

基于简约集向量的Takagi-Sugeno模糊模型

于 龙, 肖 建, 刘陆洲

(西南交通大学 电气工程学院, 四川 成都 610031)

摘要: 利用支持向量学习机制建立模糊模型时, 过多的支持向量将导致复杂的模糊模型. 为此提出了一种基于简约集向量的Takagi-Sugeno模糊模型. 该模型抽取简约集向量产生模糊规则, 规则前件的乘积型多维模糊隶属度函数直接由Mercer核构成, 而规则后件则采用非线性函数. 模型的结构和参数可通过自下而上的简化规则以及不敏感学习进行有效地辨识. 最终得到的模糊模型具有良好的推广能力与精确性, 同时拥有高透明度的模糊规则库. 通过二维sinc函数的逼近及球棍系统的模糊控制的仿真实例, 说明了提出模型的有效性.

关键词: 模糊建模; 核函数; 简约集向量

中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

A Takagi-Sugeno fuzzy model based on the reduced set-vector

YU Long, XIAO Jian, LIU Lu-zhou

(School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610031, China)

Abstract: In applying the support-vector learning mechanism to fuzzy modeling, we find that excessive support-vectors will lead to a complicated fuzzy model. Based on the reduced set-vector, we present a Takagi-Sugeno fuzzy model(RV-TSFM) which alternatively extracts reduced set-vectors for generating fuzzy rules. The product-type multidimensional fuzzy membership functions of rule-antecedents can be directly generated by Mercer kernels; and the nonlinear functions represent the rule-consequents. By utilizing the bottom-up simplification algorithm and insensitive learning, we can effectively identify the model structure and parameters. The final model derived provides a desirable accuracy and generalization performance, as well as a highly transparent rule base. Finally, the proposed fuzzy model is successfully applied to the approximation of a two-dimensional sinc function, and the fuzzy control of a ball-and-beam system.

Key words: fuzzy modeling; kernel; reduced-set vector

1 引言(Introduction)

构建正确的模糊模型是成功地进行模糊控制的基础^[1]. 然而, 经典的模糊建模方法往往难以很好地解决模糊系统模型逼近精度与复杂度之间的平衡问题^[2]. 支持向量学习机制的模糊建模方法吸取了支持向量机与模糊系统的各自优点, 通过抽取支持向量来产生模糊规则, 使得到的模糊模型具有较好的推广能力和语言规则的可描述性^[3,4]. 然而, 从小样本的支持向量回归实验中容易发现, 通过适当的模型选择支持向量数或多或少的大于50%的训练样本数^[5]. 换句话说, 利用支持向量抽取模糊规则获得的模糊模型具有较好的推广能力和逼近精度时, 过多的模糊规则不一定满足人们可理解性的要求.

针对上述问题, 本文试图抽取简约集向量来产生模糊规则, 以使建立的模糊规则库更加的透明. 因此, 根据 ν 支持向量回归提出了一种基于简约集

向量的TS模糊模型(RV-TSFM), 然后分析了该模型与支持向量展开式的逼近界, 使其不但可以用IF-THEN规则来描述, 而且有较好的推广性能. 最后, 把得到的模糊模型成功地用于sinc函数的逼近以及球棍系统的模糊控制上.

2 提出的模糊模型(Proposed fuzzy model)

2.1 模型的形成(Model formulation)

支持向量学习机制构建的模糊规则中, 规则前件的多维模糊隶属度函数等价于径向基核函数^[4]

$$k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \prod_{j=1}^{px} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x_j - x_{ij}}{\sigma_j}\right)^2\right). \quad (1)$$

上式中的连乘 $\prod$ 表示模糊逻辑算子 t -范数的代数积, x_{ij} 和 σ_j 分别表示高斯隶属度函数的中心和宽度, 这样便可使用连接词“且”串接高斯模糊集合来理解径向基核函数, 使其具有语言上的可解释性.

