hat{x})u_i + \cdots + \hat{f}^{[k]}(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{r} \hat{g}_i^{[k-1]}(\hat{x})u_i + \mathrm{O}^{[k]}(\hat{x}, u). \tag{4}$$

因此, 在下文中, 把系统(4)作为讨论对象. 为了符号上的简便, 仍然将上述系统简写为式(2).

注 1 如下文所述, 能够利用系数矩阵A_c的特殊形式构造一个迭代程序, 从而降低运算量.

一个k阶逼近反馈线性化问题可以归结为在$x = 0$的邻域内寻找一个坐标变换

$$z = \psi(x), \psi(0) = 0 \tag{5}$$

和一个状态反馈

$$u = \alpha(x) + \beta(x)v, \ \ \beta(0) \neq 0, \tag{6}$$

使得非线性系统在z坐标系下是k阶线性的, 即具有如下形式:

$$\dot{z} = Az + Bv + \mathrm{O}^{[k+1]}(z, v), k > 1, \tag{7}$$

这里$\alpha(x)$为定义在$x = 0$邻域内的r维多项式列向量, $\beta(x)$为r维多项式方阵.

接下来将回顾一些有用的定义和结果[13,16].

性质[13,16] 定义$H_n^k(k \geqslant 2)$为变量$x_1, \cdots, x_n$的k次齐次多项式空间. 那么H_n^k的维数为

$$d_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}, k \geqslant 2,\ n \geqslant 1. \tag{8}$$

将集合$\{x_1^{q_1} \cdots x_n^{q_n} : q_1 + \cdots + q_n = k\}$中的元素分成两个子集$X_k^1, X_k^2$. 子集$X_k^1$中的元素不含有因子$x_{\sigma_i}\ (1 \leqslant i \leqslant r)$. 那么, 由式(8)知, X_k^1中共有$d_{n-r}^k = C_{n+k-r-1}^k$个元素, 而$X_k^2$由含有因子$x_{\sigma_i}(1 \leqslant i \leqslant r)$的所有元素构成, 因此共有$C_{n+k-1}^k - C_{n+k-r-1}^k$个元素. 把两个子集中的元素都按照$x_1 < x_2 < \cdots < x_n$的顺序进行排列, 之后将两个子集中的元素进行组合, 作为H_n^k中的一个基.

例 当$n = 4, r = 2, k = 2, \sigma_1 = 3, \sigma_2 = 4$时, 有

$$X_2^1 = [x_1^2\ \ x_1x_2\ \ x_2^2],$$
$$X_2^2 = [x_1x_3\ \ x_2x_3\ \ x_3^2\ \ x_1x_4x_2x_4\ \ x_3x_4\ \ x_4^2],$$

则$X_2 = [X_2^1\ \ X_2^2]^{\mathrm{T}}$为$H_4^2$的一个基.

接下来, 定义一个导算子$D\phi = \langle F, \nabla\phi\rangle$, 这里$\nabla\phi$为$\phi$的导数, $F(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))^{\mathrm{T}}$是一个由不包含常数项的幂级数构成的向量. 通过一个递归的运算, 可以得到

$$DX_i = \sum_{j\geqslant i} D_{ij}X_j \ \ i \geqslant 1.$$

令$H_n^{[1,2,\cdots,\infty]} = H_n^1 \oplus H_n^2 \oplus \cdots$, 那么$D$是一个由$H_n^{[1,2,\cdots,\infty]}$到$H_n^{[1,2,\cdots,\infty]}$的线性映射. 基于上面的结果, 引入一个矩阵表达

$$DX = T_X(D)X,$$

这里$X = (X_1, X_2, X_3, \cdots)^{\mathrm{T}}$是$H_n^{[1,2,\cdots,\infty]}$的一个基, $T_X(D)$ 是一个如下所示的上三角形式的矩阵:

$$T_X(D) = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & \cdots \\ & D_{22} & D_{23} & \cdots \\ & & D_{33} & \cdots \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

其中$D_{ij}(i \leqslant j)$是一个$d_n^i \times d_n^j$维的方阵.

