

一种基于LMI的鲁棒故障诊断滤波器设计

王小丽¹, 宋红敏², 倪茂林¹

(1. 北京控制工程研究所 空间智能控制技术国家级重点实验室, 北京 100190;

2. 北京联合大学 应用文理学院, 北京 100191)

摘要: 研究了一类含有扰动的线性系统鲁棒故障诊断滤波器设计问题. 文中引入一种能同时体现残差对扰动信号鲁棒性和对故障信号灵敏性的性能指标, 利用 H_∞ 理论把求解滤波器的问题转化为 H_∞ 优化设计问题. 应用线性矩阵不等式(LMI)技术, 对此性能指标进行优化, 给出并证明了该设计问题解的存在性条件和滤波器增益阵的求解方法, 最后, 通过仿真实例验证了方法的有效性.

关键词: 故障诊断滤波器; 鲁棒性; 线性矩阵不等式; H_∞ 优化

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

The design of a robust fault-detection filter: the LMI approach

WANG Xiao-li¹, SONG Hong-min², NI Mao-lin¹

(1. National Laboratory of Space Intelligent Control, Beijing Institute of Control Engineering, Beijing 100190, China;

2. College of Art and Science, Beijing Union University, Beijing 100191, China)

Abstract: The design of a robust fault-detection filter(RFDF) for a class of linear systems with disturbances is studied. A performance index which includes both robustness against disturbances and sensitivity against faults is introduced. By using some results of H-infinity optimization, the RFDF design problem is formulated as an H-infinity optimization problem. The performance index is also optimized via the linear matrix inequality(LMI) technique. Moreover, the existence conditions for solutions are derived and the gain matrix of the above filter is determined. Finally, an example is given to demonstrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words: fault detection filter; robustness; linear matrix inequality(LMI); H-infinity optimization

1 引言(Introduction)

随着鲁棒控制理论的日益成熟, 基于模型的鲁棒故障诊断方法取得了许多令人满意的成果^[1], 常见的有自适应观测器法^[2]、未知输入观测器法^[3]等, 这些方法适用于未知输入和噪声的统计特性是确定的系统. 在最近的研究中, 学者们将系统扰动看作有界信号, 提出了 H_∞ 滤波器设计方法^[4~7], 利用 H_∞ 控制理论将滤波器的设计问题转化为 H_∞ 优化问题, 能够抑制系统不确定性对估计误差的影响. 文献[4~6]研究了线性时不变系统的故障检测滤波器(FDF)设计问题, 但其中加权矩阵是通过求解代数Riccati方程得到, 需要事先确定一些待定参数, 参数的选择对FDF性能的影响比较大. 在文献[5]的基础之上, 文献[7]研究了时滞系统滤波器的设计方法, 然而对性

能指标进行优化时采用的方法是固定其中的一个性能指标, 求解另一个指标的最优值, 具有一定的保守性.

本文研究系统在有界能量干扰下滤波器的设计. 引入参考残差模型, 和原系统构成增广系统, 将此类系统的故障诊断滤波器设计归结为 H_∞ 优化问题. 通过优化性能指标, 使参考残差信号和故障信号之间的差距减小, 提高了残差信号对故障信号的灵敏性, 同时增强了对扰动信号的鲁棒性. 文中应用线性矩阵不等式技术得到了该优化问题解存在的条件及滤波器增益阵的求解方法, 并且以LMI形式给出了参考模型的选取方法, 避免了求解Riccati方程, 这不仅使得设计简便, 还降低了保守性.

2 问题描述(Problem description)

考虑线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_d d(t) + B_f f(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + D_d d(t) + D_f f(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ 和 $y \in \mathbb{R}^q$ 分别是系统状态、控制输入和测量输出信号, $x(0) = x_0$ 为初始状态. $f \in \mathbb{R}^l$ 为需要诊断的故障信号, $d \in \mathbb{R}^m$ 为不确定扰动信号(包括建模误差信号、外部扰动信号等). 不失一般性, 设 d, f 为 L_2 范数有界信号, $A, B, C, D, B_d, B_f, D_d$ 和 D_f 为适当维已知矩阵或向量. 系统(1)满足如下两个假设:

假设 1 A 的特征值均具有负实部;

假设 2 (C, A) 可检测.

