第 26 卷第 6 期
2009 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 6
Jun. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)06−0701−03

系数为对称梯形模糊数的模糊线性规划

朱佳翔, 谭清美, 荆象源, 董　锋

(南京航空航天大学 经济与管理学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 针对模糊系数的线性规划, 提出了一种系数为对称梯形模糊数的线性规划的方法, 同时得出一些定理、命题以及相应的算法, 并通过实例验证了该方法的有效性. 该方法与常规方法的不同之处在于无须将模糊线性规划转化为经典线性规划就能得到满意的模糊优化解, 因此提出的方法所取得的规划结果更加满足决策者的需要.

关键词: 对称梯形模糊数; 模糊优化解; 基本可行解; 模糊线性规划

中图分类号: C934　　**文献标识码:** A

Fuzzy linear programming with symmetrical trapezoidal fuzzy coefficients

ZHU Jia-xiang, TAN Qing-mei, JING Xiang-yuan, DONG feng

(Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

Abstract: In dealing with the linear programming with fuzzy coefficients, we propose a linear programming method involving symmetrical trapezoidal fuzzy numbers, and give the corresponding theorems, propositions and algorithms. The efficiency of the method is demonstrated by an example. The proposed method differs from the conventional ones in the fact that the optimal solution can be obtained without transforming it into the classical linear programming. This makes the results more desirable to the decision makers.

Key words: symmetrical trapezoid fuzzy number; fuzzy optimal solution; basic feasible solution; fuzzy linear programming

1　引言(Introduction)

在社会经济系统中, 许多因素不能用精确的数量来描述. 模糊数学为描述这些因素提供了一个有效的数学工具. 近年来, 除了将模糊数学应用于混沌控制[1]外, 具有模糊系数的线性规划理论[2,3]得到了广大学者的关注.

国外学者Bellman等人提出了模糊环境下决策问题及求解的方法之后, Tanaka等人开创性提出模糊线性规划[4,5]理论. Maleki等人运用模糊数的比较方法获得了最优解[6].

国内学者梁志贞, 施鹏飞等人提出了一种具有三角模糊系数的线性规划方法[7], 但需将它转化为常规线性规划才能得到最优解. 闫立梅提出了系数为梯形模糊数的可能性线性规划问题[8], 得到了一定置信水平下的经典等价条件, 并用单纯形法求得其最优近似解. 其他方法可参考文献[9].

2　知识准备(Knowledge preparation)

定义 1　$\mathbb{R}$上的一个模糊集$\tilde{a}$是一个对称梯形模糊数, 若存在实数a_1和a_2, $a_1 \leqslant a_2$, 则有如下关系式成立:

$$\tilde{a}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{h} + \dfrac{h-a_1}{h} \in [a_1 - h, a_1], \\ 1 \in [a_1, a_2], \\ \dfrac{-x}{h} + \dfrac{a_2+h}{h} \in [a_2, a_2+h]. \\ 0. \end{cases} \tag{1}$$

令$\tilde{a} = [a_1, a_2, h, h]$和$\tilde{b} = [b_1, b_2, k, k]$是两个对称梯形模糊数, 则$\tilde{a}$和$\tilde{b}$的算子如下:

加法:

$$\tilde{a} + \tilde{b} = [a_1, a_2, h, h] + [b_1, b_2, k, k] = [a_1+b_1, a_2+b_2, hg, h+k]. \tag{2}$$

减法:

$$\tilde{a} - \tilde{b} = [a_1, a_2, h, h] - [b_1, b_2, k, k] = [a_1-b_1, a_2-b_2, h-k, h-k]. \tag{3}$$

乘法:

$$\tilde{a}\tilde{b} = [a_1, a_2, h, h]\,[b_1, b_2, k, k]. \tag{4}$$

收稿日期: 2007−08−10; 收修改稿日期: 2008−09−18.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70571061, 51685168); 江苏软科学资助项目(BR2007038).

定义 2 令$\tilde{a}=[a_1,a_2,h,h]$和$\tilde{b}=[b_1,b_2,k,k]$是两个对称梯形模糊数, 当且仅当$\frac{(a_1-h)+(a_2+h)}{2}<\frac{(b_1-k)+(b_2+k)}{2}$; 或者$\frac{a_1+a_2}{2}<\frac{b_1+b_2}{2}$; 或者$\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{b_1+b_2}{2}, b_1<a_1, b_2<b_2$; 或者$\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{b_1+b_2}{2}, b_1=a_1, a_2=b_2$等上述几种情景之一发生时, 可定义"$\leqslant$"关系为$\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$(或者$\tilde{b}\geqslant\tilde{a}$).

