

## 网络控制系统稳定性的图理论

李金娜<sup>1,2,3</sup>, 张庆灵<sup>1,4</sup>, 于海斌<sup>3</sup>

(1. 东北大学 系统科学研究所, 辽宁 沈阳 110004; 2. 沈阳化工学院 数理系, 辽宁 沈阳 110142;

3. 中国科学院沈阳自动化研究所 工业信息学研究室, 辽宁 沈阳 110016;

4. 东北大学 流程工业综合自动化教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110004)

**摘要:** 针对具有有界时延和数据包丢失的网络控制系统, 提出了一种新的稳定性判据. 基于Lyapunov方法和图论理论, 给出非线性离散和连续网络控制系统渐近稳定的充分条件, 获得保持这两类系统稳定的最大允许时延界, 得到控制器设计方法. 并且, 利用区间矩阵的谱特征, 给出网络控制系统区间稳定的充分条件. 设计算法, 获得比例积分反馈控制器增益. 算例表明所提方法的有效性.

**关键词:** 网络控制系统; 赋权有向图; 最大出权度; 最大允许时延界; 区间稳定性

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Graphic theory on stability of networked control systems

LI Jin-na<sup>1,2,3</sup>, ZHANG Qing-ling<sup>1,4</sup>, YU Hai-bin<sup>3</sup>

(1. Institute of systems science, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China;

2. Department of Mathematics and Physics, Shenyang Institute of Chemical Technology, Shenyang Liaoning 110142, China;

3. Department of Industrial Informatics, Shenyang Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Shenyang Liaoning 110016, China;

4. Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industry, Ministry of Education, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

**Abstract:** A new criterion on stability is presented for networked control systems with bounded time-delays and data packet dropout. Based on the Lyapunov method and the graph theory, we develop the sufficient conditions of the asymptotic stability for nonlinear discrete-time and continuous-time networked control systems, respectively. The allowable upper bounds of time-delays that will preserve the stability of the two classes of systems are determined; and the process of controller design is presented. Moreover, a sufficient condition for the interval stability of networked control systems is also given in terms of the spectral characteristics of interval matrices. The gain of the proportional-integral feedback controller can be determined by the algorithm. Numerical examples are given to illustrate the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** networked control systems(NCSs); weighted diagraph; maximum output weight degree; maximum allowable delay bound; interval stability

### 1 引言(Introduction)

网络控制系统(networked control systems, NCSs)是指控制节点通过网络集成的闭环反馈控制系统. 稳定性问题是网络控制系统的一个基本问题, 已经取得了许多研究成果<sup>[1~5]</sup>. 文献[1,2]研究了非线性NCSs的稳定性问题. 文献[3]针对非线性连续系统, 根据时延变化率, 给出获得最大允许时延界(maximum allowable delay bound, MADB)的方法. 但针对非线性NCSs, 特别是针对非线性离散NCSs, 研究保持系统稳定的MADB的文献还不多见. 近年

来区间系统的稳定性问题已引起了国内外控制界的广泛关注, 但针对网络控制系统研究区间稳定性的文献还不多见. 值得注意的是在上述文献[1~5]中, 稳定性条件都是通过Lyapunov方法得到, 控制器通过线性矩阵不等式(LMI)获得. 图论方法在工程等领域已有广泛的应用, 对于大系统, 分散控制及系统的能控性方面也已取得了一定成就<sup>[6,7]</sup>, 但应用图论理论研究网络控制系统的文献还不多见.

本文基于Lyapunov方法和图论理论, 针对非线性离散和连续系统, 研究了NCSs的稳定性问题, 分别

给出保持两类系统稳定的MADB. 利用区间矩阵的谱特征, 得到网络控制系统区间稳定的充分条件, 进一步, 应用算法获得比例积分反馈控制器增益. 不同于依据LMI获得控制器的方法<sup>[1~5]</sup>, 应用本文算法求解控制器, 避免了不等式之间的相互转换, 并且在同一时延和丢包情况, 获得多个比例积分反馈控制器增益, 从而更有效地镇定系统. 算例表明所提方法的有效性.

规定: 对于矩阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  和  $B = (b_{ij})_{n \times n}$ ,  $A < B$  是指  $a_{ij} < b_{ij}$ .  $\|A\|$  表示矩阵的  $\infty$  范数, 即  $\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .  $A^-$  表示矩阵  $A$  的广义逆矩阵.

## 2 主要概念和问题描述(Main conceptions and problem description)

### 2.1 主要概念(Main conceptions)

$G(A)$  称为方阵  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  的伴随赋权有向图, 它使得有向边  $\langle x_i, x_j \rangle \in E(G)$  赋权  $w_{ij} = |a_{ij}| \neq 0$ , 否则  $w_{ij} = 0$ , 即无有向边  $\langle x_i, x_j \rangle$ , 其中  $x_i, x_j \in V(G)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ),  $V(G)$  和  $E(G)$  分别表示图  $G$  的顶点集和边集. 顶点  $x$  的出权度  $d_{G_w}^+(x)$  表示射出顶点  $x$  的边的权和.  $\Delta_w^-(G)$  表示图  $G$  的最大顶点出权度, 即

$$\Delta_w^-(G) = \max\{d_{G_w}^+(x) | x \in V(G)\}.$$

图  $H$  是图  $G$  的子图(记为  $H \subseteq G$ ), 如果  $V(H) \subseteq V(G)$ , 同时,  $E(H) \subseteq E(G)$ , 并且  $\phi_H$  是  $\phi_G$  在  $E(H)$  上的限制. 假设  $V'$  是  $V(G)$  的一个非空子集, 以  $V'$  为顶点集, 以两端点均在  $V'$  中的边的全体为边集所组成的子图, 称为图  $G$  的由  $V'$  导出的子图, 记为  $G[V']$ .

