

文章编号: 1000-8152(2009)06-0694-03

应用 H_∞ -范数的频域颤振分析

杨智春, 谷迎松

(西北工业大学 航空学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 颤振是一种典型的气动弹性动不稳定现象, 求解颤振临界点是气动弹性稳定性分析的重要任务之一. 从 H_∞ 控制理论观点出发, 将气动弹性系统视为多输入多输出系统, 并导出其传递函数矩阵. 在颤振临界点附近, 根据系统传递函数矩阵的 H_∞ -范数趋于无穷大的特点, 发展了相应的颤振临界点搜索方法. 与传统的颤振分析方法相比, 该方法属于完全频域方法, 算法更为简洁, 且具有更高的自动化程度. 数值算例表明, 该方法可以获得正确的颤振临界点.

关键词: H_∞ -范数; 颤振; 气动弹性系统; 多输入多输出

中图分类号: V215.3 **文献标识码:** A

Flutter analysis by using H-infinity-norm

YANG Zhi-chun, GU Ying-song

(School of Aeronautics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: Flutter is a typical dynamic instability phenomenon in aeroelastic systems. It is very important to determine the critical flutter point in aeroelastic analysis. Based on the H-infinity control theory, we consider an aeroelastic system a multiple-input and multiple-output(MIMO) system, and derive its transfer function matrix. The H-infinity-norm of this transfer matrix will approach to infinity near the critical flutter point. Using this unique property of the H-infinity-norm, we develop a detailed algorithm to automatically search for the flutter point in frequency domain with less complexity than the traditional method. It is demonstrated that the results of the present method are in agreement with those of classical method.

Key words: H-infinity-norm; flutter (aerodynamics); aeroelastic system; multiple-input and multiple-output

1 引言(Introduction)

颤振是由惯性力、弹性和气动力耦合导致的气动弹性动不稳定现象^[1,2]. 传统的颤振分析中, 一般要求解颤振特征根, 当特征根由左半复平面越过虚轴到右半复平面时, 即可判定为系统颤振失稳^[3,4]. 这类分析方法有两个固有缺陷: 首先气动力表达式一般都是在简谐振动的假设下获得的, 而仅在虚轴附近, 这种假设才近似成立; 其次是需要对特征根进行排序并跟踪其随速度变化的规律, 而对于密频情况, 现有的自动分支跟踪方法容易失效, 一般需要人工介入来检查颤振计算结果的合理性, 算法的自动化程度受到一定的限制^[5]. 鉴于这两点, 有必要发展完全基于频域的、更为自动化的颤振计算方法.

参加拿大大学者Zames^[6]在1981年提出了著名的 H_∞ 控制思想, 并给出3个基本的鲁棒控制问题, 其中

之一是标准的 H_∞ 问题: 设计一个控制器使得闭环系统稳定, 且对于有限能量的干扰信号, 对系统期望输出影响最小. 该理论一面世, 就广泛应用于各种复杂系统的鲁棒控制器设计中^[7~9]. 实际上, 除了可用于控制器设计, 该理论还可用于评价系统的稳定特性.

本文从气动弹性运动方程出发, 导出了系统传递函数矩阵, 根据其 H_∞ -范数在颤振临界点附近趋于无穷大的特点, 发展了一类新的颤振分析方法. 数值算例显示, 本文方法结果精度良好, 且在提高颤振分析自动化程度方面具有应用潜力.

2 理论准备(Theory background)

2.1 气动弹性系统(Aeroelastic system)

气动弹性系统是一种典型的多输入多输出(MIMO)系统. 在拉氏域内, 模态坐标下的气动弹性运动方程可表示为

$$[s^2M + sB + K - q_\infty Q(sb/V)]\{\eta\} = \{u\}, \quad (1)$$

其中: s 为拉氏变量, u 为外激励信号, η 为模态位移响应向量; M, B, K 分别为广义质量阵、广义阻尼阵和广义刚度阵; $Q(sb/V)$ 为拉氏域气动力矩阵, $q_\infty = 1/2\rho_\infty V^2$ 为速压, ρ_∞ 为大气密度, V 为风速, b 为参考长度.

记气动弹性系统的传递函数矩阵为 P , 则式(1)可简写为如下输入输出关系:

$$[P]\{u\} = \{\eta\}, \quad (2)$$

其中:

$$\begin{aligned} P &= F^{-1}, \\ F &= s^2M + sB + K - q_\infty Q(sb/V), \end{aligned}$$

从而 P 是依赖于 s 和速度 V 的参变矩阵.

令 $s = j\omega$, $k = \omega b/V$, 可定义颤振矩阵为

$$F(j\omega) = -\omega^2M + j\omega B + K - q_\infty Q(k). \quad (3)$$

2.2 气动弹性系统的 H_∞ -范数(H_∞ -norm of the aeroelastic system)

由式(2)(3)可知 P 仅在频域上容易获得, 而其 H_∞ -范数可定义为系统频响函数矩阵最大奇异值的上界

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[P(j\omega)]. \quad (4)$$

随着风速 V 逐渐增加而趋于颤振速度 V_F 时, 系统趋于失稳, $\|P\|_\infty$ 也趋于无穷大. 则

$$\lim_{V \rightarrow V_F} \|P\|_\infty = \infty. \quad (5)$$

注意到气动力矩阵仅在简谐运动假设下可用, 因此仅在临界失稳情况下, 即当且仅当 $V = V_F$ 时, $\|P\|_\infty = \infty$. 而在颤振速度 V_F 的去心邻域内, $\|P\|_\infty$ 均为有限值. 据此, 可以仅用频域气动力来考察颤振稳定性.