基于上面的准备, 最后推导系统(4)在扩展空间中新的表达式. 假设已经完成了系统(1)的$k-1$阶逼近反馈线性化, 相应的表达式为

$$\dot{x} = Ax + Bu + \mathrm{O}^{[k]}(x,u), k = 2, 3, \cdots. \quad (9)$$

取$H_n^{[1,k]} = H_n^1 \oplus H_n^k$, 并把$X^{[1,k]} = (X_1, X_k)^{\mathrm{T}}$ 作为一个基. 那么在新的扩展空间中, 能够得到下面的表达式:

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & D_{1k} \\ 0 & D_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} G_{k1}(X_1) \\ G_{k2}(X_1) \end{bmatrix} u + \mathrm{O}^{[k+1]}(X_1, u). \quad (10)$$

这里: D_{1k}, D_{kk}分别是$n \times d_n^k$维和$d_n^k \times d_n^k$维常矩阵, $G_{k1}(X_1), G_{k2}(X_1)$分别是由$k-1$次多项式构成的$n \times r$和$d_n^k \times r$维矩阵. 其中, 矩阵D_{kk}以及$G_{k1}(X_1)$, $G_{k2}(X_1)$都可由链式求导法则求出.

假设所求的坐标变换为

$$z = x - \psi^{[k]}(x), \quad (11)$$

这里$\psi^{[k]}(x)$是一个k次多项式向量. 在新的扩展空间中, 该变换可以被重新写为

$$\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -P_k \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_k \end{bmatrix}, \quad (12)$$

这里I是适当维数的单位矩阵.

3 主要结果(Main results)

基于上一节的准备, 给出本文的主要结果.

定理 1　如果存在一个适当的坐标变换(11)(或一个合适的矩阵P_k), 以致于以下两个矩阵中只可能第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$行为非零向量

$$\begin{aligned} M_k &= AP_k - P_kD_{kk} + D_{1k}, \\ N_k &= G_{k1}(X_1) - P_kG_{k2}(X_1), \end{aligned} \quad (13)$$

那么系统是k阶可线性化的. 即总存在状态反馈

$$u = v + \alpha^{[k]}(x) + \beta^{[k-1]}(x)v, \quad (14)$$

可以k阶逼近线性化式(9). 这里$\alpha^{[k]}(x)$和$\beta^{[k-1]}(x)$分别为$\alpha(x), \beta(x)$展开式中的第k次和$k-1$次项. 进一步的, 如果被找到的矩阵P_k还能够使得M_k和N_k的第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$行也为零向量, 那么仅仅通过坐标变换(11)就能获得系统(9)的k阶逼近线性化, 而不需要反馈(14).

证　注意到

$$\begin{bmatrix} I & -P_k \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & P_k \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

在Z坐标系中, 对式(12)求导得

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -P_k \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D_{1k} \\ 0 & D_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & P_k \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I & -P_k \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{k1}(X_1) \\ G_{k2}(X_1) \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} I & -P_k \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \mathrm{O}^{[k+1]}(Z_1, u).$$

上式整理得

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AP_k - P_kD_{kk} + D_{1k} \\ 0 & D_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} G_{k1}(X_1) - P_kG_{k2}(X_1) \\ G_{k2}(X_1) \end{bmatrix} u + \mathrm{O}^{[k+1]}(Z_1, u).$$

接下来, 考察下面的子系统

$$\dot{Z}_1 = AZ_1 + M_kZ_k + Bu + N_ku + \mathrm{O}^{[k+1]}(Z_1, u).$$

引入反馈式(14)到上式中, 可以得到

$$\dot{Z}_1 = AZ_1 + M_kZ_k + B(v + \alpha^{[k]}(x) + \beta^{[k-1]}(x)v) + N_kv + \mathrm{O}^{[k+1]}(Z_1, v). \quad (15)$$

回顾式(3), 可知在B矩阵中, 仅仅第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$行为非零行向量, 即在$B$中有$r$个非零行向量, 又由于矩阵$B$的秩为$r$, 因此上述$r$个非零向量必定是线性无关的. 从$B$中取出这$r$个线性无关的向量构成一个$r$维方阵$B_s$, 即有

$$B_s = [b_{\sigma_1}^{\mathrm{T}}, b_{\sigma_2}^{\mathrm{T}}, \cdots, b_{\sigma_r}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

其中b_{σ_i}为矩阵B的第σ_i行向量. 如果一个满足定理条件的P_k能够找到, 那么M_k, N_k中只有第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$ 行可能为非零向量. 与上类似, 分别从M_k, N_k中取出这r个非零行向量构成r维方阵M_k^s和N_k^s, 即有

$$\begin{aligned}M_k^s &= [(m_k^{\sigma_1})^{\mathrm{T}}, (m_k^{\sigma_2})^{\mathrm{T}}, \cdots, (m_k^{\sigma_r})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\ N_k^s &= [(n_k^{\sigma_1})^{\mathrm{T}}, (n_k^{\sigma_2})^{\mathrm{T}}, \cdots, (n_k^{\sigma_r})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}.\end{aligned}$$

其中$m_k^{\sigma_i}, n^{\sigma_i}(1 \leqslant i \leqslant r)$为矩阵$M_k$和$N_k$的第$\sigma_i$行向量.