有向图  $G$  的1因子  $F_\pi$  是一组两两没有公共顶点的有向圈的生成集.  $F_\pi$  的1个有向圈  $C$  的权  $W_t C = -(C \text{ 中所有弧的权的积})$ ,  $F_\pi$  的权  $W_t F_\pi = F_\pi$  中所有圈的权的积. 阶为  $n$  的赋权无向图  $G$  的Laplacian矩阵  $L = (l_{uv})$  为

$$l_{uv} = \begin{cases} \sum_{v \in N_u} W_{uv}, & u = v, \\ -W_{uv}, & (u, v) \in E, \\ 0, & (u, v) \notin E. \end{cases}$$

其中:  $v \in N_u$ ,  $N_u$  表示与顶点  $u$  相邻的顶点集,  $W_{uv}$  为边  $(u, v)$  上的权.

设  $A^I = (a_{ij}^I)$  是区间矩阵,  $a_{ij}^I := [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ ,  $\underline{a}_{ij}$  和  $\bar{a}_{ij}$  分别是区间  $a_{ij}^I$  的下界和上界. 记

$$\underline{A} = (\underline{a}_{ij}), \bar{A} = (\bar{a}_{ij}),$$

那么  $A^I := [\underline{A}, \bar{A}]$ . 设

$$B^I = (b_{ij}^I), A^I + B^I = (a_{ij}^I + b_{ij}^I),$$

$$A^I \cdot B^I = (\sum_s a_{is}^I b_{sj}^I), |a_{ij}^I| = \max\{|\underline{a}_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\},$$

$$|A^I| = (|a_{ij}^I|), |A| = (|a_{ij}|), d(a_{ij}^I) = \bar{a}_{ij} - \underline{a}_{ij},$$

$$M_j(A^I) =$$

$\{(A^I)^m : \text{矩阵}(A^I)^m (m \geq 1) \text{ 的第 } j \text{ 列至少包含一个区间不退化为点区间}\},$

点区间指  $d(a_{ij}^I) = 0$ . 区间矩阵的谱半径  $\rho(A^I) = \sup_{A \in A^I} \rho(A)$ .

### 2.2 问题描述(Problem description)

考虑具有有界时延和数据包丢失的NCSs,  $\tau_{sc}^k$  和  $\tau_{ca}^k$  分别表示传感器-控制器和控制器-执行器时延. 假设传感器和执行器均为时间驱动, 控制器为事件驱动, 网络时延有界, 即  $0 \leq \tau^k = \tau_{sc}^k + \tau_{ca}^k \leq h_1 T$ ,  $T$  是采样周期, 连续数据包丢失最大值为  $h_2$ . 令  $h = h_1 + h_2$ . 考虑如下连续系统:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

其中:  $x(t)$ ,  $u(t)$  分别为对象状态、对象输入,  $A$ ,  $B$  为适维矩阵.

## 3 非线性NCSs稳定性分析与控制器设计(Stability analysis and controller design of nonlinear NCSs)

如果系统(1)中存在非线性部分, 即

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)) + Bu(t). \quad (2)$$

其中:  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $f(0) = 0$ , 当  $x \neq 0$ ,  $f(x) \neq 0$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \|f(x)\| / \|x\| = 0. \quad (3)$$

### 3.1 非线性离散NCSs的稳定性(Stability of the nonlinear discrete-time NCSs)

设计无记忆状态反馈控制律

$$u_k = -Kx_k. \quad (4)$$

其中  $K$  为反馈增益矩阵. 由于时延的存在, 且根据假设, 在  $kT$  时刻, 执行器选取最新信息  $u_{k-i_k}$ ,  $i_k \in \{0, 1, \dots, h\}$ , 有  $u_{k-i_k} = -Kx_{k-i_k}$ . 则离散化闭环NCSs如下:

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k - \bar{B}Kx_{k-i_k} + H(x_k). \quad (5)$$