设计基于状态观测器的故障诊断滤波器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + H(y(t) - \hat{y}(t)), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t), \\ r(t) = y(t) - \hat{y}(t). \end{cases} \quad (2)$$

式中: $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $\hat{y} \in \mathbb{R}^q$ 分别表示状态和输出的估计值, $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$, H 为观测器增益矩阵.

令 $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, $e(0) = e_0$, 得残差系统方程:

$$\begin{cases} \dot{e}(t) = (A - HC)e(t) + (B_d - HD_d)d(t) + \\ \quad (B_f - HD_f)f(t), \\ r(t) = Ce(t) + D_d d(t) + D_f f(t). \end{cases} \quad (3)$$

用传递函数形式表示残差为

$$r(s) = T_0(s)e_0 + T_{rd}(s)d(s) + T_{rf}(s)f(s). \quad (4)$$

其中: T_{rf} , T_{rd} 分别为故障信号和扰动信号到残差信号的传递函数. T_0 是严格真有理分式阵, 初始条件 e_0 不影响 $r(t)$ 的稳定性, 可以忽略不计^[8].

本文研究的主要问题是: 设计故障诊断滤波器, 求解增益矩阵 H , 使其满足以下两个条件:

条件 1 $A - HC$ 的特征值均具有负实部;

条件 2 残差 $r(t)$ 对故障 $f(t)$ 具有灵敏性, 对于扰动 $d(t)$ 具有鲁棒性, 即满足

$$\|T_{rf}\|_\infty \geq \beta_0, \|T_{rd}\|_\infty \leq \gamma_0,$$

其中 γ_0, β_0 为给定的性能指标.

引入一个参考模型 $W_F(s)$, 定义参考残差向量为 r_F , 用 $W_F(s), f$ 表示:

$$r_F(s) = W_F(s)f(s). \quad (5)$$

其中 $W_F \in \mathbb{R}H_\infty$.

选取性能指标

$$J = \sup_{w \in L_2} \frac{\|r_e\|_2}{\|w\|_2} = \sup_{w \in L_2} \frac{\|T_{zw}(s)w\|_2}{\|w\|_2} = \|T_{zw}(s)\|_\infty. \quad (6)$$

其中: $w = [d^T \ f^T]^T$, $r_e = r - r_F$.

这里 $z(t) = r_F(t) - r(t)$, 且

$$\|T_{zw}(s)\|_\infty = \|[-T_{rd}(s)W_F(s) - T_{rf}(s)]\|_\infty \quad (7)$$

最小化 J , 也就是最小化式(7)的无穷范数, 使其满足

$$J < \gamma. \quad (8)$$

即要求 $T_{rd}(s), W_F(s) - T_{rf}(s)$ 都尽量小. 由式(8)可得

$$\|T_{rd}(s)\|_\infty \leq \gamma_d, \|W_F(s) - T_{rf}(s)\|_\infty \leq \gamma_f, \quad (9)$$

其中 $\gamma_d, \gamma_f \in (0, \gamma]$.

根据三角不等式:

$$\|W_F(s) - T_{rf}(s)\|_\infty \geq \|W_F(s)\|_\infty - \|T_{rf}(s)\|_\infty,$$

所以

$$\|T_{rf}(s)\|_\infty \geq \|W_F(s)\|_\infty - \gamma_f. \quad (10)$$

可见, 式(9)中左边不等式使得 d 对残差的影响被减弱, 后一项使得故障逼近参考值, 保证了残差对故障的灵敏性. 令

$$\beta_0 = \|W_F(s)\|_\infty - \gamma_f, \gamma_0 = \gamma_d,$$

则式(9)可以转化为条件2中的性能指标.