由于 P 与 F 互为逆矩阵, 由式(4)可有

$$\|P\|_\infty = \sup_{\omega} \underline{\sigma}^{-1}[F(j\omega)]. \quad (6)$$

对于气动弹性系统这样的连续参数系统, F 为连续函数矩阵, 其奇异值也是连续的^[10]. 因此, 在颤振速度附近, $\|P\|_\infty$ 也为连续. 由此可以制定出相应的算法, 用于颤振临界速度的求解.

3 算法的引入(Introduction of the algorithm)

式(5)保证了在颤振临界速度 V_F 附近, $\|P\|_\infty$ 趋于无穷大; 事实上, 线性气动弹性系统的颤振临界点是唯一的. 结合这两点, 可有如下推论:

推论 1 存在 $dV > 0$, 使得

$$\max_{0 \leq V \leq V_F + dV} \|P\|_\infty = \|P(V_F)\|_\infty = \infty.$$

引入参数 dV 是为了保证求解过程中可以获得包含 V_F 的速度区间. ω 在覆盖参与计算的模态频率区间内取值. 实际数值计算一般仅能在有限个离散频率点上进行, 故式(5)所述极限值难以达到. 但推论1仍能保证: 在颤振临界速度所在区间内, $\|P\|_\infty$ 存在一极大值点, 从而可以用来搜索颤振临界点.

由推论1和以上分析, 可以通过逐渐增加风速, 以较密的频率间隔, 结合式(3)(6)来求得 $\|P\|_\infty$, 进而搜索 $\|P\|_\infty$ 极大值对应的速度区间, 并采用二分法细分查找, 直至获得满足精度要求的颤振临界速度解. 算法具体实现如下:

Step 1 给定频率范围和频率间隔, 在风速 $V^{(l)}$ 上计算相应的 $\|P(V^{(l)})\|_\infty$;

Step 2 增加风速 $V^{(l)} = V^{(l+1)} + dV$, 计算 $\|P(V^{(l+1)})\|_\infty$. 重复这一过程, 直至速度区间 $[V^{(l-1)}, V^{(l+1)}]$ 上获得局部极大值 $\|P(V^{(l)})\|_\infty$;

Step 3 在区间 $[V^{(l-1)}, V^{(l+1)}]$ 上用二分法查找 $\max \|P\|_\infty$, 其对应的风速和频率, 即为颤振临界速度 V_F 和颤振频率 ω_F .

注意在Step 2中用到了局部极大值, 若 $\|P\|_\infty$ 在较低风速 $V < V_F$ 下呈现极大值波动变化, 那么算法失效, 故而需要引入有效性判据来判定 $\|P\|_\infty$ 发生突变的速度点. 这里采用了如下的形式

$$\min_i \|P(V^{(i)})\|_\infty / \|P(V^{(l)})\|_\infty < \epsilon, \quad (7)$$

其中 $\epsilon < 1$ 为阈值, 满足该式的 $\|P\|_\infty$ 点为有效局部极大值. 一般地, 当速度取点越密, 即增幅 dV 越小, 发生突变时式(7)左端项就越小. 可以预见 $V^{(l)} \rightarrow V_F$ 时, 该项趋于零. 本文算例中 ϵ 取为0.15. 对于实际气动弹性系统, 当 $V \ll V_F$ 时, $\|P\|_\infty$ 一般不会发生类似在颤振速度 V_F 附近的剧烈增长.

4 数值算例(Numerical example)

根据上述算法步骤, 编制了计算程序, 对一个标准机翼算例HA145B^[11]进行了颤振特性计算, 与MSC/NASTRAN软件 $p-k$ 法的计算结果进行对比, 以验证算法的精度.

计算的频率区间为 $[1, 400]$ rad/s, 覆盖机翼的前10阶弹性模态频率, 计算的频率间隔为0.5 rad/s. 二分法搜索速度区间的收敛精度设为1 m/s, 即区间长度不足1 m/s时计算结束. 颤振特性分析结果见表1.

表1 HA145B颤振分析结果
Table 1 Flutter results for HA145B

| 算法 | $V_F / (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$ | ω_F / Hz |
|---------|--|------------------------|
| $p-k$ 法 | 321.9 | 3.06 |
| 本文方法 | 322.2 | 3.09 |

由表1可知,采用本文算法与经典解法所得结果基本一致.可见基于 H_∞ -范数的颤振分析方法具有很高的求解精度.