为了减少模糊规则数,我们用简约集向量 $\mathbf{z}_i$ 替代支持向量 $\mathbf{x}_i$ 作为多维模糊隶属度函数的中心,利用式(1)得到一种新的TS模糊模型,即RV-TSFM

$$f_{\text{RV}}(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{c'} k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i) g_i(\mathbf{x}, \beta_i)}{\sum_{i=1}^{c'} k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)}, \quad (2)$$

其中:

$$g_i(\mathbf{x}, \beta_i) = \sum_{j=1}^{c'} k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_j) \theta'_i + \theta_{0i},$$

$$\beta_i = (\theta'_i, \theta_{0i}, \mathbf{z}_j, \sigma).$$

显然,式(2)可以理解为TS模糊模型,规则后件为非线性函数 $g_i(\mathbf{x}, \beta_i)$, β_i 表示后件参数,模糊规则数 c' 对应着简约集向量的数目,它通常远小于支持向量数. RV-TSFM的IF-THEN规则可表述为

$$R_i: \text{If } x_1 \text{ is } A_{i1} \text{ and } x_2 \text{ is } A_{i2} \text{ and } \cdots x_{px} \text{ is } A_{ipx},$$

$$\text{then } y_i = g_i(\mathbf{x}, \beta_i), \text{ for } i = 1, 2, \cdots, c'. \quad (3)$$

其中: R_i 代表模糊规则; A_{ij} 表示式(1)中高斯隶属度函数对应的模糊集合.

2.2 逼近界(Approximation bound)

在保证RV-TSFM具有语言规则的可解释性的同时,我们期望它能够以某种最优方式逼近支持向量回归的展开式,从而使其具有合理的精确度和良好的推广性能.因此,引入下面的定理

定理 1 给定RV-TSFM的模型式(2)和支持向量回归展开式

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^c \theta_i k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) + \theta_0, \quad (4)$$

其中: c 表示支持向量数; $\theta_i = (\alpha_i - \alpha_i^*)$; $\theta_0 = b$. 对于所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{px}$,有

$$\|f - f_{\text{RV}}\|_{\infty} < \sqrt{2}\rho, \quad (5)$$

其中: $\rho^2 = \|\sum_{i=1}^c \theta_i \Phi(\mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^{c'} \theta'_i \Phi(\mathbf{z}_i)\|^2$; $\|\cdot\|_{\infty}$ 定义为 $\|d(\mathbf{x})\| = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{px}} |d(\mathbf{x})|$.

证 令

$$G(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^c \theta_i k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^{c'} \theta'_i k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i) + \theta_0,$$

$$F_s(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{c'} \theta_{0i} k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)}{\sum_{i=1}^{c'} k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)},$$

则

$$|f(\mathbf{x}) - f_{\text{RV}}(\mathbf{x})| = \sum_{i=1}^{c'} \frac{k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)}{\sum_{i=1}^{c'} k(\mathbf{x}, \mathbf{z}_i)} |G(\mathbf{x}) - \theta_{0i}|.$$

容易看出, $F_s(\mathbf{x})$ 为单值模糊系统,对于 $f_{\text{RV}}(\mathbf{x})$ 对 $f(\mathbf{x})$ 的逼近,我们可理解为 $F_s(\mathbf{x})$ 对 $G(\mathbf{x})$ 的逼近.若令后件参数 θ_{0i} 为 $G(\mathbf{x}_{0i})$,则

$$|f(\mathbf{x}) - f_{\text{RV}}(\mathbf{x})| \leq \max_{i=1, \dots, c'} |G(\mathbf{x}) - G(\mathbf{x}_{0i})| \leq$$

$$\max_{i=1, \dots, c'} |(\nabla_{\Phi(\mathbf{x})} G(\mathbf{x}) \cdot (\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}_{0i})))| \leq$$

$$\max_{i=1, \dots, c'} \|\nabla_{\Phi(\mathbf{x})} G(\mathbf{x})\| \|\Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{x}_{0i})\| =$$

$$\rho \max_{i=1, \dots, c'} \sqrt{k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + k(\mathbf{x}_{0i}, \mathbf{x}_{0i}) - 2k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{0i})}.$$