其中:

$$x_k = x(kT), \bar{A} = e^{AT}, \bar{B} = \int_0^T e^{As} ds B,$$

$$H(x(kT)) = \int_0^T e^{As} f(x((k+1)T - s)) ds.$$

**定理 1** 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$  和  $q > 1$ , 如果存在矩阵  $P > 0$ ,  $K$  满足如下条件:

$$\Delta_w^-(G(\tilde{A})) < 1, \quad (6)$$

$i_k <$

$$\sqrt{\frac{\gamma_3^2 \lambda_{\min}(\Theta) - 2\gamma_1 \gamma_3 \varepsilon q \delta \beta \|P\| - (\varepsilon q \delta \beta)^2 \gamma_1^2 \|P\|}{\gamma_2 \gamma_3^2 \|P\| \|\bar{B}K\| (2\|\bar{A}\| + \varepsilon q \delta \beta / \|P\| + \gamma_2 \|\bar{B}K\|)}}, \quad (7)$$

$$1 - \frac{q \delta \varepsilon \beta}{2 \|P\|} > 0. \quad (8)$$

则闭环NCSs(5)是渐近稳定的. 其中:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \bar{A} - \bar{B}K, \quad \delta = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \quad \beta = \int_0^T e^{\|A\|s} ds, \\ \Theta &= P - \tilde{A}^T P \tilde{A}, \quad \gamma_1 = \|\bar{A}\| + \|\bar{B}K\| q \delta, \\ \gamma_2 &= \|\bar{A} - I\| q \delta + \|\bar{B}K\| q \delta + \frac{q \delta \varepsilon \beta}{2 \|P\|}, \\ \gamma_3 &= 2 \|P\| - q \delta \varepsilon \beta. \end{aligned}$$

证 令  $\delta_l = x_{l+1} - x_l$ , 有

$$x_{k-i_k} = x_k - \sum_{l=k-i_k}^{k-1} \delta_l. \quad (9)$$

选取Lyapunov函数  $V_k(x) = x_k^T P x_k$ , 由式(5)和(9)有

$$\begin{aligned} \Delta V_k &= x_k^T [(\bar{A} - \bar{B}K)^T P (\bar{A} - \bar{B}K) - P] x_k + \\ &2x_k^T (\bar{A} - \bar{B}K)^T P H(x_k) + \\ &2x_k^T (\bar{A} - \bar{B}K)^T P \bar{B}K \sum_{l=k-i_k}^{k-1} [(\bar{A} - I)x_l - \\ &\bar{B}K x_{l-i_l} + H(x_l)] + \sum_{l=k-i_k}^{k-1} [(\bar{A} - I)x_l - \\ &\bar{B}K x_{l-i_l} + H(x_l)]^T (\bar{B}K)^T P \bar{B}K \cdot \\ &\sum_{l=k-i_k}^{k-1} [(\bar{A} - I)x_l - \bar{B}K x_{l-i_l} + H(x_l)] + \\ &2 \sum_{l=k-i_k}^{k-1} [(\bar{A} - I)x_l - \bar{B}K x_{l-i_l} + H(x_l)]^T \cdot \\ &(\bar{B}K)^T P H(x_k) + H^T(x_k) P H(x_k). \end{aligned} \quad (10)$$

由式(3), 对于任意给定的  $\varepsilon > 0$ , 总存在正数  $\alpha$ , 使得对于任意  $\|x(t)\| < \alpha$ , 有  $\|f(x(t))\| < \varepsilon \frac{\|x(t)\|}{2 \|P\|}$ . 进而,

$$\|f(x((l+1)T - s))\| < \varepsilon \frac{\|x((l+1)T - s)\|}{2 \|P\|}. \quad (11)$$

应用Razumikhin定理<sup>[8]</sup>, 对于  $k - i_k \leq l < k$ , 有

$$\|x_l\| \leq q \delta \|x_k\|. \quad (12)$$

同理, 有

$$\|x_{l-i_l}\| \leq q \delta \|x_k\|, \quad \|x_{k-i_k}\| \leq q \delta \|x_k\|, \quad (13)$$

$$\|x(lT + \theta)\| \leq q \delta \|x_k\|. \quad (14)$$

其中:  $\theta = T - s$ ,  $0 \leq s \leq T$ . 由式(11)和式(14), 有

$$\begin{aligned} \|H(x_l)\| &\leq \int_0^T e^{\|A\|s} \|f(x((l+1)T - s))\| ds \leq \\ &\frac{\varepsilon q \delta \beta \|x_k\|}{2 \|P\|}. \end{aligned} \quad (15)$$

同理, 有

$$\|H(x_k)\| \leq \frac{\varepsilon q \delta \beta \|x_{k+1}\|}{2 \|P\|}. \quad (16)$$

只要  $\varepsilon > 0$  充分小, 就有式(8)成立. 由式(5)(13)和式(16), 有

$$\|x_{k+1}\| \leq \frac{(\|\bar{A}\| + \|\bar{B}K\| q \delta)}{1 - \frac{q \delta \varepsilon \beta}{2 \|P\|}} \|x_k\|. \quad (17)$$

显然,  $\Theta > 0$  成立当且仅当  $\tilde{A}$  是Schur矩阵. 由于

$$\Delta_w^-(G(\tilde{A})) = \max_i \sum_{j=1}^n |\vartheta_{ij}| = \|\tilde{A}\| \geq \rho(\tilde{A}),$$

其中  $\tilde{A} = (\vartheta_{ij})$ . 由式(6), 有  $\Theta > 0$ . 由式(10)(12)(13)和式(15)~(17), 有

$$\begin{aligned} \Delta V_k &\leq [-\lambda_{\min}(\Theta) + \frac{2q \delta \varepsilon \beta \gamma_1 \|P\|}{\gamma_3} + \\ &i_k^2 ((2\|\bar{A}\| \|P\| + q \delta \varepsilon \beta) \|\bar{B}K\| \gamma_2 + \\ &\|\bar{B}K\|^2 \|P\| \gamma_2^2) + \frac{(q \delta \varepsilon \beta)^2 \gamma_1^2 \|P\|}{\gamma_3^2} \|x_k\|^2. \end{aligned}$$

由式(7), 有  $\Delta V_k < 0$ , 即闭环系统稳定.