计算过程中得到的 $\|P\|_\infty$ 随风速变化趋势见图1.由图1可知随风速增加,系统 H_∞ -范数先减小后增加,到达一极大值点后又开始减小.然而,需要注意的是,在过了颤振临界点之后,系统颤振失稳,所得 H_∞ -范数不再具有实际意义.但为了适应算法需要,这里仍用其辅助求得 H_∞ -极大值点.在越过极大值点后, $\|P\|_\infty$ 的减小并不代表气动弹性系统稳定性的恢复.因为此时已经发生了颤振,振动幅值发散,频域非定常气动力失效,故该段转折曲线仅起到标示颤振临界点的作用.

图1中仅发现一处局部极大值点,且满足式(7)的有效性判据.在其邻域区间内采用二分法搜索,即得到表1结果,同时也验证了在颤振速度附近 H_∞ -范数发生突变的结论.对应于较低风速时, H_∞ -范数曲线并未出现极大值波动,变化较为平缓,表明此时系统的稳定特性变化不大,印证了前文的论述.

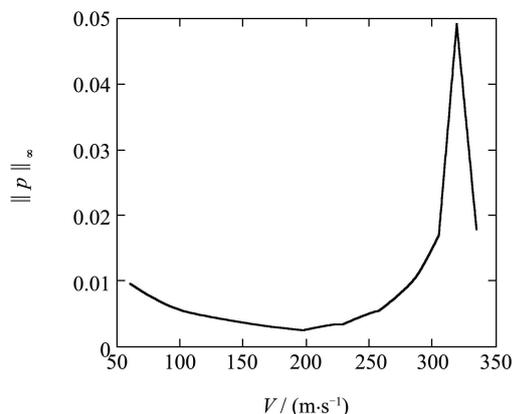


图1 $\|P\|_\infty$ 随风速变化曲线

Fig. 1 $\|P\|_\infty$ curve as a function of velocity

图1曲线显示的 $\|P\|_\infty$ 幅值都不大,即使在颤振临界速度附近,其幅值仍然较小,故其绝对幅值的参考意义不大.但在颤振临界速度附近, $\|P\|_\infty$ 幅值的相对变化极为明显,从而验证了本文算法以此作为搜索颤振临界点判据的合理性.此外还表明,虽然式(5)所述的极限值并非总能在实际计算中达到,但其仍可以用来指示颤振临界速度所在的区间.

5 结论(Conclusions)

根据气动弹性系统传递函数矩阵的 H_∞ -范数在颤振临界速度附近取极大值的特点,发展了一种基于 H_∞ -范数的频域颤振分析方法.结合 H_∞ -范数的频域求解,可以直接应用频域气动力来进行颤振分析.对比传统方法,本文方法属于完全频域方法,无需求解颤振特征根,具有算法简洁、自动化程度高的优点.数值算例显示,本文方法结果具有良好的精度.

参考文献(References):

- [1] DOWELL E H, CLARK R, COX D, et al. *A Modern Course in Aeroelasticity*[M]. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic, 2004.
- [2] 管德. 气动弹性力学手册[M]. 北京: 航空工业出版社, 1994. (GUAN D. *Aeroelasticity Manual*[M]. Beijing: Aeronautical Industry Press, 1994.)
- [3] THEODORSEN T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter, NACA TR-496, 1935[C] // GARRICK I E. *AIAA Selected Reprint Series*. New York: AIAA, 1969, 5: 22 - 31.
- [4] HASSIG H J. An approximate true damping solution of the flutter equation by determinant iteration[J]. *Journal of Aircraft*, 1971, 8(11): 885 - 889.
- [5] SCHUSTER D M, LIU D D, HUTTSELL L J. Computational aeroelasticity success, progress, challenge[J]. *Journal of Aircraft*, 2003, 40(5): 843 - 856.
- [6] ZAMES G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, 26(2): 301 - 320.
- [7] SEDDIK M D. MIMO disturbance and plant uncertainty attenuation by feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(12): 2099 - 2112.
- [8] 马新军, 向少华, 胥布工, 等. 带非线性扰动的不确定多时变时滞系统 H_∞ 鲁棒稳定性[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(4): 631 - 635. (MA Xinjun, XIANG Shaohua, XU Bugong, et al. H_∞ robust stability for uncertain systems with multiple time-varying delays and nonlinear perturbations[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(4): 631 - 635.)
- [9] 谢立, 刘济林, 许晓鸣. 不确定多重时滞随机中立系统鲁棒 H_∞ 控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(6): 923 - 928. (XIE Li, LIU Jilin, XU Xiaoming. Robust H_∞ control for uncertain stochastic neutral systems with multiple time delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(6): 923 - 928.)
- [10] RUDIN W. *Real and Complex Analysis*[M]. New York, American: McGraw Hill Book Company, 1966.
- [11] RODDEN W P, JOHNSON E H. *MSC/NASTRAN Aeroelastic Analysis User's Guide*[M]. Los Angeles, American: MacNeal-Schwendler, 1994.

作者简介:

杨智春 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事气动弹性、自适应机翼、振动控制、结构健康检测和智能结构研究, E-mail: yangzc@nwpu.edu.cn;

谷迎松 (1981—), 男, 博士研究生, 主要从事气动伺服弹性研究, E-mail: xp@mail.nwpu.edu.cn.