对于径向基核函数有 $k(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$,因此

$$|f(\mathbf{x}) - f_{\text{RV}}(\mathbf{x})| \leq \rho \max_{i=1, \dots, c'} \sqrt{2 - 2k(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{0i})}.$$

由此可得

$$\|f - f_{\text{RV}}\|_{\infty} < \sqrt{2}\rho.$$

证毕.

定理给出了RV-TSFM对 $f(\mathbf{x})$ 的逼近上界.显然,若 ρ 足够小, RV-TSFM便保持了支持向量回归展开式原有的输入输出特性.

2.3 学习规则(Learning algorithm)

给定训练数据 $(\mathbf{x}_k, y_k)_{k=1, \dots, l}$. 首先,采用自下而上的简化规则根据 ν 支持向量回归的结果来选取简约集合 $\{(\theta'_i, \mathbf{z}_i)\}_{i=1, \dots, c'}$,模糊规则数 c' 由预先给定的最大边缘差异(MMD)决定^[6].然后,采用 ε 不敏感学习来估计后件参数 θ_{0i} ^[7],即

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}^{c'}} \sum_{k=1}^l \left| G(\mathbf{x}_k) - \psi(\mathbf{x}_k)^T \theta \right|_{\varepsilon} + \frac{\lambda}{2} \theta^T \theta, \quad (6)$$

其中,

$$\phi_i(\mathbf{x}_k) = \frac{k(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_i)}{\sum_{i=1}^{c'} k(\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_i)},$$

$$\theta = [\theta_{01} \theta_{02} \cdots \theta_{0c'}]^T,$$

$$\psi(\mathbf{x}_k) = [\phi_1(\mathbf{x}_k) \phi_2(\mathbf{x}_k) \cdots \phi_{c'}(\mathbf{x}_k)]^T,$$

$G(\mathbf{x}_k)$ 由2.2节中的定理证明给出.这里应当注意的是, $\psi(\mathbf{x}_k)^T \theta$ 没有偏置项.所以,对参数 θ_{0i} 进行 ε 不敏感学习时,令偏置项为零.

3 仿真实例(Simulation instances)

3.1 函数逼近(Function approximation)

考虑下面的二维sinc函数

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\sin \sqrt{(x_1 - 5)^2 + \frac{(x_2 - 50)^2}{100}}}{\sqrt{(x_1 - 5)^2 + \frac{(x_2 - 50)^2}{100}}} + e, \\ 0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 100, \quad (7)$$

e 为高斯噪声其标准方差为0.05. 在定义域上随机选取169个数据作为训练样本, 利用均匀网格在定义域上选取676个数据作为测试样本. 采用RV-TSFM

逼近目标函数(7), 并与支持向量学习机制的模糊建模(为了方便, 将其表示为SV-FM)方法进行比较^[3]. 不同模糊建模方法的参数设置及仿真结果见表1(SV-FM1和SV-FM2分别对应着不同数值的调节参数 ν). 结果表明SV-FM产生的模糊规则过多, 改变调节参数 ν 虽然可以减少规则数, 但是模型的性能无法保证. RV-TSFM则具有很少的模糊规则, 同时保持了合理的精确性与推广性.

