

非线性离散系统的近似最优跟踪控制

唐功友¹, 刘毅敏², 张 勇³

(1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100; 2. 中国电波传播研究所, 山东 青岛 266107;

3. 中国石油大学 信息与控制工程学院, 山东 东营 257061)

摘要: 研究非线性离散系统的最优跟踪控制问题. 通过在由最优控制问题所导致的非线性两点边值问题中引入灵敏度参数, 并对它进行Maclaurin级数展开, 将原最优跟踪控制问题转化为一族非齐次线性两点边值问题. 得到的最优跟踪控制由解析的前馈反馈项和级数形式的补偿项组成. 解析的前馈反馈项可以由求解一个Riccati差分方程和一个矩阵差分方程得到. 级数补偿项可以由一个求解伴随向量的迭代算法近似求得. 以连续槽式反应器为例进行仿真验证了该方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 离散系统; 最优控制; 跟踪控制; 连续槽式搅拌器

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Approximate optimal output tracking control for nonlinear discrete-time systems

TANG Gong-you¹, LIU Yi-min², ZHANG Yong³

(1. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100, China;

2. China Research Institute of Radiowave Propagation, Qingdao Shandong 266107, China;

3. College of Information and Control Engineering, China University of Petroleum, Dongying Shandong 257061, China)

Abstract: The optimal output tracking control(OOTC) problem is considered for discrete-time nonlinear systems. By introducing a sensitivity parameter in the nonlinear two-point boundary value(TPBV) problem which is obtained from the optimal control problems and expanding Maclaurin series around it, the original nonlinear OOTC problem is transformed into a series of nonhomogeneous linear TPBV problems. The OOTC law consists of analytic feedback and feedforward terms and a compensation term in an infinite series form. The analytic terms can be obtained by solving a Riccati difference equation and a matrix difference equation. The series compensation term can be approximately obtained by an iterative algorithm of adjoint vector equations. A simulation example from continuously stirred tank reactor(CSTR) is employed to test the validity of the presented algorithm.

Key words: nonlinear systems; discrete-time systems; optimal control; tracking control; CSTR

1 引言(Introduction)

由于处理离散的数字信号的微型计算机大量普遍使用, 实际的控制系统基本都可作为离散控制系统来研究. 而非线性系统是最一般的系统. 对强非线性系统或对控制精度要求较高的系统, 一般不能通过线性化等手段将其转化为线性系统. 因此有必要直接以非线性系统为控制对象来进行研究.

输出跟踪控制问题在工程科学、计算机科学、生命科学及经济学等学科有着明确的应用背景, 如: 航天器姿态调整^[1]、飞行器自动着陆^[2], 机器人(机械臂)运动轨迹控制^[3~5]、导弹发射轨迹控制^[6]及船舶跟踪预定航线^[7]等问题. 关于二次型性能指标的非

线性系统最优控制是以非线性动力系统为约束的泛函优化问题, 其解的难点在于求解非线性两点边值问题或Hamilton-Jacobi-Bellman(HJB)方程. 除非是极特殊的情形, 这类问题的解析解一般是不存在的. 从而非线性系统最优控制器的近似设计问题是一个有意义的研究课题. 非线性系统最优控制器的近似设计方法主要包括求解HJB方程的Galerkin逐次逼近法^[8]、级数展开法^[9]和求解状态依赖的Riccati方程迭代解法^[10]. 这3种方法都是要迭代求解HJB矩阵微分方程序列, 其计算量是比较大的. 近年来提出了一种基于向量微分方程序列迭代算法的非线性系统的最优控制器的近似设计的逐次逼近法^[11].

本文研究基于二次型性能指标的非线性离散系统的最优跟踪控制问题. 首先由最优控制理论导出非线性差分方程的两点边值问题. 然后通过两点边值问题中引入一个灵敏度参数, 并在其原点的邻域内进行级数展开, 将原最优跟踪控制问题转化为求解一族便于迭代求解的线性两点边值问题. 最后利用提出的迭代解法得到非线性离散系统的最优跟踪控制律.