证毕.

**算法 1** 根据如下步骤求控制器:

**Step 1** 令矩阵  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})_{n \times n}$ ,  $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})_{n \times m}$ , 作矩阵对  $(\bar{A}, \bar{B})$  的伴随赋权有向图  $G(V, E, W)$ , 其中  $|V| = n + m$ ,  $x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m$  表示顶点, 有向边  $\langle x_i, x_j \rangle$  和  $\langle x_i, u_j \rangle$  赋权分别为  $|\bar{a}_{ij}| \neq 0$  和  $|\bar{b}_{ij}| \neq 0$ , 如果  $|\bar{a}_{ij}| = 0$  或  $|\bar{b}_{ij}| = 0$ , 无有向边  $\langle x_i, x_j \rangle$  或  $\langle x_i, u_j \rangle$ ;

**Step 2** 去掉图  $G$  中方向得到无向赋权图  $\bar{G}$ ;

**Step 3** 令  $V_0 = \{u_1, \dots, u_m\}$ , 移去图  $\bar{G}$  的Laplacian矩阵  $L$  中相应于顶点集  $V_0$  的所有行和列, 得到矩阵  $L_0$ ,  $D_0$  是由  $L_0$  中主对角元素构成的对角矩阵;

**Step 4** 由式(6), 令  $\bar{A} - \bar{B}K = I - \vartheta D_0^{-1} L_0$ ,  $\vartheta \in (0, 1]$ , 由文献[9], 有  $\rho(\bar{A} - \bar{B}K) < 1$ ;

**Step 5** 选取  $\vartheta$  满足  $\text{rank } \bar{B} = \text{rank}(\bar{B} \bar{A} - I + \vartheta D_0^{-1} L_0)$ , 则  $K_0 = \bar{B}^-(\bar{A} - I + \vartheta D_0^{-1} L_0)$ , 转到Step 9;

**Step 6** 取  $K_0 = \bar{B}^-(\bar{A} - I + \vartheta D_0^{-1} L_0)$ , 如果  $\rho(\bar{A} - \bar{B}K_0) < 1$ , 转到Step 9; 否则, 给定  $E_0$  的

搜索上下界 $M$ 和 $N$ , 增量 $H$ ;

**Step 7** 利用 $E_0 = E_0 + H$ 组合 $E_0$ ;

**Step 8** 令 $K_0 = K_0 + E_0$ , 如果 $\rho(\bar{A} - \bar{B}K_0) < 1$ , 转到Step 9; 否则, 转到Step 7, 直至 $M \leq E_0 \leq N$ ;

**Step 9** 得到控制器增益 $K = K_0$ .

### 3.2 非线性连续NCSs的稳定性(Stability of the nonlinear continuous-time NCSs)

由于网络时延的存在, 有 $u(t) = -Kx(t - \tau)$ , 系统(2)改写为如下闭环连续NCSs:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t - \tau) + f(x(t)). \quad (18)$$

**定理 2** 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $q > 1$ , 如果存在矩阵 $P > 0$ ,  $K$  满足如下条件:

1) 伴随赋权有向图 $G(\Theta)$ 的相应于 $V_i = \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$ 的导出子图 $G_i$ 的所有1因子 $F_{i\pi}$ 的权和

$$(-1)^i W_t \ell_i > 0. \quad (19)$$

2) 网络时延 $\tau$ 满足

$$\tau < \frac{\lambda_{\min}(\Theta) - \varepsilon}{q\delta \|BK\| (2\|P\| (\|A\| + \|BK\|) + \varepsilon)}, \quad (20)$$

则闭环NCSs(18)是渐近稳定的. 其中:

$$\begin{aligned} \Theta &= -(A - BK)^T P - P(A - BK), \\ \delta &= \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}}, \end{aligned}$$

$\ell_i$ 是 $G_i$ 中所有1因子 $F_{i\pi}$ 的集,  $W_t \ell_i$ 是 $\ell_i$ 中所有的 $F_{i\pi}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )的权之和.

**证** 用 $\det(D_{ii})$ 表示矩阵 $\Theta$ 的 $i$ 阶顺序主子式. 由于 $\det(D_{ii}) = (-1)^i W_t \ell_i^{[10]}$ , 由式(19), 有 $\Theta > 0$ . 令

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t + \theta) d\theta,$$

类似定理1的证明, 选取Lyapunov函数 $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$ , 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq \\ &[-\lambda_{\min}(\Theta) + \varepsilon + 2\tau \|P\| \|BK\| (\|A\| q\delta + \\ &\|BK\| q\delta + \frac{\varepsilon q\delta}{2\|P\|})] \|x(t)\|^2. \end{aligned}$$

由式(20), 有 $\dot{V}(x(t)) < 0$ , 即闭环系统稳定.