由式(15)可以看到, 如果下面的等式

$$\begin{aligned}&M_k Z_k + B\alpha^{[k]}(x) = 0,\\ &B\beta^{[k-1]}(x) + N_k = 0\end{aligned} \tag{16}$$

成立, 那么式(15)将变为

$$\dot{Z}_1 = AZ_1 + Bv + \mathrm{O}^{[k+1]}(Z_1, v). \tag{17}$$

由上面的分析知, 在定理条件满足的情况下, B, M_k, N_k3个矩阵除第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$行向量之外, 其余行向量皆为零向量. 又由式(12)知$X_k = Z_k$, 因此等式(16)降低为

$$\begin{aligned}&M_k^s X_k + B_s\alpha^{[k]}(x) = 0,\\ &B_s\beta^{[k-1]}(x) + N_k^s = 0.\end{aligned} \tag{18}$$

因为矩阵B_s是由r个线性无关的行向量构成, 因此B_s为非奇异方阵, 所以矩阵B_s是可逆的. 那么由式(18)可以解出

$$\begin{aligned}\alpha^{[k]}(x) &= -B_s^{-1}M_k^s X_k,\\ \beta^{[k-1]}(x) &= -B_s^{-1}N_k^s.\end{aligned} \tag{19}$$

这样, 通过坐标变换

$$Z_1 = X_1 - P_k X_k, \tag{20}$$

及非线性反馈

$$u = v - B_s^{-1}M_k^s X_k - B_s^{-1}N_k^s v, \tag{21}$$

获得了系统(9)的k阶逼近线性化.

证毕.

注 2 由上面的证明过程, 可知一旦矩阵P_k找到, 那么状态反馈将可由式(19)和(21)确定, 所以如何找到P_k将是非常重要的.

接下来, 将讨论如何求解P_k的问题.

定理 2 使得式(13)中M_k仅仅第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$行为非零向量的$n \times d_n^k$维矩阵$P_k$总是存在的, 并且该矩阵中的每个元素都可由$r \times d_n^k$个变量表达.

证 首先考虑$M_k = AP_k - P_k D_{kk} + D_{1k}$的前$\sigma_1$行. 由式(3)有系数矩阵$A$的前$\sigma_1$行为:

$$A_1 = [A_{11}, \cdots, A_{1r}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ * & * & \cdots & * & \cdots & \cdots & * \end{bmatrix}.$$

分别用p_k^i, D_{1k}^i, m_k^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$定义矩阵$P_k, D_{1k}$, M_k的第i行, 取p_k^1作为一个初始变量. 那么p_k^1包含有d_n^k个变量. 把它代入到M_k的表达式中, 得到

$$m_k^1 = p_k^2 - p_k^1 D_{kk} + D_{1k}^1.$$

如果选择

$$p_k^2 = p_k^1 D_{kk} - D_{1k}^1,$$

那么有$m_k^1 = 0$. 类似的, 继续递推, 如果选择

$$p_k^j = p_k^{j-1}D_{kk} - D_{1k}^{j-1}, 2 \leqslant j \leqslant \sigma_1, \tag{22}$$

那么有$m_k^{i-1} = 0$ $(2 \leqslant i \leqslant \sigma_1)$. 这样通过一个递推算法, 确定了$P_k$的前$\sigma_1$行, 它使得$M_k$的前$\sigma_1 - 1$行为零.

