

# 带不确定参数和噪声方差的鲁棒观测融合Kalman滤波器

杨春山<sup>1,2</sup>, 王雪梅<sup>1,2</sup>, 邓自立<sup>1†</sup>

(1. 黑龙江大学 电子工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150080; 2. 黑龙江工商学院 计算机科学与技术系, 黑龙江 哈尔滨 150025)

**摘要:** 对带不确定参数和噪声方差的多传感器定常系统, 引入虚拟白噪声补偿不确定参数, 可将其转化为带已知参数和不确定噪声方差系统. 应用极大极小鲁棒估值原理和加权最小二乘法, 基于带噪声方差保守上界的最坏情形保守系统, 提出了鲁棒加权观测融合Kalman滤波器, 并证明了它与集中式融合鲁棒Kalman滤波器是等价的, 且融合器的鲁棒精度高于每个局部滤波器鲁棒精度. 一个Monte-Carlo仿真例子说明了如何寻求不确定参数的鲁棒域和如何搜索保守性较小的虚拟噪声方差上界.

**关键词:** 不确定多传感器系统; 加权观测融合; 极大极小鲁棒Kalman滤波器; 虚拟白噪声; Lyapunov方程方法

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Robust measurement fusion Kalman filter with uncertain parameters and noise variances

YANG Chun-shan<sup>1,2</sup>, WANG Xue-mei<sup>1,2</sup>, DENG Zi-li<sup>1†</sup>

(1. School of Electronic Engineering, Heilongjiang University, Harbin Heilongjiang 150080, China;  
2. Department of Computer Science and Technology, Heilongjiang College of Business and Technology,  
Harbin Heilongjiang 150025, China)

**Abstract:** For the multisensor time-invariant system with uncertain parameters and noise variances, by introducing a fictitious white noise to compensate the uncertain parameters, we can convert the uncertain system into the system with known parameters and uncertain noise variances. Using the minimax robust estimation principle and weighted least squares method, we present a robust weighted measurement fusion Kalman filter based on the worst-case conservative system with the conservative upper bounds of noise variances. We prove that this Kalman filter is equivalent to the robust centralized fusion Kalman filter, and its robust accuracy is higher than that of each local robust Kalman filter. A Monte-Carlo simulation example shows how to find the robust region of uncertain parameter and how to search the less-conservative upper bound of fictitious noise variances.

**Key words:** uncertain multisensor system; weighted measurement fusion; minimax robust Kalman filter; fictitious white noise; Lyapunov equation approach

### 1 引言(Introduction)

多传感器信息融合已被应用于许多领域, 例如: 跟踪、通信、机器人和GPS定位<sup>[1-2]</sup>. 作为多传感器信息融合的基本工具, 经典Kalman滤波仅适用于模型参数和噪声方差精确已知的系统. 但在实际应用中, 因模型简化、可变参数、未建模动态等原因, 引起模型参数或噪声方差的不确定, 导致Kalman滤波的性能变坏<sup>[3]</sup>. 这促进了对不确定系统的鲁棒Kalman滤波器的研究.

鲁棒Kalman滤波器的设计是: 对于所有可容许的不确定性, 所设计的鲁棒Kalman滤波器的实际滤波误差方差被保证有一个最小或保守性较小的上界. 到目前为止, 有许多方法用于设计鲁棒Kalman滤波器, 对

带未知模型参数的系统, 文献[4-6]分别使用Riccati方程和线性矩阵(LMI)不等式方法设计了鲁棒Kalman滤波器; 对带不确定输入噪声和观测噪声的系统, 文献[7-8]使用格林空间估值理论解决了鲁棒Kalman滤波问题; 对带未知噪声方差的系统, 文献[9-11]提出了统一的加权融合鲁棒Kalman滤波理论, 并提出证明鲁棒性的Lyapunov方程方法. 到目前为止, 对带模型参数和噪声方差两者不确定的系统的鲁棒Kalman滤波问题考虑的很少<sup>[12]</sup>. 而且文献[12]的鲁棒Kalman滤波是基于Riccati方程方法设计的. 本文对带模型参数和噪声方差不确定系统, 引入虚拟白噪声, 应用极大极小鲁棒估值原理<sup>[9]</sup>, 提出了鲁棒加权观测融合Kalman滤波器. 使用Lyapunov方程方法, 证明了提出

的鲁棒Kalman滤波器的鲁棒性,这完全不同于Riccati方程方法和线性矩阵(LMI)不等式方法.

## 2 鲁棒加权观测融合稳态Kalman滤波器 (Robust weighted measurement fusion steady-state Kalman filter)

考虑模型参数和噪声方差不确定的多传感器系统

$$x(t+1) = (\Phi_e + \Delta\Phi)x(t) + \Gamma w(t), \quad (1)$$

$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t), \quad i = 1, \dots, L, \quad (2)$$

其中:  $t$ 代表离散时间,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量,  $y_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 为第 $i$ 个子系统的观测向量,  $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 为输入噪声,  $v_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$ 为第 $i$ 个子系统的观测噪声,  $\Phi_e, \Gamma, H_i$ 为已知适当维数矩阵,  $\Phi = \Phi_e + \Delta\Phi$ 为真实状态转移阵, 不确定干扰 $\Delta\Phi \in \mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$ .