证毕.

**算法 2** 根据如下步骤求控制器:

**Step 1** 为便于分析, 选取算法1中 $G(V, E, W)$ , 得到矩阵 $L, V_0, L_0$ 和 $D_0$ ;

**Step 2** 由式(19), 令 $A - BK = -\vartheta D_0^{-1} L_0$ ,  $\vartheta > 0$ , 由文献[7], 有矩阵 $A - BK$ 是Hurwitz的;

**Step 3** 选取 $\vartheta$ 满足 $\text{rank}(B) = \text{rank}(B A + \vartheta D_0^{-1} L_0)$ , 则 $K_0 = B^-(A + \vartheta D_0^{-1} L_0)$ , 转到Step 7;

**Step 4** 取 $K_0 = B^-(A + \vartheta D_0^{-1} L_0)$ , 如果矩阵 $A - BK_0$ 是Hurwitz的, 转到Step 7; 否则, 给定 $E_0$ 的搜索上下界 $M$ 和 $N$ , 增量 $H$ ;

**Step 5** 利用 $E_0 = E_0 + H$ 组合 $E_0$ ;

**Step 6** 令 $K_0 = K_0 + E_0$ , 如果矩阵 $A - BK_0$ 是Hurwitz的, 转到Step 7; 否则, 转到Step 5, 直至 $M \leq E_0 \leq N$ ;

**Step 7** 得到控制器增益 $K = K_0$ .

**注 1** 当 $f(x(t)) \equiv 0$ 时, 系统(5)和(18)分别为线性离散和连续NCSs. 定理1和定理2中, 取 $\varepsilon = 0$ , 得到线性NCSs渐近稳定的充分条件, 同时获得保持线性系统稳定的MADB; 当系统(2)在无网络并且 $f(x(t)) \equiv 0$ 的情况下, 定理1和定理2中的条件(6)和(19)分别给出其稳定的充分条件.

**注 2** 算法 2 中, 根据文献[7], 也可以绘制矩阵对 $(A, B)$ 的伴随赋权有向图 $G(V, E, W)$ . 算法1和算法2中, 实际仿真需要初步设定矩阵 $M, N$ 和增量 $H$ 的大致区间, 然后找出敏感区间后再进一步细化搜索参数. 本文所给算法具有一定程度的保守性, 有待今后进一步研究.

## 4 NCSs的区间稳定性分析与控制器设计(Interval stability analysis and controller design of NCSs)

如果系统(1)中矩阵 $A$ 和 $B$ 为区间矩阵, 有

$$\dot{x}(t) = A^I x(t) + B^I u(t). \quad (21)$$

其中:  $A^I = (a_{ij}^I)$ ,  $B^I = (b_j^I)$ 为适维区间矩阵,  $a_{ij}^I := [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$ ,  $b_j^I := [\underline{b}_j, \bar{b}_j]$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . 根据假设, 系统(21)离散为

$$x_{k+1} = \tilde{A}^I x_k + \sum_{s=0}^h \beta_s^k \tilde{B}^I u_{k-s}. \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} x_k &= x(kT), \quad u_k = u(kT), \quad \tilde{A}^I = e^{A^I T}, \\ \tilde{B}^I &= \int_0^T e^{A^I(T-\tau)} d\tau B^I, \\ \beta_s^k &\in \{0, 1\}, \quad \sum_{s=0}^h \beta_s^k = 1. \end{aligned}$$

控制器采用比例积分器:

$$u_k = K_p x_k + T \sum_{s=1}^h k_s u_{k-s}. \quad (23)$$

其中 $K_p, k_s$ 分别为比例和积分增益系数矩阵. 由式(22)和式(23), 有

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (\tilde{A}^I + \beta_0^k \tilde{B}^I K_p) x_k + \\ &\sum_{s=1}^h (\beta_s^k \tilde{B}^I + \beta_0^k \tilde{B}^I k_s T) u_{k-s}. \end{aligned} \quad (24)$$

令  $z_k = [x_k^T \ u_{k-1}^T \ \cdots \ u_{k-h}^T]^T$ , 重写系统(24)为

$$z_{k+1} = \Phi^I z_k. \quad (25)$$

其中

$$\Phi^I = \begin{bmatrix} \tilde{A}^I + \beta_0^k \tilde{B}^I K_p & \beta_1^k \tilde{B}^I + \beta_0^k \tilde{B}^I k_1 T & & \\ K_p & k_1 T & & \\ 0 & I & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \\ \cdots & \beta_{h-1}^k \tilde{B}^I + \beta_0^k \tilde{B}^I k_{h-1} T & \beta_h^k \tilde{B}^I + \beta_0^k \tilde{B}^I k_h T & \\ \cdots & k_{h-1} T & k_h T & \\ \cdots & 0 & 0 & \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & I & 0 & \end{bmatrix}.$$