因此, 选用式(6)作为鲁棒故障诊断滤波器设计的优化性能指标进行优化, 使其满足式(8), 则条件2的性能指标就可以满足.

3 滤波器设计(Filter design)

一般地, $W_F(s)$ 的一个实现可以按下式表示:

$$\begin{cases} \dot{x}_F(t) = A_F x_F(t) + B_F f(t), \\ r_F(t) = C_F x_F(t) + D_F f(t). \end{cases} \quad (11)$$

令 $\tilde{x} = [e^T \ x_F^T]^T$, 则由式(3)和式(11)可得包含状态误差和参考残差的系统方程:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}w(t), \\ r_e(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}w(t). \end{cases} \quad (12)$$

下面给出求解滤波器的一个重要引理:

引理 1^[9] 对于线性时不变的连续时间系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bw(t), \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t). \end{cases}$$

给定 $\gamma > 0$, 如果存在一个对称矩阵 $P > 0$, 满足如

下的LMI:

$$\begin{bmatrix} A^T P + PA & PB & C^T \\ B^T P & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0,$$

则系统渐近稳定, 且满足 $\|z\|_2^2 < \gamma^2 \|w\|_2^2$, 即 $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$, T_{zw} 为 w 到 z 的传递函数.

本文的主要结果如下:

定理 1 对于系统(1), 给定 $\gamma > 0$, 如果存在正定阵 R 和 X , 矩阵 K, M, N, T, Y 和 Z 满足如下LMI:

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\ * & E_{22} & E_{23} & E_{24} & C^T \\ * & * & -I & 0 & D_d^T \\ * & * & * & -I & E_{45} \\ * & * & * & * & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

$$X - R > 0. \quad (14)$$

其中*为矩阵的对称项,

$$\begin{aligned} E_{11} &= RA + A^T R - ZC - C^T Z^T, \\ E_{12} &= RA - ZC + A^T X - C^T Y + M, \\ E_{13} &= RB_d - ZD_d, E_{14} = RB_f - ZD_f, \\ E_{15} &= C^T - N, \\ E_{22} &= A^T X + XA - C^T Y - Y^T C, \\ E_{23} &= XB_d - Y^T D_d, E_{24} = XB_f - Y^T D_f + K, \\ E_{45} &= D_f^T - T^T. \end{aligned}$$

则以下3项均成立:

1) 系统(1)存在一个 H_∞ 滤波器(2), 对应的滤波器增益阵为 $H = R^{-1}Z$.

2) 增广系统(12)渐近稳定, 满足 $\|r_e\|_2 < \gamma \|w\|_2$, 即选取的性能指标 $J < \gamma$.

3) 参考模型的系数矩阵按式(15)求解:

$$\begin{cases} A_F = (R - X)^{-1} M^T, \\ B_F = (R - X)^{-1} K, \\ C_F = N^T, \\ D_F = T. \end{cases} \quad (15)$$

注 1 定理1将故障诊断滤波器存在的条件转化为线性矩阵不等式的可解性问题. 式(13)是关于标量 γ 的线性矩阵不等式. 因此可以将 γ 作为一个优化变量, 通过求解如下的优化问题得到最优 H_∞ 滤波器:

$$\begin{cases} \min \gamma, \\ \text{constraints: formula(13) and (14)}. \end{cases} \quad (16)$$

并且解得最优值 γ_{opt} , 满足 $\|r_e\|_2 < \gamma_{\text{opt}} \|w\|_2$, 即选取的性能指标 $J < \gamma_{\text{opt}}$.

4 阈值的确定(Selection of threshold)

根据式(3), 本文选择 $\|r\|_2 = [\int_0^{+\infty} r^T r dt]^{1/2}$ 作

为残差评价标准, 由于在实际工程中时间 t 不能取到无穷大, 因此用 $\|r\|_2 = [\int_{t_1}^{t_2} r^T r dt]^{1/2}$ 来代替 $[\int_0^{+\infty} r^T r dt]^{1/2}$. 由式(4)可得

$$\|r\|_{2,f=0} \leq \|T_0\|_\infty \|e_0\|_2 + \gamma_{\text{opt}} \|d\|_2.$$

若 $e_0 \neq 0$, 则 $r(0) = r_0 \neq 0$, 选取阈值为

$$J_{\text{th}} = \|T_0\|_\infty \|e_0\|_2 + \gamma_{\text{opt}} \|d\|_2.$$

由于 $\|d\|_2 \leq M$, 所以取 $J_{\text{th}} = \|T_0\|_\infty \|e_0\|_2 + \gamma_{\text{opt}} M$.