定理 1 对于任何对称梯形模糊数$\tilde{a},\tilde{b}$和$\tilde{c}$, 下列等式成立:

1) $\tilde{c}(\tilde{a}+\tilde{b})\approx(\tilde{c}\tilde{a}+\tilde{c}\tilde{b})$;

2) $\tilde{c}(\tilde{a}-\tilde{b})\approx(\tilde{c}\tilde{a}-\tilde{c}\tilde{b})$.

定理 2 "$\leqslant$"在对称梯形模糊数中是一种偏序关系: "$\leqslant$"关系在对称梯形模糊数中是一个线性次序关系. 对于任意两个对称模糊数$\tilde{a},\tilde{b}$; 假定$\tilde{a}\leqslant\tilde{b}$时, $\tilde{a}\leqslant(1-\lambda)\,\tilde{a}+\lambda\tilde{b}\leqslant\tilde{b}$, 则$\lambda$的取值范围是$0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

定义 3 对于任意对称模糊数$\tilde{x}$, 当$a\geqslant 0$和$h\geqslant 0$时, $\tilde{x}\geqslant[-a,a,h,h]$, 则可定义$\tilde{x}\geqslant 0$, 也可用$\tilde{0}$来表示$[-a,a,h,h]$, 注意$\tilde{0}$等价于$[0,0,0,0]=0$.

定义 4 令$F\,(S)$是所有对称梯形模糊数的集合, 模糊线性规划模型如下:

$$\begin{cases}\max\ \tilde{Z}\approx\sum\limits_{j=1}^{n}\tilde{c}_j\tilde{x}_j,\\ \text{s.t. } \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{x}_j\leqslant\tilde{b}_i,\ i=1,2,3,\cdots,m_0,\\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\tilde{x}_j\geqslant\tilde{b}_i,\ i=m_0+1,m_0+2,\cdots,m,\\ \qquad \tilde{x}_j\geqslant 0,\ j=1,2,3,\cdots,n,\end{cases}\tag{5}$$

此处$a_{ij}\in\mathbb{R}, \tilde{c}_j,\tilde{x}_j,\tilde{b}_i\in F\,(s), i=1,2,3,\cdots,m, j=1,2,3,\cdots,n$.

定义 5 当$\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\cdots,\tilde{x}_n)\in F^n\,(S)$时, 若$\tilde{x}_i\in F\,(S)$, 满足约束(5), 则该线性规划有模糊可行解.

定义 6 令Q是式(5)的所有模糊可行解, 如果$\tilde{c}\tilde{x}_0\geqslant\tilde{c}\tilde{x},\forall\tilde{x}\in Q$, 此处$\tilde{c}=(\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\cdots,\tilde{c}_n)$及$\tilde{c}\tilde{x}=\tilde{c}_1\tilde{x}_1+\tilde{c}_2\tilde{x}_2+\cdots+\tilde{c}\tilde{x}_n$, 可行解$\tilde{x}_0\in Q$则是式(5)的一个模糊可行解.

定义 7 令$\tilde{X}=(\tilde{x}_1,\tilde{x}_2,\tilde{x}_3,\cdots,\tilde{x}_n)$, 假设$\tilde{X}$是$A\tilde{X}\approx\tilde{b}$, $\tilde{x}_j\approx[-\alpha_j,\alpha_j,h_j,h_j]$, 对于$\alpha_j\geqslant 0$和$h_j\geqslant 0$; 那么$\tilde{X}$有一些非0成分. 假定这些非0成分的列向量$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_k$线性无关, 则$\tilde{X}$是一个模糊基本解.

3 模糊可行解(Feasible fuzzy solution)

模糊规划问题转化成标准形式如下:

$$\begin{cases}\max\ \tilde{Z}\approx\tilde{C}\tilde{X},\\ \text{s.t. } A\tilde{X}\approx\tilde{b},\ \tilde{X}\geqslant 0.\end{cases}\tag{6}$$

此处A是一个实矩阵$(m\times n)$. $\tilde{b}\,(m\times 1), \tilde{C}\,(1\times n), \tilde{X}\,(n\times 1)$是由对称梯形模糊数组成的模糊矩阵.

3.1 模糊基本可行解的改进(Improvement of the basic feasible fuzzy solution)

定理 3 令$\tilde{X}_B=B^{-1}\tilde{b}$是式(6)的一个模糊基本可行解, 如果$A$中的任意一列$a_j$不在$B$中, 对于$i,\ i\in\{1,2,3,\cdots,m\}$, 条件$(\tilde{Z}_j-\tilde{c}_j)\prec 0, y_{ij}>0$成立, 那么通过$a_j$替代$B$中的一列, 就有可能得到一个模糊基本可行解.