表1 不同模糊建模方法的参数设置及仿真结果

Table 1 Parameters settings and simulation results with different fuzzy modeling method

	正则化参数 C	调节参数 ν	核参数 σ	MMD	不敏感参数 ε	正则化参数 λ	逼近误差	测试误差	规则数
SV-FM1	1.071	0.54	[2 5.3]	—	—	—	0.0443	0.0806	134
SV-FM2	1.071	0.0105	[2 5.3]	—	—	—	0.2023	0.1909	14
RV-TSFM	1.071	0.54	[2 5.3]	0.4	0.05	20	0.0705	0.0939	14

3.2 球棍系统(Ball and beam system)

球棍系统的模糊控制是找到模糊控制规则 $u(\mathbf{x})$, 使得闭环系统的输出对于给定的初始条件收敛于零^[3]. 文献[3]曾应用 ε 支持向量回归, 利用SV-FM逼近控制器, 得到24条规则. 本小节仿真利用RV-TSFM逼近控制器, 参数的设置为 $C = 24.861$, $\nu = 0.25$, $MMD = 10$, $\varepsilon = 0.01$, $\lambda = 200$, 球的位置的相应曲线如图1所示.

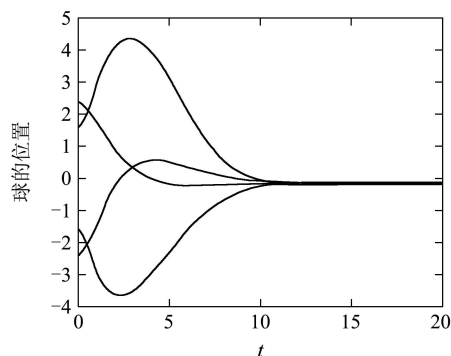


图1 采用RV-TSFM球棍系统的闭环输出, 规则数为10

Fig. 1 Outputs of the closed-loop ball and beam system for RV-TSFM with 10 rules

不难看出, 采用RV-TSFM作为模糊控制器, 球棍系统的动态性能是令人满意的, 球的位置的响应曲线具有相对较小的超调量及调节时间, 并且模糊规则数很少.

4 结论(Conclusions)

指出Mercer核具有可解释性, 可以利用模糊隶属度函数构造. 提出的RV-TSFM不但可以用模糊规则描述, 而且能够很好的描述统计学习框架下支持向量机的输入输出特性. RV-TSFM具有较少

的规则数及较高的透明度, 且在精确性和推广性上保持了合理的精度.

参考文献(References):

- [1] 张恩勤, 施颂椒, 高卫华, 等. 模糊控制系统近年来的研究与发展[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(1): 7-11.
(ZHANG Enqin, SHI Songjiao, GAO Weihua, et al. Recent researches and developments on fuzzy control system[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(1): 7-11.)
- [2] 肖建, 白裔峰, 于龙. 模糊系统结构辨识综述[J]. 西南交通大学学报, 2006, 41(2): 135-144.
(XIAO Jian, BAI Yifeng, YU Long. Survey of fuzzy system structure identification[J]. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2006, 41(2): 135-144.)
- [3] CHIANG J H, HAO P Y. Support vector learning mechanism for fuzzy rule-based modeling: a new approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(1): 1-12.
- [4] SHEN J, SYAU Y, LEE E S. Support vector fuzzy adaptive network in regression analysis[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2007, 54(11/12): 1353-1366.
- [5] CHALIMOURDA A, SCHÖLKOPF B, SMOLA A J. Experimentally optimal ν in support vector regression for different noise models and parameters settings[J]. *Neural Networks*, 2004, 17(1): 127-141.
- [6] NGUYEN D, HO T B. AA bottom-up method for simplifying support vector solutions[J]. *IEEE Transactions on Neural Network*, 2006, 17(3): 792-796.
- [7] LESKI J M. TSK-fuzzy modeling based on ε insensitive learning[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(2): 181-193.

作者简介:

于 龙 (1980—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为模糊系统辨识, E-mail: yulong.swjtu@163.com;

肖 建 (1950—), 男, 教授, 主要研究方向为模糊控制及计算机控制, E-mail: jxiao@swjtu.edu.cn;

刘陆洲 (1982—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为智能控制, E-mail: llzh@mars.swjtu.edu.cn.