与A_1的定义相似, 可以继续定义$A_2, A_3, \cdots, A_r$, 然后分别取$p_{\sigma_{i-1}+1}$, $(1 \leqslant i \leqslant r)$ 作为初始变量, 将有与式(22)类似的递推式

$$\begin{aligned}&p_k^j = p_k^{j-1}D_{kk} - D_{1k}^{j-1},\\ &\quad 1 \leqslant i \leqslant r, \sigma_{i-1} + 2 \leqslant j \leqslant \sigma_i.\end{aligned} \tag{23}$$

这样, 可以确定P_k的每一行. 当P_k确定后, 可以由下面的式子计算出的M_k矩阵中第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$行非零向量

$$m_k^{\sigma_i} = \bar{a}_{\sigma_i}P_k - p_k^{\sigma_i}D_{kk} + D_{1k}^{\sigma_i}.$$

这里$\bar{a}_{\sigma_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$表示矩阵$A$的第$\sigma_i$行.

由上面的过程可以看到, 矩阵P_k中第$\sigma_{i-1}+2$行至第$\sigma_i - 1$行的各元素都可由第$\sigma_{i-1}+1$行中的d_n^k个初始变量表达. 进而矩阵P_k中的每个元素都可由r个d_n^k维行向量中的$r \times d_n^k$个初始变量表达. 因此命题得证.

基于上面的定理, 接下来考虑

$$N_k = G_{k1}(X_1) - P_k G_{k2}(X_1). \tag{24}$$

回顾上节中H_n^k基的定义, 给出下面定理.

定理 3 多项式矩阵G_{k2}可以进一步分解为如下两个子矩阵:

$$G_{k2}(X_1) = \begin{bmatrix} G_{k2}^1(X_1)\\ G_{k2}^2(X_1)\end{bmatrix}, \tag{25}$$

其中: G_{k2}^1是一个$d_{n-r}^k \times r$维零矩阵, G_{k2}^2是一个$(d_n^k -$

$d_{n-r}^k) \times r$ 维非零$k-1$次多项式矩阵.

证　回顾上节, 可以对空间H_n^k作一个分解, 将$(X_k^1)^{\mathrm{T}}$和$(X_k^2)^{\mathrm{T}}$作为分解后的两个子空间的基. 那么, G_{k2}^1和G_{k2}^2分别为相应子空间中含有输入的$k-1$次多项式系数矩阵. 由式(3)知, 在式(10)中, 仅仅第$\sigma_i\,(1 \leqslant i \leqslant r)$个方程中含有输入的一次项. 因此, 只有在含有$x_{\sigma_i}$因子的元素的导数中, 含有输入的$k$次项才可能不为零. 即只有$X_k^2$中的元素, 其导数中包括输入的$k$次项才可能不为零. 而在$X_k^1$中的元素的导数中, 不存在含有输入的$k$次项. 所以$G_{k2}^1$为零矩阵, 而$G_{k2}^2$为非零多项式矩阵. 又由于$H_n^k$中有$d_n^k$个元素, X_k^1中有d_{n-r}^k个元素, 所以G_{k2}^1为$d_{n-r}^k \times r$维零矩阵, G_{k2}^2为$(d_n^k - d_{n-r}^k) \times r$维非零$k-1$次多项式矩阵.　　证毕.

回顾式(25), 对P_k矩阵作一个类似的分解

$$P_k = [P_{k1}\ P_{k2}], \tag{26}$$

其中: P_{k1}是一个$n \times d_{n-r}^k$维子矩阵, P_{k2}是一个$n \times (d_n^k - d_{n-r}^k)$维子矩阵. 接下来, 定义$\widetilde{G}_{k1}$, $\widetilde{P}_{k2}$为包含G_{k1}和P_{k2}第$\sigma_{i-1}+1$到$\sigma_i - 1(1 \leqslant i \leqslant r)$行的两个$n-r$行子矩阵. 而$\widetilde{G}_{k1}^s$, $\hat{P}_{k2}$为包含G_{k1}和P_{k2}第$\sigma_i\ (1 \leqslant i \leqslant r)$行的两个$r$行子矩阵.

基于上述准备, 可以给出下面定理.

定理 4　如果由式(23)推导获得的矩阵P_k的子矩阵$\widetilde{P}_{k2}$使得下式成立

$$\widetilde{G}_{k1}(X_1) - \widetilde{P}_{k2} G_{k2}^2(X_1) = 0, \tag{27}$$

那么, 通过一个坐标变换

$$Z_1 = X_1 - P_k X_k \tag{28}$$

和一个非线性反馈

$$u = v - B_s^{-1} M_k^s X_k - B_s^{-1} N_k^s v, \tag{29}$$

这里

$$N_k^s = \widetilde{G}_{k1}^s(X_1) - \hat{P}_{k2} G_{k2}^2(X_1), \tag{30}$$

系统(9)将被变换为(17). 特别地, 如果存在一个适当的P_k使得下述等式成立:

$$\begin{aligned} &AP_k - P_k D_{kk} + D_{1k} = 0, \\ &G_{k1}(X_1) - P_{k2} G_{k2}^2(X_1) = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

那么可以只通过坐标变换获得k阶逼近线性化.