定理 4 如果$\tilde{X}_B=B^{-1}\tilde{b}$是式(6)的模糊基本可行解, $\tilde{Z}_0\approx\tilde{C}_B\tilde{X}_B$是目标函数的模糊值, 且如果$\hat{\tilde{X}}_B$是另一个模糊可行解, 通过接纳一个非基本列向量$a_j$, $\forall\,(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\prec 0-_{ij}>0$, 对于$i,i\in\{1,2,3,\cdots,m\}$, 可得到$\hat{\tilde{Z}}\approx\hat{\tilde{C}}_B\hat{\tilde{X}}_B$, 从而$\hat{\tilde{z}}\geqslant\tilde{z}_0$.

3.2 无界解(Unbounded solution)

对于$(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\prec 0, y_{ij}>0$, 值得考虑将$A$中($B$中没有)一个列向量$a_j$单独插进基里. 如果$\tilde{x}=[x_1,x_2,h,h]\geqslant\tilde{0}$, 且$\lambda>0$, 那么$\lambda\tilde{x}=[\lambda x_1,\lambda x_2,\lambda h,\lambda h]\geqslant\tilde{0}$. 当$\lambda\tilde{x}\geqslant\tilde{y}$, 若$\lambda>0,(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\prec\tilde{0}$, 则$\lambda(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\prec\tilde{0}$.

定理 5 令$\tilde{X}_B=B^{-1}\tilde{b}$是式(6)的一个模糊基本可行解, 如果$A$中(不在$B$中)存在一个向量$a_j$, 对于任一$i,\ i\in\{1,2,3,\cdots,m\}$, 使$(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\prec\tilde{0}$, 且$y_{ij}\leqslant 0$; 则模糊线性规划(6)有一个无界解.

3.3 优化条件(The optimized condition)

在经典线性规划中, 若在基本矩阵中插入和删除向量将导致下列情形之一发生:

1) 存在j, 使$(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\prec\tilde{0},\ y_{ij}\leqslant 0,\ i=1,2,3,\cdots,m$;

2) 对于任一j, 有$(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\geqslant\tilde{0}$.

在情形1)下可得到无界解, 在情形2)下可得到优化解.

定理 6 如果$\tilde{X}_B=B^{-1}\tilde{b}$是式(6)的模糊基本可行解, 若对于$A$的所有列向量$a_j$, 有$(\tilde{z}_j-\tilde{c}_j)\geqslant\tilde{0}$, 则$\tilde{X}_B$是式(6)的模糊优化解.

4 算法举例(Example of the algorithm)

一家公司生产3种产品D1, D2及D3, 3种产品有3种不同的设备A,B,C加工. 假定该公司所有产品都能在市场上销售掉, 试分析公司如何对每天加工产品时间进行决策以使利润最大化.

分析 由于每件产品的利润, 每台设备的加工时间及每种产品的加工数量都是不确定的, 为此建

立模糊线性规划问题来解决此问题, 用对称梯形模糊数表示任一不确定的值. D1的利润接近于10, 可用对称梯形模糊数表示为$[9,11,2,2]$, 同理D2利润可表示为$[14,16,3,3]$, D3利润可表示为$[19,21,2,2]$, 用公式来表示该模糊规划问题如下:

$$\max \tilde{z} \approx [9,11,2,2]\tilde{x}_1 + [14,16,3,3]\tilde{x}_2 + [19,21,2,2]\tilde{x}_3,$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 10\tilde{x}_1 + 20\tilde{x}_2 + 30\tilde{x}_3 \leqslant [485,515,6,6], \\ 20\tilde{x}_1 + 40\tilde{x}_3 \leqslant [580,620,8,8], \\ 30\tilde{x}_1 + 40\tilde{x}_2 \leqslant [690,710,5,5], \\ \tilde{x}_1 \geqslant \tilde{0},\ \tilde{x}_2 \geqslant \tilde{0},\ \tilde{x}_3 \geqslant \tilde{0}. \end{cases}$$

引进松弛模糊变量$\tilde{s}_1$, $\tilde{s}_2$和$\tilde{s}_3$, 使$\max \tilde{z} \approx \tilde{C}\tilde{X}$服从于$A\tilde{X} \approx \tilde{b}$及$\tilde{X} \geqslant 0$.

表 1 单位产品的生产时间及设备每天产能

Table 1 Production time of unit product and per day productivity of equipments

设备	D1	D2	D3	产能/(分/天)
A	10	20	30	500
B	20	—	40	600
C	30	40	—	700

1) 初始迭代.