2 问题提出(Problem statement)

考虑非线性离散系统

$$\begin{cases} x(k+1) = \bar{f}(x(k)) + Bu(k), \\ x(0) = x_0, \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^r$ 和 $y \in \mathbb{R}^m$ 分别为状态向量, 控制向量和输出向量; $\bar{f}(x) \in \mathbb{R}^n$ 为函数向量且在包含原点的邻域内是连续可微的, $\bar{f}(0) \equiv 0$; B 和 C 是适当维数的常量矩阵.

在 $x = 0$ 处对 $\bar{f}(x)$ 进行 Maclaurin 级数展开得

$$\bar{f}(x(k)) = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^T} \right|_{x=0} x(k) + f(x(k)), \quad (2)$$

其中 $f(x(k))$ 为非线性函数向量. 设 $A = \left. \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^T} \right|_{x=0}$, 得到如下形式线性项和非线性项分离的非线性离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + f(x(k)), \\ x(0) = x_0, \\ y(k) = Cx(k), \end{cases} \quad (3)$$

假设系统(3)的输出 y 所跟踪的参考输入 $\tilde{y}$ 由如下外系统描述:

$$\begin{cases} z(k+1) = Fz(k), \\ z(0) = z_0, \\ \tilde{y}(k) = Hz(k), \end{cases} \quad (4)$$

其中: $z \in \mathbb{R}^n$, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^m$; F 和 H 是适当维数的常量矩阵, 假定 (F, H) 可观测.

选取有限时间二次型性能指标如下:

$$J = \frac{1}{2} \{ e^T(N) Q_f e(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [e^T(k) Q e(k) + u^T(k) R u(k)] \}. \quad (5)$$

其中 $e(k)$ 是系统输出误差, 即

$$e(k) = \tilde{y}(k) - y(k). \quad (6)$$

$Q_f, Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是正定矩阵, $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 是正定矩阵. 最优跟踪控制问题即是寻求控制 $u^*(k)$ 使性能指

标(5)最小.

由极大值原理可得出系统(3)关于性能指标(5)的最优跟踪控制律表达式为

$$u(k) = -R^{-1} B^T \lambda(k+1). \quad (7)$$

其中 $\lambda(k+1)$ 由如下两点边值问题给出:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) - BR^{-1} B^T \lambda(k+1) + f(x(k)), \\ \lambda(k) = C^T Q C x(k) - C^T Q H z(k) + A^T \lambda(k+1) + f_x^T(x(k)) \lambda(k+1), \\ x(0) = x_0, \\ \lambda(N) = C^T Q_f C x(N) - C^T Q_f H z(N). \end{cases} \quad (8)$$

由于上式包含非线性函数项 $f(x)$ 和非线性函数的导数项 $f_x^T(x)$, 因此求解两点边值问题(8)的精确解析解是非常困难的.

本文将致力于寻找两点边值问题(8)的近似解从而获得非线性系统的近似最优跟踪控制律.

3 主要结果(Main results)

3.1 简化原两点边值问题(Simplification of the original TPBV problem)

为了简化原两点边值问题, 引入一个灵敏度参数 ε , $0 \leq \varepsilon \leq 1$, 并构造一个新的包含 ε 的两点边值问题:

$$\begin{cases} x(k+1, \varepsilon) = Ax(k, \varepsilon) - BR^{-1} B^T \lambda(k+1, \varepsilon) + \varepsilon f(x(k, \varepsilon)), \\ \lambda(k, \varepsilon) = C^T Q C x(k, \varepsilon) - C^T Q H z(k) + A^T \lambda(k+1, \varepsilon) + \varepsilon f_x^T(x(k, \varepsilon)) \lambda(k+1, \varepsilon), \\ x(0, \varepsilon) = x_0, \\ \lambda(N, \varepsilon) = C^T Q_f C x(N, \varepsilon) - C^T Q_f H z(N) \end{cases} \quad (9)$$