证　将式(25)和式(26)代入到式(24)中, 由定理3可以得到

$$N_k = G_{k1} - P_{k2} G_{k2}^2. \tag{32}$$

如果式(27)成立, 那么仅仅N_k的第$\sigma_i(1 \leqslant i \leqslant r)$行是非零的. 由定理1以及前面的分析, 能够得出定理的结论.

注 3　由定理4, 逼近反馈线性化问题已经被转化为求解方程(27)的问题. 而该方程可以等价为求解一组线性方程.

下面分析本文所提方法的运算量问题.

如果系统(9)是k阶可反馈逼近线性化的, 即能够k阶线性化该系统的坐标变换和非线性反馈总是存在的. 那么对于一般常用的比较系数的求解方法, 坐标变换(11)中需要求解的多项式系数个数为

$$N_t^c = n \cdot d_n^k = \frac{n(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

而在非线性反馈(14)中, 待定的多项式系数个数为

$$\begin{aligned} &N_u^c = r \cdot (d_n^{k-1} + r \cdot d_n^k) = \\ &\frac{r(nr+kr+k-r) \cdot (n+k-2)!}{k!(n-1)!}. \end{aligned}$$

总的待定多项式系数的个数为

$$\begin{aligned} &N_s^c = N_t^c + N_u^c = \\ &\frac{n(n+k-1)! + r(nr+kr+k-r) \cdot (n+k-2)!}{k!(n-1)!}. \end{aligned}$$

在本文的算法中, 坐标变换中待定系数的个数为

$$N_t = r \cdot d_n^k = \frac{r(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

由式(19)知, 当坐标变换确定后, 相应的非线性反馈也被确定. 因此总的待定多项式系数的个数为

$$N_s = N_t = \frac{r(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

显然本文的方法降低了多项式中待定系数的个数.

最后, 可以将本节的讨论结果归结为下面的求解流程.

Step 1　根据给定的方程, 确定$A, B, G_{k1}(X_1)$及系统的能控性指数集, 计算$\sigma_i (1 \leqslant i \leqslant r)$及$B_s^{-1}$, 构造坐标空间$H_n^{[1,k]}$, 定义相应的基;

Step 2　确定D_{1k}, 通过链式求导法则计算D_{kk}和$G_{k2}(X_1)$;

Step 3　取r个初始行变量$p_k^{\sigma_{i-1}+1}\,(1 \leqslant i \leqslant r)$. 由下述递推式

$$\begin{aligned} &p_k^j = p_k^{j-1} D_{kk} - D_{1k}^{j-1}, \\ &1 \leqslant i \leqslant r, \sigma_{i-1} + 2 \leqslant j \leqslant \sigma_i, \end{aligned} \tag{33}$$

可以得到矩阵P_k的表达式.

Step 4　将下述方程

$$\widetilde{G}_{k1} - \widetilde{P}_{k2} G_{k2}^2 = 0 \tag{34}$$

转化为一组线性方程组求解, 从而求得P_k. 那么相应的坐标变换可以由下式给定:

$$Z_1 = X_1 - P_k X_k. \tag{35}$$

Step 5 利用下式:

$$\begin{aligned}\alpha^{[k]}(x) &= -B_s^{-1}M_k^s X_k,\\ \beta^{[k-1]}(x) &= -B_s^{-1}N_k^s,\end{aligned} \tag{36}$$

能够获得一个所求的状态反馈

$$u = v + \alpha^{[k]}(x) + \beta^{[k-1]}(x)v, \tag{37}$$

这里M_k^s和N_k^s可以由下式计算:

$$\begin{cases} m_k^{\sigma_i} = \bar{a}_{\sigma_i}P_k - p_k^{\sigma_i}D_{kk} + D_{1k}^{\sigma_i},\\ M_k^s = [(m_k^{\sigma_1})^{\mathrm{T}}, (m_k^{\sigma_2})^{\mathrm{T}}, \cdots, (m_k^{\sigma_r})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},\\ N_k^s = \widetilde{G}_{k1}^s(X_1) - \hat{P}_{k2}G_{k2}^2(X_1). \end{cases} \tag{38}$$