**假设1**  $w(t) \in \mathbb{R}^r$ 和 $v_i(t)$ 是均值为0, 未知不确定真实方差分别为 $\bar{Q}$ 和 $\bar{R}_i$ 的互不相关白噪声. 且有

$$\bar{Q} \leq Q, \bar{R}_i \leq R_i, \quad i = 1, \dots, L, \quad (3)$$

其中 $Q$ 和 $R_i$ 分别为 $\bar{Q}$ 和 $\bar{R}_i$ 的保守上界.

**假设2** 子系统和融合系统为完全可观和完全可控的.

**假设3** 真实状态转移阵 $\Phi$ 为稳定矩阵.

假设3可确保状态 $x(t)$ 为一个零均值、方差有界的平稳随机过程, 则不确定干扰项 $\Delta\Phi x(t)$ 的均值为零且方差有界. 当 $\Delta\Phi$ 足够小,  $\Delta\Phi x(t)$ 可近似看作为白噪声. 因此, 干扰项 $\Delta\Phi x(t)$ 能够被带零均值、保守上界方差的虚拟噪声补偿.

引入带零均值、保守上界方差 $\Delta_\xi$ 的虚拟噪声 $\xi(t)$ , 补偿式(1)中不确定模型参数误差项 $\Delta\Phi x(t)$ , 则系统(1)和(2)被转换为带已知模型参数和保守噪声方差上界 $Q, R_i$ 和 $\Delta_\xi$ 的保守系统

$$x(t+1) = \Phi_e x(t) + \Gamma w(t) + \xi(t), \quad (4)$$

$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t), \quad i = 1, \dots, L. \quad (5)$$

引入保守的集中式融合观测方程

$$y_c(t) = H_c x(t) + v_c(t), \quad (6)$$

$$y_c(t) = [y_1^T(t) \ \dots \ y_L^T(t)], \quad (7)$$

$$H_c = [H_1^T \ \dots \ H_L^T]^T, \quad (8)$$

$$v_c(t) = [v_1^T(t) \ \dots \ v_L^T(t)]^T, \quad (9)$$

且 $v_c(t)$ 具有保守的观测方差阵

$$R_c = \text{diag}\{R_1, \dots, R_L\}. \quad (10)$$

假定 $H_c$ 列满秩, 应用加权最小二乘法, 式(6)可被转化为<sup>[13]</sup>

$$y_M(t) = x(t) + v_M(t), \quad (11)$$

其中:  $y_M(t)$ 为保守的加权融合观测,  $v_M(t)$ 为融合的

观测白噪声

$$y_M(t) = [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} H_c^T R_c^{-1} y_c(t), \quad (12)$$

$$v_M(t) = [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} H_c^T R_c^{-1} v_c(t). \quad (13)$$

根据式(13), 可知 $v_M(t)$ 具有保守的观测方差阵<sup>[9]</sup>

$$R_M = [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1}. \quad (14)$$

对带保守上界 $Q, R_i$ 和 $\Delta_\xi$ 的最坏情形系统(4)和(11), 应用极大极小鲁棒估值原理, 有保守的最优加权观测融合稳态Kalman滤波器

$$\hat{x}_M(t|t) = \Psi_M \hat{x}_M(t-1|t-1) + K_M y_M(t), \quad (15)$$

$$\Psi_M = [I_n - K_M] \Phi_e, \quad (16)$$

$$K_M = \Sigma_M [\Sigma_M + R_M]^{-1}, \quad (17)$$

其中 $\Psi_M$ 为稳定阵<sup>[14]</sup>,  $\Sigma_M$ 满足稳态Riccati方程

$$\Sigma_M = \Phi_e [\Sigma_M - \Sigma_M (\Sigma_M + R_M)^{-1}] \Phi_e^T + \Gamma Q \Gamma^T + \Delta_\xi. \quad (18)$$

根据式(4)(12)–(13), 有保守的滤波误差

$$\begin{aligned} \tilde{x}_M(t|t) = & \Psi_M \tilde{x}_M(t-1|t-1) + [I_n - K_M] \times \\ & [\Gamma w(t-1) + \xi(t-1)] - K_M v_M(t). \end{aligned} \quad (19)$$

因此, 可得保守的滤波误差方差 $P_M$ 满足Lyapunov方程

$$\begin{aligned} P_M = & \Psi_M P_M \Psi_M^T + [I_n - K_M] \times \\ & (\Gamma Q \Gamma^T + \Delta_\xi) [I_n - K_M]^T + K_M R_M K_M^T. \end{aligned} \quad (20)$$

**注1** 基于式(4)–(5), 由保守上界方差 $Q, R_i$ 和 $\Delta_\xi$ 生成的保守观测 $y_i(t)$ 是不可用的, 由此生成的保守的融合观测 $y_M(t)$ 也是不可用的. 只有基于式(1)–(2), 由实际方差 $\bar{Q}$ 和 $\bar{R}_i$ 生成的实际观测 $y_i(t)$ 是可用的, 由此生成的实际的融合观测 $y_M(t)$ 也是可用的. 所以将保守观测替换为实际观测, 则式(15)就称为实际的加权观测融合Kalman滤波器.