和一个新的含 ε 的控制律

$$u(k, \varepsilon) = -R^{-1} B^T \lambda(k+1, \varepsilon). \quad (10)$$

假定对每个 ε 两点边值问题(9)有唯一解. 比较引入灵敏度参数 ε 前后的等式, 可见当 $\varepsilon = 1$ 时, 两点边值问题(9)和控制律(10)分别等价于原两点边值问题(8)和最优控制律 $u^*(k)$. 假设 $x(k, \varepsilon)$, $\lambda(k, \varepsilon)$, $u(k, \varepsilon)$, $f(x(k, \varepsilon))$ 和 $f_x^T(x(k, \varepsilon))$ 在 $\varepsilon = 0$ 处关于 ε 无限可微, 于是 $u^*(k)$ 可被表示为如下 Maclaurin 级数形式:

$$u^*(k) = u(k, 1) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} u^{(i)}(k), \quad (11)$$

其中 $(\cdot)^{(i)} = \left. \frac{\partial^i(\cdot)}{\partial \varepsilon^i} \right|_{\varepsilon=0}$. 在 $\varepsilon = 0$ 处对式(9)和(10)关于 ε 做Maclaurin级数展开, 比较等号两边 ε 同次项的系数可得

$$\begin{cases} x^{(i)}(k+1) = \\ Ax^{(i)}(k) - BR^{-1}B^T\lambda^{(i)}(k+1) + a^i(k), \\ \lambda^{(i)}(k) = \\ C^TQCx^{(i)}(k) - (1 - \operatorname{sgn} i)C^TQHx(k) + \\ A^T\lambda^{(i)}(k+1) + b^i(k), \\ x^{(i)}(0) = (1 - \operatorname{sgn} i)x_0, \\ \lambda^{(i)}(N) = \\ C^TQ_fCx^{(i)}(N) - (1 - \operatorname{sgn} i)C^TQ_fHz(N) \end{cases} \quad (12)$$

和

$$u^{(i)}(k) = -R^{-1}B^T\lambda^{(i)}(k+1), \quad (13)$$

其中

$$\begin{cases} \operatorname{sgn} i = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ 1, & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \\ a^i(k) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ if^{(i-1)}(x(k)), & i = 1, 2, \dots, \end{cases} \\ b^i(k) = \begin{cases} 0, & i = 0, \\ i \sum_{j=0}^{i-1} [C_{i-1}^j f_x^{T(i-1-j)}(x(k)) \times \\ \lambda^{(j)}(k+1)], & i = 1, 2, \dots \end{cases} \end{cases} \quad (14)$$

通过以上变换, 两点边值问题(9)被分解成一族两点边值问题(12). 从式(14)可看出, 表达式(12)中的第 i 阶问题包含的非线性相关项 $a^i(k)$, $b^i(k)$ 只与低于 i 阶的向量有关, 而第0阶问题因 $a^0(k) = b^0(k) = 0$ 即不含非线性项成为一个可求解的线性问题, 因此两点边值问题族(12)的各阶问题可通过递阶迭代求解.

3.2 控制律的近似逼近过程(Approximation process of OOTC law)

令

$$\lambda^{(i)}(k) = P(k)x^{(i)}(k) + (1 - \operatorname{sgn} i)P_1(k)z(k) + \operatorname{sgn} i g^{(i)}(k), \quad (15)$$

其中 $g^{(0)}(k) \equiv 0$. 将式(15)代入式(12)和(13), 得

$$\begin{aligned} Ru^{(i)}(k) &= -B^T\lambda^{(i)}(k+1) = \\ &= -B^T\{P(k+1)[Ax^{(i)}(k) + Bu^{(i)}(k) + \\ &+ a^i(k)] + (1 - \operatorname{sgn} i)P_1(k+1)Fz(k) + \\ &+ \operatorname{sgn} i g^{(i)}(k+1)\}. \end{aligned}$$

由上式可得第 i 阶最优控制律

$$u^{(i)}(k) = -S^{-1}(k)B^T\{P(k+1)[Ax^{(i)}(k) + a^i(k)] + (1 - \operatorname{sgn} i)P_1(k+1)Fz(k) + \operatorname{sgn} i g^{(i)}(k+1)\} \quad (16)$$