4 例子(Example)

为了更好的描述本文所提的算法, 在本节中, 将线性化下面的非线性系统到2阶:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_4^2 + x_2u_1 + x_1u_2,\\ \dot{x}_2 = u_1 + x_1x_3 + x_4u_2,\\ \dot{x}_3 = x_4 + x_3u_1 + x_4u_2,\\ \dot{x}_4 = u_2. \end{cases} \tag{39}$$

由于空间的限制, 省略部分中间结果. 容易验证上述系统是一个两输入4阶线性可控的非线性系统. 由方程可以确定A, B, G_{21}并且有$r = 2, \mu_1 = 2, \mu_2 = 2, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 4$.

如上节所述, 首先定义一个新的坐标空间$H_4^{[1,2]}$, 则它的基为$(X_1, X_2^1, X_2^2)^{\mathrm{T}}$, 这里

$$\begin{cases} X_1 = [x_1\ \ x_2\ \ x_3\ \ x_4],\\ X_2^1 = [x_1^2\ \ x_1x_3\ \ x_3^2],\\ X_2^2 = [x_1x_2\ \ x_2^2\ \ x_2x_3\ \ x_1x_4\ \ x_2x_4\ \ x_3x_4\ \ x_4^2]. \end{cases} \tag{40}$$

在$H_4^{[1,2]}$定义的空间内, 由给定方程可以确定D_{12}, 由链式求导法则, 可以得到D_{22}, G_{22}. 定义

$$p_2^1 = [p_{10}\ \ \cdots\ \ p_{19}], p_2^3 = [p_{30}\ \ \cdots\ \ p_{39}],$$

代入式(33), 计算得到p_2^2, p_2^4. 将上述变量代入式(34)求得

$$\begin{cases} p_{10} = *, p_{11} = *, p_{12} = *, p_{13} = 0, p_{14} = \dfrac{1}{2},\\ p_{15} = 0, p_{16} = 1, p_{17} = 0, p_{18} = 0, p_{19} = 0,\\ p_{30} = 0, p_{31} = *, p_{32} = *, p_{33} = *, p_{34} = 0,\\ p_{35} = 1, p_{36} = 0, p_{37} = 0, p_{38} = 0, p_{39} = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{41}$$

上述结果中, $*$表示可任意给定数值. 为了简单起见, 一律取为0. 将上述结果代入式(35), 得到所求的坐标变换为

$$\begin{cases} z_1 = x_1 - \dfrac{1}{2}x_2^2 - x_1x_4,\\ z_2 = x_2 - x_2x_4 + x_4^2,\\ z_3 = x_3 - x_2x_3 - \dfrac{1}{2}x_4^2,\\ z_4 = x_4 - x_2x_4. \end{cases} \tag{42}$$

由式(38)求得

$$\begin{cases} M_2^s X_2 = \begin{bmatrix} x_1x_3 \\ 0 \end{bmatrix},\\ N_2^s = \begin{bmatrix} -x_4 & -x_2 + 3x_4 \\ -x_4 & -x_2 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{43}$$

将上述结果代入到式(36)(37)中, 可以获得所求的非线性状态反馈

$$\begin{cases} u_1 = v_1 - x_1x_3 + x_4v_1 + x_2v_2 - 3x_4v_2,\\ u_2 = v_2 + x_4v_1 + x_2v_2. \end{cases} \tag{44}$$

最后将式(42)及(44)代入到式(39)中, 得到

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 + \mathrm{O}^{[3]}(z, v),\\ \dot{z}_2 = v_1 + \mathrm{O}^{[3]}(z, v),\\ \dot{z}_3 = z_4 + \mathrm{O}^{[3]}(z, v),\\ \dot{z}_4 = v_2 + \mathrm{O}^{[3]}(z, v). \end{cases} \tag{45}$$

这样得到了系统(39)的二阶逼近线性化.

5 结论(Conclusion)

在本文中, 提出了一种新的非线性控制系统的高阶逼近反馈线性化方法, 给出了求解流程, 该方法降低了求解所需的运算量. 最后, 通过一个例子阐述了该方法的应用.

参考文献(References):

[1] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. 3rd ed. London, UK: Springer-Verlag, 1995.