若 $\|r\|_2 > J_{\text{th}}$, 则故障信号被检测到. 因为 $\|r\|_2$ 和 J_{th} 中都含有 $\|T_0\|_\infty \|e_0\|_2$ 项, 在比较时可以相互抵消. 所以文中为了计算方便, 假设 $x_0 = 0$, $\hat{x}_0 = 0$, $e_0 = 0$, 选取阈值为:

$$J_{\text{th}} = \gamma_{\text{opt}} M.$$

这不会导致给出的阈值偏小而增加误报率.

根据以下逻辑关系判断故障是否发生:

若 $\|r\|_2 > J_{\text{th}}$, 故障信号被检测到, 报警; 否则, 无故障信号被检测到.

5 仿真算例(Simulation example)

考虑如下线性系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} -3.370 & 1.636 \\ -0.325 & -1.896 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.4 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.01 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} 0.586 & 0 \\ 0.410 & 0 \end{bmatrix} f, \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.267 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.02 \end{bmatrix} d + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.267 & 0 \end{bmatrix} f. \end{cases}$$

其中 $f = [f_1 \ f_2]^T$, 采用MATLAB中LMI工具箱求解(16), 可得 $\gamma_{\text{opt}} = 0.0327$.

计算 $\|W_F\|_\infty = 3.2037$. 根据式(8)和式(9)得

$$\|T_{\text{rd}}\|_\infty \leq 0.0327,$$

$$\|T_{\text{rf}}\|_\infty \geq \|W_F(s)\|_\infty - \gamma_{\text{opt}} = 3.17,$$

文献[5]给出的算法满足的性能指标如下: $\|T_{\text{rd}}\|_\infty \leq 0.05$, $\|T_{\text{rf}}\|_\infty \geq 2.3874$.

其中 T_{rf} , T_{rd} 的定义如式(4)所示. 进行比较可以看出, 本文给出的算法不仅提高了残差对干扰的鲁棒性, 而且加强了对故障的灵敏性.

选取输入为单位阶跃信号, 干扰 $d = 0.01 \sin t$, 首先假设同一时刻只有一个部件发生故障.

1) f_1 取为缓变故障, $f_2 = 0$.

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.04t - 0.6, & 15 \leq t < 20, \\ -0.04t + 1, & 20 \leq t \leq 25, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (17)$$

仿真曲线如图1所示, 外部扰动满足

$$\|d\|_2 \leq M = 0.05.$$

阈值选取为 $J_{th} = \gamma_{opt}M$. 由残差曲线可以看出输出残差最终趋近于0, 说明残差系统是渐近稳定的. 从残差评价曲线看出当 $t = 15.39$ s时, $\|r\|_2 > J_{th}$, 也即在故障发生0.39 s之后故障信号被检测到, 报警.

把 f_1 的幅值减小, 选取

$$f_1(t) = \begin{cases} 0.1(0.04t - 0.6), & 15 \leq t < 20, \\ 0.1(-0.04t + 1), & 20 \leq t \leq 25, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (18)$$

并且 $f_2 = 0$, 进行仿真. 可看出故障发生1.87 s之后被检测到, 报警.