#### 4.1 稳定性判据(Stability criterion)

**定义 1**<sup>[11]</sup> 设  $A^I = (a_{ij}^I)$ , 点矩阵  $\hat{A} = (\hat{a}_{ij})$  称为区间矩阵  $A^I$  的优化矩阵, 其中:

$$\hat{a}_{ij} = \begin{cases} |a_{ij}^I|, & M_j(A^I) \neq \phi; \\ a_{ij}, & M_j(A^I) = \phi. \end{cases}$$

**定义 2** 若所有矩阵  $\Phi \in [\underline{\Phi}, \bar{\Phi}]$  的特征值在单位圆内, 则系统(25)是区间渐近稳定的. 其中  $\Phi^I = [\underline{\Phi}, \bar{\Phi}]$ .

**引理 1**<sup>[11]</sup> 若点矩阵  $\hat{A}$  优化区间矩阵  $A^I$ , 则  $\rho(A^I) \leq \rho(\hat{A})$ .

**引理 2** 对于区间矩阵  $A^I, B^I$ , 若  $M_j(A^I) \neq \phi$ ,  $M_j(B^I) \neq \phi$ , 则图  $G(\hat{A} + \hat{B})$  中每条边的权不小于图  $G(\hat{A}^I + \hat{B}^I)$  中相应边的权.

证 设

$$\widehat{A^I + B^I} = (\widehat{a_{ij}^I + b_{ij}^I}),$$

由于

$$M_j(A^I) \neq \phi, M_j(B^I) \neq \phi,$$

有

$$\begin{aligned} \hat{a}_{ij} &= |a_{ij}^I| = \max\{|a_{ij}|, |\bar{a}_{ij}|\}, \\ \hat{b}_{ij} &= |b_{ij}^I| = \max\{|b_{ij}|, |\bar{b}_{ij}|\}, \\ \widehat{a_{ij}^I + b_{ij}^I} &= \max\{|a_{ij} + b_{ij}|, |\bar{a}_{ij} + \bar{b}_{ij}|\}. \end{aligned}$$

不妨设

$$|\bar{a}_{ij}| \geq |a_{ij}|, |\bar{b}_{ij}| \geq |b_{ij}|,$$

有

$$\hat{a}_{ij} + \hat{b}_{ij} = |\bar{a}_{ij}| + |\bar{b}_{ij}| \geq \widehat{a_{ij}^I + b_{ij}^I},$$

从而有图  $G(\hat{A} + \hat{B})$  中每条边的权不小于图  $G(\hat{A}^I + \hat{B}^I)$  中相应边的权.

证毕.

**引理 3**<sup>[12]</sup> 设点矩阵  $A$  和  $B$ , 若  $|A| \leq B$ , 则  $\rho(A) \leq \rho(B)$ .

**定理 3** 假设  $M_j(\tilde{A}^I) \neq \phi$ ,  $M_j(\tilde{B}^I) \neq \phi$ , 若存在矩阵  $Y$ ,  $K_p$  和标量  $k_s (s = 1, 2, \dots, h)$ , 使得  $\Delta_w^-(G_l(\Theta)) < 1 (l = 0, 1, \dots, h)$ , 则闭环系统(25)是区间稳定的. 其中:

$$\Theta = Y^{-1} \hat{\Phi}_1 Y,$$

$$\hat{\Phi}_1 =$$

$$\begin{bmatrix} \hat{A} + \beta_0^k \hat{B} K_p & \beta_1^k \hat{B} + \beta_0^k \hat{B} k_1 T & & \\ K_p & k_1 T & & \\ 0 & I & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & \\ \cdots & \beta_{h-1}^k \hat{B} + \beta_0^k \hat{B} k_{h-1} T & \beta_h^k \hat{B} + \beta_0^k \hat{B} k_h T & \\ \cdots & k_{h-1} T & k_h T & \\ \cdots & 0 & 0 & \\ & \vdots & \vdots & \\ \cdots & I & 0 & \end{bmatrix}$$

$\hat{A}, \hat{B}$  分别为  $\tilde{A}^I, \tilde{B}^I$  的优化矩阵,  $\beta_s^k \in \{0, 1\}$ ,  $\sum_{s=0}^h \beta_s^k = 1$ .

证 任取矩阵  $\Phi \in \Phi^I$ ,  $\hat{\Phi}$  为区间矩阵  $\Phi^I$  的优化矩阵, 由引理1可得

$$\rho(\Phi) \leq \rho(\hat{\Phi}). \quad (26)$$

且  $M_j(\tilde{A}^I) \neq \phi$ ,  $M_j(\tilde{B}^I) \neq \phi$ , 由引理2,  $|\hat{\Phi}| \leq \hat{\Phi}_1$ . 根据引理3, 有

$$\begin{aligned} \rho(\hat{\Phi}) &\leq \rho(\hat{\Phi}_1) = \rho(Y^{-1} \hat{\Phi}_1 Y) \leq \\ &\|Y^{-1} \hat{\Phi}_1 Y\|_{\infty} = \Delta_w^-(G_l(Y^{-1} \hat{\Phi}_1 Y)). \end{aligned} \quad (27)$$

由式(26)和式(27), 若  $\Delta_w^-(G_l(\Theta)) < 1$ , 有  $\rho(\Phi) < 1$ . 由定义1, 系统(25)是区间稳定的.