根据$\tilde{X}_B = B^{-1}\tilde{b}$得出初始模糊基本可行解:

$$\tilde{x}_1 = [0,0,0,0],\ \tilde{x}_2 = [0,0,0,0],$$
$$\tilde{x}_3 = [0,0,0,0],\ \tilde{s}_1 = [485,515,6,6],$$
$$\tilde{s}_2 = [580,620,8,8],\ \tilde{s}_3 = [690,710,5,5],$$

目标函数的目标值为

$$\tilde{z} \approx [0,0,0,0],\ \tilde{z}_3 - \tilde{c}_3) \approx [-21,-19,2,2] \prec \tilde{0}.$$

根据定理3,4, 得到一个新的模糊基本可行解为

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = [0,0,0,0],\ \tilde{x}_3 = [\frac{580}{9}, \frac{620}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9}]$$
$$\tilde{s}_1 = [\frac{425}{9}, \frac{1145}{9}, \frac{194}{9}, \frac{194}{9}],\ \tilde{s}_2 = [0,0,0,0],$$
$$\tilde{s}_3 = [690,710,5,5].$$

改进的目标函数模糊值为: $\tilde{z} \approx [\frac{11020}{9}, \frac{13020}{9}, \frac{1752}{9}, \frac{1752}{9}]$, 满足$(\tilde{z}_3 - \tilde{c}_3) \prec \tilde{0}$.

2) 二次迭代.

与上述步骤相似, 再次迭代得到一个新的模糊基本可行解为

$$\tilde{x}_1 = [0,0,0,0],\ \tilde{x}_2 = [\frac{425}{81}, \frac{1145}{81}, \frac{194}{81}, \frac{194}{81}],$$
$$\tilde{x}_3 = [\frac{580}{9}, \frac{620}{9}, \frac{8}{9}, \frac{8}{9}],\ \tilde{s}_1 = [0,0,0,0],$$
$$\tilde{s}_2 = [0,0,0,0],\ \tilde{s}_3 = [\frac{8075}{81}, \frac{24045}{81}, \frac{1552}{81}, \frac{1552}{81}].$$

模糊目标函数的改进值

$$\tilde{z} \approx [\frac{105130}{81}, \frac{135500}{81}, \frac{20840}{81}, \frac{20840}{81}].$$

根据定理6所得模糊基本可行解是一个模糊优化解.

5 结语(Conclusion)

提出一种具有对称梯形模糊系数的线性规划方法, 并得出一些定理和命题以及相应的算法, 通过一个实际算例说明了这种规划方法的有效性和可行性. 本文的方法与一些现有的方法有较大的改进, 即无须将模糊线性规划问题转化为常规线性规划问题就能得到最优解, 为模糊规划研究提供一个建设性参考.

参考文献(References):

[1] 修春波, 刘向东, 张宇河. 混沌优化与模糊控制在混沌控制中的应用[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(1): 63 – 67.
(XIU Chunbo, LIU Xiangdong, ZHANG Yuhe. Applications of chaos optimizationand fuzzycontrol inchaos control[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(1): 63 – 67.)

[2] STANLEY L E, LI R J. Fuzzy multiple objective programming and compromise programming with pareto optimum[J]. *Fuzzy Sets and System*, 1993, 53(3): 275 – 288.

[3] 曹炳元. 应用模糊数学与系统[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(CAO Bingyuan. *Application of Fuzzy Mathematics and System*[M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[4] TANAKA H, OKUDA T, ASAI K. On fuzzy mathematical programming[J]. *Journal of Cybernetics* , 1974, 13(2): 37 – 46.

[5] ZIMMERMANN H J. Optimization in fuzzy environment[C] *//XXI International TIMES and the 46th ORSA Conference*. San Juan: Puerto Rioco house, 1974.

[6] MALEKI H R, TATA M, MASHINCHI M. Linear programming with fuzzy variables[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2000, 109(6): 21 – 33.

[7] 梁志贞, 施鹏飞. 一种具有三角模糊系数的线性规划方法[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(12): 1818 – 1820.
(LIANG Zhizhen, SHI Pengfei. A new approach to linear programming with triangular fuzzy coefficients[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(12): 1818 – 1820.)

[8] 闫立梅. 系数为梯形模糊数的可能性线性规划[J]. 长春师范学院学报(自然科学版), 2005, 24(5): 13 – 15.
(YAN Limei. Possibilistic linear programming with fuzzy trapezoidal number coefficients[J]. *Journal of Chang Chun Teachers College((Natural Science)*, 2005, 24(5): 13 – 15.)

[9] GANESAN K, VEERAMANI P. Fuzzy linear programs with trapezoidal fuzzy numbers[J]. *Ann Operation Research*, 2006, 143(8): 305 – 315.

作者简介:

朱佳翔 (1972—), 男, 博士研究生, 研究方向为管理数学方法、区域经济及技术经济, E-mail: kjxzjx@126.com;

谭清美 (1962—), 男, 南京航空航天大学区域经济研究所所长, 教授, 博士生导师, 研究方向为区域经济、产业经济及技术经济;

荆象源 (1972—), 男, 博士研究生, 研究方向为管理数学方法、区域经济及技术经济;

董 锋 (1978—), 男, 博士研究生, 研究方向为区域经济、产业经济及技术经济.