及第 i 阶状态向量

$$\begin{aligned} x^{(i)}(k+1) &= \\ (I - T(k)P(k+1))Ax^{(i)}(k) + \\ (I - T(k)P(k+1))a^i(k) - \\ (1 - \operatorname{sgn} i) \times T(k)P_1(k+1)Fz(k) - \\ \operatorname{sgn} i T(k)g^{(i)}(k+1), \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{cases} S(k) = R + B^TP(k+1)B, \\ T(k) = BS^{-1}(k)B^T. \end{cases} \quad (18)$$

$P(k)$ 是Riccati矩阵差分方程的唯一半正定解

$$\begin{cases} P(k) = C^TQC + A^TP(k+1)A - \\ A^TP(k+1)T(k)P(k+1)A, \\ P(N) = C^TQ_fC; \end{cases} \quad (19)$$

P_1 是如下差分方程的唯一解:

$$\begin{cases} P_1(k) = -C^TQH - A^TP(k+1)T(k) \times \\ P_1(k+1)F + A^TP_1(k+1)F, \\ P_1(N) = -C^TQ_fH. \end{cases} \quad (20)$$

$g^{(i)}(k)$ 可由如下伴随向量差分方程求出:

$$\begin{cases} g^{(i)}(k) = A^T(I - P(k+1)T(k)) \times \\ g^{(i)}(k+1) + c^i(k), \\ g^{(i)}(N) = 0, \end{cases} \quad (21)$$

其中

$$c^i(k) = A^T(I - P(k+1)T(k)) \times P(k+1)a^i(k) + b^i(k). \quad (22)$$

将式(16)代入式(11)可得最优跟踪控制律

$$\begin{aligned} u^*(k) &= \\ &= -S^{-1}(k)B^T[P(k+1)Ax(k) + \\ &+ P(k+1)f(x(k)) + P_1(k+1)Fz(k)] - \\ &= S^{-1}(k)B^T \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} g^{(i)}(k+1). \end{aligned} \quad (23)$$

注1 最优跟踪控制律的表达式(23)中包含外系统的状态变量 $z(k)$, 该量是无法直接测出的. 在工程实际中, 可以引入一个参考输入观测器来使其物理可实现.

注2 伴随向量 $g^{(i)}(k)$ 的表达式中包含难以求解的

向量复合函数的高阶导数 $f^{(i-1)}(x(k))$ 和 $f_x^{T(i-1)}(x(k))$. 令

$$f(x(k)) = \begin{pmatrix} f_1(x(k)) \\ f_2(x(k)) \\ \vdots \\ f_n(x(k)) \end{pmatrix}, \quad (24)$$

则有

$$f^{(i)}(x(k)) = \frac{\partial^i f(x(k, \varepsilon))}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^i f_1(x(k, \varepsilon))}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} \\ \frac{\partial^i f_2(x(k, \varepsilon))}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} \\ \vdots \\ \frac{\partial^i f_n(x(k, \varepsilon))}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^{(i)} \\ f_2^{(i)} \\ \vdots \\ f_n^{(i)} \end{pmatrix} \triangleq (f_p^{(i)})_{n \times 1} \quad (25)$$

及

$$f_x^{T(i)}(x(k)) = \frac{\partial^i f_x^T(x(k, \varepsilon))}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial^i}{\partial \varepsilon^i} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \Big|_{\varepsilon=0} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial^i f_{pq}(x(k, \varepsilon))}{\partial \varepsilon^i} \Big|_{\varepsilon=0} \end{bmatrix} = [f_{pq}^{(i)}]_{n \times n}, \quad (26)$$

其中 f_p ($p = 1, 2, \dots, n$)和 f_{pq} ($p, q = 1, 2, \dots, n$)是标量函数. 利用布鲁诺(Bruno)公式^[12]可求出标量函数 f_* 关于 ε 的第 i 阶导数

$$f_*^{(i)} = \sum_{k=1}^i \frac{\partial^k f_*}{\partial x^k} B_{i,k}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i)}), \quad (27)$$