证毕.

#### 4.2 控制器设计(Controller design)

**算法 3** 由定理3, 设计如下:

**Step 1** 给定采样周期  $T$ ,  $h_1, h_2$ , 获得  $h = h_1 + h_2$ . 令  $k = 0$ .

**Step 2** 寻找矩阵  $Y, K_p, k_s (s = 1, 2, \dots, h)$ , 由  $\Theta = Y^{-1} \hat{\Phi}_1 Y$ , 对所有  $\beta_l^k (l = 0, 1, \dots, h)$ , 获得有向图  $G_l(\Theta)$ , 令  $r_{li} = d_{G_l, w}^-(x_i) (x_i \in V(G_l), i = 1, 2, \dots, n + h)$ .

**Step 3** 若在给定的重复数 $k_{\max}$ 内,  $r_{li} < 1$ 不满足, 则退出; 否则令 $k = k + 1$ , 转到step2.

**Step 4** 若在给定的重复数 $k_{\max}$ 内,  $r_{li} < 1$ 满足, 输出矩阵 $Y, K_p, k_s$ . 退出.

**注 3** 不同于LMI方法, 基于图论理论, 获得求解控制器的算法, 避免了不等式之间的相互转换, 计算简便.

**注 4** 根据算法3重复操作, 对于同一时延和丢包情况可得到多个控制器增益矩阵. 用 Lyapunov 方法和 MATLAB 中LMI求解一般只能得到一个控制器增益矩阵.

## 5 算例(Numerical examples)

**例 1** 考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 0.5 & -1.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} x_1^2(t) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

1) 离散NCSs.

假定采样周期 $T = 0.5$  s,  $P = I, \varepsilon = 0.01$ 和 $q = 1.1$ , 由算法1, 获得 $K = [-0.4328 \ 0.1677]$ . 由定理1, 得到 $i_k < 1.2880$ , 即MADB为0.5 s. 在此控制器增益下, 文献[2]基于Lyapunov方法依LMI方式获得MADB为0.5217 s. 而本文取采样周期 $T = 0.6$  s, 获得 $i_k < 1.2156$ , 即MADB为0.6 s. 显然, 本文方法具有较小的保守性. 设初始状态 $x(0) = [-1 \ 3]^T$ , 在采样周期 $T = 0.5$  s条件下, 图1(a)给出系统状态响应曲线.

2) 连续NCSs.

选取 $P = I, \varepsilon = 0.1, q = 1.1$ , 经计算得到 $\delta = 1$ . 由算法2, 得到 $K = [-0.9464 \ 1.0290]$ , 根据定理2, 得到 $\tau < 0.01$  s. 设初始状态 $x(0) = [-1 \ 3]^T$ , 图1(b)给出系统状态响应曲线.

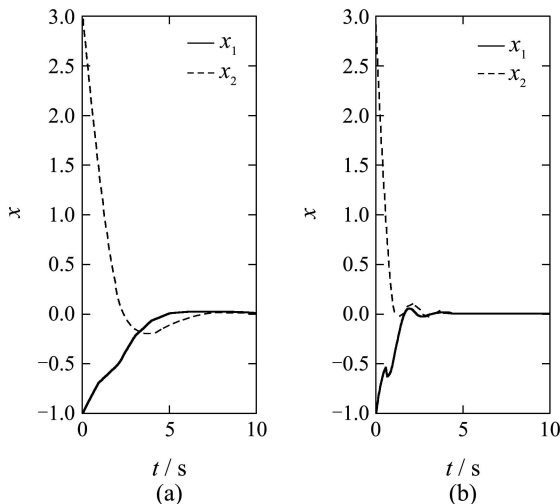


图1 NCSs状态曲线

Fig. 1 State trajectories of the NCSs

**例 2** 考虑如下区间系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} [0.1132 \ 0.1167] & [0.1718 \ 0.1738] \\ -0.2462 & -1.0625 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2150 \\ [-0.4662 \ -0.4616] \end{bmatrix} u(t).$$

假定采样周期 $T = 0.1$  s,  $h_1 = 1, h_2 = 0$ , 有 $h = 1$ . 由算法3, 获得

$$Y = \begin{bmatrix} 0.1184 & -0.1709 & -0.5909 \\ -0.3896 & -0.7240 & -0.0386 \\ -0.8693 & -0.6836 & 0.6528 \end{bmatrix}.$$