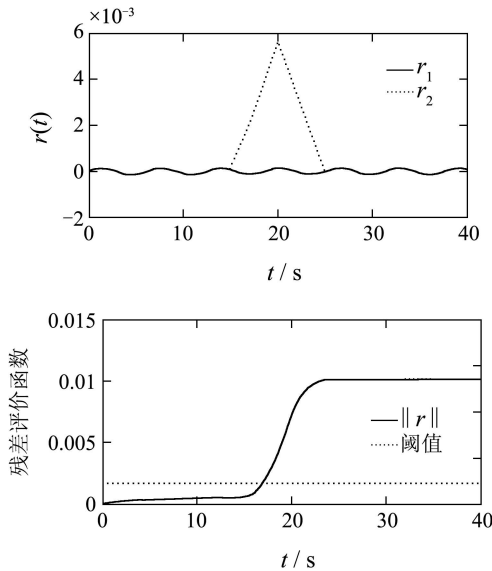


图1 $f_1 \neq 0, f_2 = 0$ 时的仿真曲线

Fig. 1 Curves for $f_1 \neq 0, f_2 = 0$

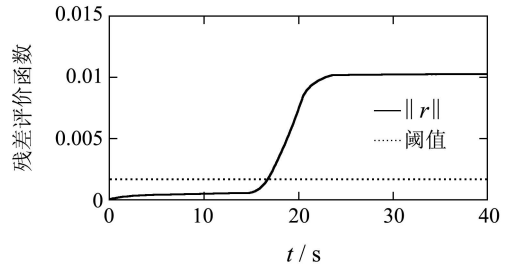
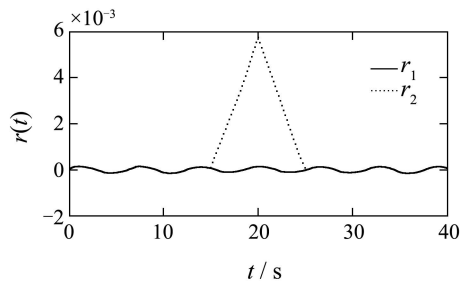


图2 $f_1 \neq 0$ (幅值减小), $f_2 = 0$ 时的仿真曲线

Fig. 2 Curves for $f_1 \neq 0$ (decreasing amplitude), $f_2 = 0$

通过图1和图2的比较, 当 f_1 的幅值较小时, 故障检测的时延比较大, 这是因为当故障信号比较小时, 若它和干扰信号相当, 则会当作干扰来处理, 只有当故障信号积累到一定程度时才会被检测出来.

2) $f_1 = 0, f_2$ 取15 s到20 s的方波信号.

$$f_2(t) = \begin{cases} 0.2, & 15 \leq t \leq 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (19)$$

仿真曲线如图3所示, 可知在 $t = 15.01$ s时可以检测出发生了故障. 可见, 对于突变故障, 给出的算法可以及时地检测出故障.

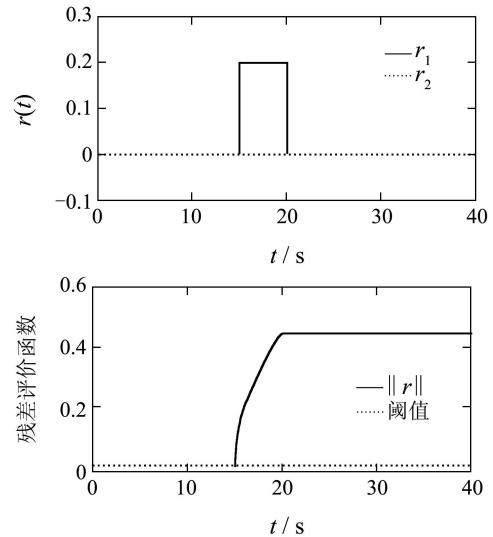
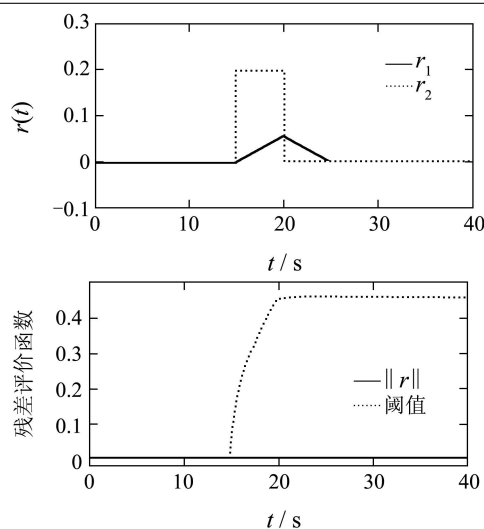