其中 $B_{i,k}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i)})$ 是贝尔(Bell)多项式:

$$B_{i,k}(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(i)}) = \sum_{\substack{d_1+2d_2+\dots+nd_i=i \\ d_1+d_2+\dots+d_i=k}} \frac{i!}{d_1!d_2!\dots d_i!} \left(\frac{x^{(1)}}{1!} \right)^{d_1} \times \cdots \times \left(\frac{x^{(i)}}{i!} \right)^{d_i}. \quad (28)$$

然后再将 $f_*^{(i)}$ 代入式(25) (26)就可得到向量函数 f 和矩阵函数关于 ε , f_x^T 的第 i 阶导数.

注 3 最优输出跟踪控制律(23)中的无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} g^{(i)}(k+1)$ 一般是不可能精确求出的. 在实际应用中, 常用一个有限正整数 M 近似取代 ∞ , 从而得到一个近似最优输出跟踪控制律(M 阶次优跟踪控制律)

$$u_M(k) = -S^{-1}(k)B^T[P(k+1)Ax(k) + P(k+1)f(x(k)) + P_1(k+1)Fz(k)] - S^{-1}(k)B^T \sum_{i=1}^M \frac{1}{i!} g^{(i)}(k+1). \quad (29)$$

由式(29)可以得到求解 M 阶次优跟踪控制律的递推算法:

$$\begin{cases} u_0(k) = -S^{-1}(k)B^T[P(k+1)Ax(k) + P(k+1)f(x(k)) + P_1(k+1)Fz(k)], \\ u_i(k) = u_{i-1}(k) - \frac{1}{i!} S^{-1}(k)B^T g^{(i)}(k+1), \\ i = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (30)$$

从而可求得各阶相应性能指标为

$$J_i = e^T(N)Q_f e(N) + \sum_{k=0}^{N-1} [e^T(k)Q_e e(k) + u_i^T(k)R u_i(k)]. \quad (31)$$

在实际应用中, 可以根据 $|(J_i - J_{i-1})/J_i|$ 是否达到具体工艺控制精度要求确定 M 的取值.

4 实例仿真(A simulation example)

采用文献[13,14]中连续搅拌槽式反应器(CSTR)的例子. 考虑在连续搅拌槽式反应器内执行一个可逆反应 $2A \rightleftharpoons B$, k_a 和 k_b 分别为与物料 B 有关的正向反应和逆向反应的动力学常数, 则该系统的动态模型可以描述如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2k_a x_1^2 - c_1 x_1 + 2k_b x_2 \\ k_a x_1^2 + c_2 x_1 - (\frac{F}{V} + k_b) x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{F}{V} \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad (32)$$

其中: $x_1 = C_A - \bar{C}_A$; $x_2 = C_B - \bar{C}_B$; $u = C_{Ain} - \bar{C}_{Ain}$ 是稳态值的增量, 分别代表物料 A 和物料 B 的出口浓度值的增量, 以及物料 A 入口浓度值的增量; $c_1 = 4k_a \bar{C}_A + F/V$, $c_2 = 2k_a \bar{C}_A$, V 为反应槽容积, F 为入口流速. 稳态值满足如下方程:

$$\bar{C}_B = \frac{k_a}{F/V + k_b} \bar{C}_A^2 = \frac{1}{2}(\bar{C}_{Ain} - \bar{C}_A). \quad (33)$$

采用如下参数: $k_a = 0.05$, $k_b = 0.01$, $F/V = 0.02$, $\bar{C}_{Ain} = 10$ (都是SI单位), 可以算出 $\bar{C}_A = 1.59$, $\bar{C}_B = 4.21$, 代入式(32)得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1x_1^2 - 0.338x_1 + 0.02x_2 \\ 0.05x_1^2 + 0.159x_1 - 0.03x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0 \end{bmatrix} u. \quad (34)$$