比例控制器增益矩阵

$$K_p = [-0.8876 \ 0.1348], k_1 = 0.5810. \quad (28)$$

在控制器(28)下, 当 $\beta_0^k = 0, \beta_1^k = 1$ 时,

$$r_{01} = 0.9154, r_{02} = 0.9819, r_{03} = 0.9215;$$

当 $\beta_0^k = 1, \beta_1^k = 0$ 时,

$$r_{11} = 0.9098, r_{12} = 0.9888, r_{13} = 0.8732.$$

同理, 可获得另一控制器增益矩阵

$$K_p = [-0.8876 \ 0.1348], k_1 = -0.5810. \quad (29)$$

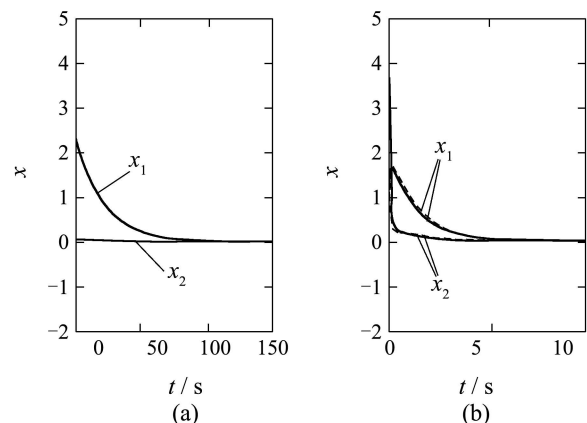


图2 NCSs状态响应曲线

Fig. 2 State trajectories of the NCSs

**例 3** 考虑例2中一系统:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0.1167 & 0.1738 \\ -0.2462 & -1.0625 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.2150 \\ -0.4662 \end{bmatrix} u(t).$$

特征值为 0.0792 和  $-1.0250$ , 该系统为不稳定系统. 应用文献[4]中 LMI 方法, 获得控制器增益  $K = [-0.5951 \ 1.0865]$ . 设初始状态为 $x(0) = [1 \ 5]^T$ ,

图2(a)和图2(b) 分别给出NCSs系统在LMI方法<sup>[4]</sup>和本文方法下的状态响应曲线, 其中图2(b)中实线和虚线分别为系统在控制器(28)和(29)下状态曲线. 与文献[4]相比, 本文方法获得的控制器具有较好的镇定效果, 且在控制器(28)作用下的系统状态曲线收敛速度快于控制器(29)作用下的曲线收敛速度. 仿真表明本文算法针对同一时延和数据包丢失情况可获得多个控制器增益矩阵, 从而可以有效地控制系统, 验证了所提方法的有效性.

## 6 结论(Conclusion)

本文研究了具有有界时延和数据包丢失的网络控制系统的稳定性问题. 基于Lyapunov方法和图论理论, 给出非线性离散和连续NCSs渐近稳定以及NCSs区间稳定的充分条件, 设计算法, 获得控制器设计方案. 算例表明所提方法的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] NAIR G N, EVANS R, MAREELS I M Y, et al. Topological feedback entropy and nonlinear stabilization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1585 – 1597.
- [2] YANG J, WANG X D. Stability of a class of nonlinear networked control systems[C] // *Proceeding of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Hangzhou, China: IEEE, 2004: 1401 – 1405.
- [3] YUE D, HAN Q L. Delay-dependent exponential stability of stochastic systems with time-varying delay, nonlinearity, and markovian switching[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(2): 217 – 222.
- [4] 王艳, 陈庆伟, 樊卫华, 等. 数据包丢失网络控制系统的保成本控制[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(2): 249 – 254.  
(WANG Yan, CHEN Qingwei, FAN Weihua, et al. Guaranteed cost control of networked control systems with data-packet dropout[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(2): 249 – 254.
- [5] 李金娜, 张庆灵, 王一女. 具有随机时延和丢包补偿的NCS的 $H_\infty$ 控制[J]. *信息与控制*, 2007, 36(3): 315 – 321.  
(LI Jinna, ZHANG Qingling, WANG Yinnü.  $H_\infty$  control in networked control systems with stochastic delays and packet dropout compensation[J]. *Information and Control*, 2007, 36(3): 315 – 321.
- [6] FAX J A, MURRAY R M. Information flow and cooperative control of vehicle formations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1465 – 1476.
- [7] BAROOAH P, HESpanha J P. Graph effective resistance and distributed control: spectral properties and applications[C] // *Proceedings of the 45th IEEE conference on Decision & Control*. San Diego, American: IEEE, 2006: 3479 – 3485.
- [8] SU T J, HUANG C G. Robust stability of delay dependence for linear uncertain systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(10): 1656 – 1659.
- [9] BAROOAH P, HESpanha J P. Graph effective resistance and distributed control: spectral properties and applications[C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. San Diego, USA: IEEE, 2006: 3479 – 3485.
- [10] 柳柏濂. 组合矩阵论[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [11] SHIH M H, LUR Y Y. An inequality for the spectral radius of an interval matrix[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 1998, 274(1): 27 – 36.
- [12] LANCASTER P, TISMENETSKY M. *The Theory of Matrix*[M]. New York, American: Academic Press, 1985.

## 作者简介:

**李金娜** (1977—), 女, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为网络控制、鲁棒控制、混沌等, E-mail: lijinna\_721@126.com;

**张庆灵** (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为广义大系统的鲁棒控制、网络控制等, E-mail: qlzhang@mail.neu.edu.cn;

**于海斌** (1964—), 男, 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制系统、网络化技术等, E-mail: yhb@sia.cn.