[2] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. London, UK: Springer-Verlag, 1999.

[3] GUARDABASSI G O, SAVARESI S M. Approximate linearization via feedback-an overview[J]. *Automatica*, 2000, 37(1): 1 – 15.

[4] KRENER A J. Approximate linearization by state feedback and coordinate change[J]. *Systems & Control Letters*, 1984, 5(33): 181 – 185.

[5] KRENER A J, KARAHAN S, IIUBBARD M, et al. Higher order linear approximations to nonlinear control systems[C] //*Proceedings of the 26th Conference on Decision and Control*. Los Angeles, USA: IEEE, 1987: 519 – 523.

[6] KRENER A J, KARAHAN S, HUBBARD M. Approximate normal forms of nonlinear systems[C] //*Proceedings of the 27th Control and Decision Conference*. Austin, USA: IEEE, 1988: 1223 – 1229.

[7] NAM K, ARAPOSTATHIS A, LEE S. Some numerical aspects of approximate linearization of single-input nonlinear systems[J]. *International Journal of Control*, 1993, 57(2): 463 – 472.

[8] KANG W. Approximate linearization of nonlinear control systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1994, 23(1): 43 – 52.

[9] XU Z G, HAUSER J. Higher order approximate feedback linearization about a manifold for multi-input systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(5): 833 – 840.

[10] GHANADAN R, BLANKENSHIP G L. Adaptive control of nonlinear systems via approximate linearization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(4): 618 – 625.

[11] DEUTSCHER J, SCHMID C. A numerical approach to approximate feedback linearization[C] //*Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Computer Aided Control Systems Design Munich*. Germany: IEEE, 2006: 1934 – 1939.

[12] DEUTSCHER J, SCHMID C. A state space embedding approach to approximate feedback linearization of nonlinear single input control systems[J]. *International Journal Robust and Nonlinear Control* 2006, 16(9): 421 – 440.

[13] CHEN G, DELLA DORA J. An algorithm for computing a new normal form for dynamical systems[J]. *Journal of Symbolic Computation*, 2000, 29(3): 393 – 418.

[14] CHEN G, DELLA DORA J. Rational normal form for dynamical systems via Carleman linearization[C] //*Proceedings of the 1999 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*. Vancouver, Canada: ACM Press, 1999: 165 – 172.

[15] KANG W, KRENER A J. Extended quadratic controller normal form and dynamic state feedback linearization of nonlinear systems[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1992, 30(6): 1319 – 1337.

[16] CHENG D, MARTIN C F. Normal form representation of control systems[J]. *International Journal of Robust Nonlinear Control*, 2002, 12(5): 409 – 433.

作者简介:

张 健 (1978—), 男, 讲师, 目前研究方向为非线性控制系统, E-mail: zhangj@uestc.edu.cn;

李春光 (1976—), 男, 教授, 目前研究方向为复杂动态系统, E-mail: cgli@uestc.edu.cn;

徐红兵 (1967—), 男, 教授, 目前研究方向为智能控制系统, E-mail: hbxu@uestc.edu.cn.

下 期 要 目

动力学在线更新的人和机器人握手智能控制器 …… 谢光辉, 梁锡昌, 桥本稔, 庄小红
基于$K_{\mathrm{p}} = LDU$分解的多变量离散时间系统鲁棒模型参考自适应控制 …… 李俊领, 陈 伟, 邵长彬
考虑输入约束的发电机汽门非线性自适应控制 …… 孙丽颖, 赵 军
基于向量图分析的分布参数系统迭代学习控制 …… 戴喜生, 李 政, 田森平
柔性支撑Stewart平台自适应交互PID隔振控制 …… 段学超, 仇原鹰
随机风速场的数值模拟及高层建筑风振控制 …… 汪 权, 王建国, 张鸣祥
不确定广义系统的弹性H_∞控制 …… 张 伟, 时 宝, 盖明久
模糊控制器输出值不变的两个充分条件 …… 王加银, 李洪兴
仿射非线性控制系统生存性的判别 …… 高 岩
基于不完全量测下离散线性滤波的修正Riccati方程 …… 许志刚, 盛安冬, 郭 治
基于预测值控制的变采样网络控制系统 …… 薛 燕, 刘 克
非均匀气隙永磁同步电机的自适应混沌同步 …… 张兴华, 丁守刚
拟合迭代学习数据的工业过程控制器 …… 回立川, 林 辉