设定采样时间为0.1 s, 输出为 x_1 , 可以得到如下离散化后的由式(3)描述的2阶离散非线性系统模型, 其中:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0.9668 & 0.002 \\ 0.0156 & 0.997 \end{bmatrix}, \\ B = \begin{bmatrix} 0.002 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ f(x) = \begin{bmatrix} -0.01x_1^2(k) \\ 0.005x_1^2(k) \end{bmatrix}, \\ C = [1 \ 0], x(0) = [0 \ 0]^T. \end{cases} \quad (35)$$

参考输入由式(4)描述的外系统给出, 其中:

$$F = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.1 \\ -0.2 & 0.8 \end{bmatrix}, H = [1 \ 0], z(0) = [1 \ 0]^T. \quad (36)$$

性能指标选为

$$J = \frac{1}{2} 10000e^2(60) + \sum_{k=0}^{59} (10000e^2(k) + u^2(k)). \quad (37)$$

选取控制精度 $\delta = 0.001$, 当 $|(J_i - J_{i-1})/J_i| < \delta$ 时认为获得满足精度要求的最优跟踪控制律。

仿真结果如图1, 2和表1所示。从图1, 2可见系统的控制向量 $u(k)$ 和跟踪误差 $e(k)$ 随叠加次数增加逐渐趋向最优, 从而使性能指标 J_i 逐阶减小; 从表1也可看出随着阶次升高, J_i 呈递减趋势并不断提升其控制精度 $|(J_i - J_{i-1})/J_i|$, 当 $i = 5$ 时, 满足控制精度要求。因此可以认为 $u_5(t)$ 为近似最优输出跟踪控制律。

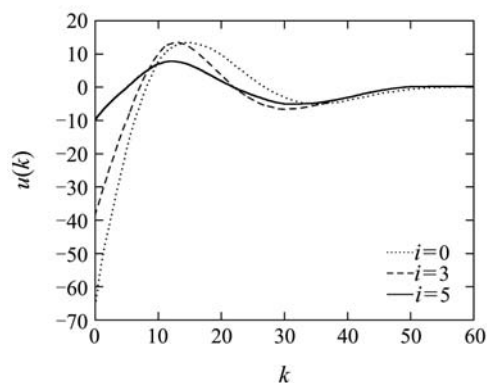


图1 当 $i = 0, 3, 5$ 时控制向量 $u(k)$ 的仿真曲线
Fig. 1 Simulation curves of the control vector $u(k)$ when $i = 0, 3, 5$

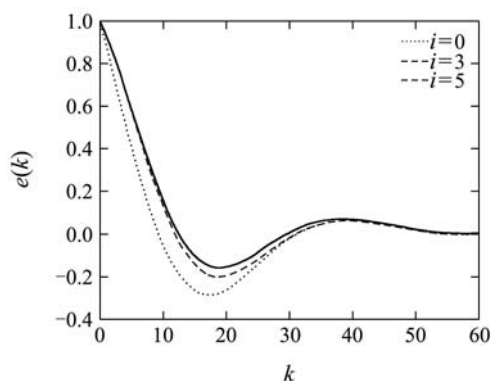


图2 当 $i = 0, 3, 5$ 时跟踪误差 $e(k)$ 的仿真曲线
Fig. 2 Simulation curves of the tracking error $e(k)$ when $i = 0, 3, 5$

表1 各阶性能指标值及控制精度

Table 1 Performance indexes and control precisions at each order

叠加次数 i	0	1	2	3	4	5
性能指标 J_i	28207	26090	25551	25428	25322	25301
$ (J_i - J_{i-1})/J_i $	—	0.0811	0.0211	0.0048	0.0042	0.0008