图3 $f_1 = 0, f_2 \neq 0$ 时的仿真曲线

Fig. 3 Curves for $f_1 = 0, f_2 \neq 0$

3) 当 f_1, f_2 同时具有故障时, 故障分别取式(17)和式(19)中的形式. 仿真曲线如图4所示, 由残差评价曲线可知在 $t = 15.01$ s时可以检测出发生了故障.

图4 f_1, f_2 同时发生故障时的仿真曲线Fig. 4 Curves for f_1, f_2 fall in faults simultaneously

6 结语(Conclusions)

本文研究了基于LMI的故障诊断滤波器设计问题. 应用 H_∞ 理论, 把滤波器的设计转化为 H_∞ 优化问题, 采用LMI技术, 给出并证明了滤波器存在的条件和增益阵的求解方法, 对参考模型的选取提出了一种新的思路, 降低了保守性. 所设计的滤波器同时满足残差对干扰的鲁棒性和对故障的灵敏性. 文中对系统出现单故障和多故障的情况分别进行了仿真, 结果表明在故障发生后很短的时间内就可以检测出发生了故障.

参考文献(References):

- [1] 陈茂银, 周东华. 线性系统的鲁棒故障诊断[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 718 – 722.
(CHEN Maoyin, ZHOU Donghua. Robust fault diagnosis of linear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 718 – 722.)
- [2] 贾明兴, 王福利, 毛志忠. 基于自适应观测器的一类非线性系统鲁棒故障诊断[J]. 自动化学报, 2004, 30(4): 601 – 607.
(JIA Mingxing, WANG Fuli, MAO Zhizhong. Robust fault diagnosis using adaptive observer technique for a class of nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(4): 601 – 607.)
- [3] CHEN J, PATTON R J, ZHANG H Y. Design of unknown input observers and robust fault detection filters[J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(1): 85 – 105.
- [4] DING S X, ZHONG M Y, TANG B Y. An LMI approach to the design of fault detection filter for time-delay LTI systems with unknown inputs[C] // *Proceedings of the American control Conference*. New York: IEEE, 2001, 6: 2137 – 2142.
- [5] 钟麦英, 汤兵勇, DING S X. 基于状态观测器的鲁棒故障诊断滤波器设计LMI方法[J]. 自动化学报, 2002, 28(5): 1001 – 1005.
(ZHONG Maiying, TANG Bingyong, DING S X. An LMI approach to design robust observer-based FD filter[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(5): 1001 – 1005.)
- [6] ZHONG M Y, DING S X, TANG B Y. An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(3): 543 – 550.
- [7] 白雷石, 田作华, 施颂椒, 等. 一种新的时滞系统鲁棒故障诊断滤波器设计方法[J]. 自动化学报, 2006, 32(4): 624 – 629.
(BAI Leishi, TIAN Zuohua, SHI Songjiao, et al. A new approach to design of robust fault detection filter for time-delay systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(4): 624 – 629.)
- [8] DOU L Q, ZONG Q, WANG W J. A LMI approach for robust fault detection based on H_2 / H_∞ setting[C] // *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*. New York: IEEE, 2006, 6: 5497 – 5500.
- [9] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control—Methods for Linear Matrix Inequalities*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

作者简介:

王小丽 (1983—), 女, 主要研究方向为故障诊断与容错控制, E-mail: shalyli@126.com;

宋红敏 (1972—), 女, 副教授, 主要研究方向为数据挖掘与统计分析, E-mail: songer214@163.com;

倪茂林 (1963—), 男, 研究员, 主要研究方向为智能鲁棒控制、卫星姿态与轨道控制和机器人控制, E-mail: nimaolin@cast.cn.