文献[13]和[14]分别以连续搅拌槽式反应器为例进行了仿真研究。其中文献[13]利用求解状态依赖的Riccati方程迭代解法, 文献[14]直接利用HJB方程的迭代求解算法。在本例中文献[13]只给出了第一次迭代求解近似最优控制律的结果, 没有对控制精度进行分析; 而文献[14]和本文都是用5次迭代得到了近似最优控制律。由于文献[13]和[14]的算法都是利用矩阵微分方程迭代求解近似最优控制律, 而本文是利用伴随向量差分方程的迭代求解近似最优控制律, 所以本文算法的计算量与文献[13]和[14]相比较小。文献[11]提出的非线性系统的最优控制器的近似设

计的逐次逼近法与本文采用的算法都是利用伴随向量微分或差分方程的迭代求解的近似方法, 从仿真分析看, 两种方法的仿真结果也很相似。但我们还没有发现两种方法在原理上的联系。

5 结论(Conclusion)

本文针对非线性离散系统的最优输出跟踪控制问题, 提出了一种灵敏度设计算法。该算法避免了直接求解含有非线性函数相关项的两点边值问题, 将问题巧妙的转化为求解一族只包含低阶非线性项的两点边值问题。根据本文设计的算法求解非线性离散系统的近似最优输出跟踪控制律计算量较小, 且实现较容易。

参考文献(References):

- [1] CACCAVALE F, VILLANI L. Output feedback control for attitude tracking[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 38(2): 91 – 98.
- [2] OHNO M, YAMAGUCHI Y, HATA T, et al. Robust flight control law design for an automatic landing flight experiment[J]. *Control Engineering Practice*, 1999, 7(9): 1143 – 1151.
- [3] MOOSAVIAN S A A, RASTEGARI R. Multiple-arm space free-flying robots for manipulating objects with force tracking restrictions[J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2006, 54(10): 779 – 788.
- [4] DONG W J. On trajectory and force tracking control of constrained mobile manipulators with parameter uncertainty[J]. *Automatica*, 2002, 38(2): 1475 – 1484.
- [5] CIMEN T, BANKS G P. Nonlinear optimal tracking control with application to super-tankers for autopilot design[J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1845 – 1863.
- [6] TSOURDOS A, WHITE B A. Adaptive flight control design for nonlinear missile[J]. *Control Engineering Practice*, 2005, 13(3): 373 – 382.
- [7] BONIVENTO C, MARCONI L, ZANASI R. Output regulation of nonlinear systems by sliding mode[J]. *Automatica*, 2001, 37(4): 535 – 542.
- [8] BEARD R W, MCLAIN T W. Successive Galerkin approximation algorithms for nonlinear optimal and robust control[J]. *International Journal of Control*, 1998, 71(5): 717 – 743.
- [9] GARRARD W L, ENNS D F, SNELL S A. Nonlinear feedback control of highly manoeuvrable aircraft[J]. *International Journal of Control*, 1992, 56(4): 799 – 812.
- [10] BANKS H T, LEWIS B M, TRAN H T. Nonlinear feedback controllers and compensators: A state-dependent Riccati equation approach[J]. *Computational Optimization and Applications*, 2007, 37(2): 177 – 218.
- [11] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(5): 429 – 434.
- [12] 邵嘉裕. 组合数学[M]. 上海: 同济大学出版社, 1991. (SHAO Jiayu. *Combinatorics*[M]. Shanghai: Tongji University Press, 1991.)
- [13] MANOUSIOUTHAKIS V, CHMIELEWSKI D J. On constrained infinite-time nonlinear optimal control[J]. *Chemical Engineering Science*, 2002, 57(1): 105 – 114.
- [14] CHEN Y, EDGAR T, MANOUSIOUTHAKIS V. On infinite-time nonlinear quadratic optimal control[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51(3/4): 259 – 268.

作者简介:

唐功友 (1953—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为时滞系统、非线性系统及网络控制系统的分析与设计、故障诊断与容错控制等, E-mail: gtang@ouc.edu.cn;

刘毅敏 (1976—), 女, 博士, 研究方向为非线性系统的最优控制与跟踪、动态智能管理系统的控制与设计, E-mail: dongbaren@hotmail.com;

张勇 (1979—), 男, 博士, 研究方向为非线性系统及网络控制系统的分析与设计, E-mail: paul_zhangyong@163.com.