下面求实际滤波误差方差. 首先定义

$$\tilde{x}_M(t|t) = x(t) - \hat{x}_M(t|t), \quad (21)$$

其中:  $x(t)$ 为式(1)定义的真实状态,  $\hat{x}_M(t|t)$ 为式(15)给出的实际加权观测融合Kalman滤波器. 式(1)减去式(15), 可得实际滤波误差

$$\begin{aligned} \tilde{x}_M(t|t) = & [I_n - K_M] \Phi_e \tilde{x}_M(t-1|t-1) + \\ & [I_n - K_M] \Delta\Phi x(t-1) + [I_n - K_M] \Gamma w(t-1) - \\ & K_M v_M(t). \end{aligned} \quad (22)$$

因此, 可得实际滤波误差方差

$$\bar{P}_M =$$

$$\begin{aligned} & \Psi_M \bar{P}_M \Psi_M^T + [I_n - K_M](\Gamma \bar{Q} \Gamma^T + \\ & \Delta \Phi X \Delta \Phi^T)[I_n - K_M]^T + [I_n - K_M] \Delta \Phi C \Psi_M^T + \\ & \Psi_M C^T \Delta \Phi^T [I_n - K_M]^T + K_M \bar{R}_M K_M^T. \end{aligned} \quad (23)$$

其中:  $X = E[x(t)x^T(t)]$ ,  $C = E[x(t)\tilde{x}^T(t|t)]$ . 根据式(1)和式(22), 可知  $X$  和  $C$  分别满足 Lyapunov 方程

$$X = \Phi X \Phi^T + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T, \quad (24)$$

$$C = \Phi C \Psi_M^T + \Phi X \Delta \Phi^T [I_n - K_M]^T + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T [I_n - K_M]^T. \quad (25)$$

式(23)中  $\bar{R}_M$  为  $v_M(t)$  的实际方差阵. 据式(13)可得

$$\begin{aligned} \bar{R}_M = & [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} H_c^T R_c^{-1} \bar{R}_c R_c^{-1} H_c \times \\ & [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1}, \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $\bar{R}_c$  为  $v_c(t)$  的实际方差阵:

$$\bar{R}_c = \text{diag}\{\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_L\}. \quad (27)$$

**引理 1**<sup>[14]</sup> 考虑 Lyapunov 方程

$$P = \Psi P \Psi^T + U, \quad (28)$$

其中:  $P, \Psi$  和  $U$  是  $n \times n$  矩阵, 且  $U$  为对称阵,  $\Psi$  为稳定矩阵(其所有特征值在单位圆内). 如果  $U$  是正定(半正定)的, 则  $P$  有唯一、对称正定(半正定)解.

**定理 1** 对带不确定参数和噪声方差的多传感器系统(1)–(2), 在假设 1–3 下, 对于指定的虚拟噪声方差上界  $\Delta_\xi > 0$ , 存在一个鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$ , 对于所有可容许的干扰  $\Delta\Phi \in \mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$ , 以及  $\bar{Q}$  和  $\bar{R}_i$  满足式(3)时, 实际加权观测融合稳态 Kalman 滤波器是鲁棒的, 即

$$\bar{P}_M < P_M, \quad (29)$$

称  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$  为干扰  $\Delta\Phi$  的鲁棒域, 称实际融合 Kalman 滤波器(15)为鲁棒融合 Kalman 滤波器.

**证** 定义  $\Delta P_M = P_M - \bar{P}_M$ , 式(20)减去式(23), 可得 Lyapunov 方程

$$\Delta P_M = \Psi_M \Delta P \Psi_M^T + V_M, \quad (30)$$

其中:

$$\begin{aligned} V_M = & [I_n - K_M] \Gamma (Q - \bar{Q}) \Gamma^T [I_n - K_M]^T + \\ & K_M (R_M - \bar{R}_M) K_M^T + U_M, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} U_M = & [I_n - K_M] \Delta_\xi [I_n - K_M]^T - [I_n - K_M] \times \\ & \Delta \Phi X \Delta \Phi^T [I_n - K_M]^T - [I_n - K_M] \times \\ & \Delta \Phi C \Psi_M^T - \Psi_M C^T \Delta \Phi^T [I_n - K_M]^T. \end{aligned} \quad (32)$$

式(10)减去式(27)可得

$$R_c - \bar{R}_c = \text{diag}\{R_1 - \bar{R}_1, \dots, R_L - \bar{R}_L\}. \quad (33)$$

根据式(3), 有

$$\bar{R}_c \leq R_c. \quad (34)$$

式(14)减去式(26)可得

$$\begin{aligned} R_M - \bar{R}_M = & [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} H_c^T R_c^{-1} R_c^T R_c^{-1} H_c \times \\ & [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} - [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} \times \\ & H_c^T R_c^{-1} \bar{R}_c^T R_c^{-1} H_c [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} = \\ & [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1} H_c^T R_c^{-1} (R_c - \bar{R}_c) \times \\ & R_c^{-1} H_c [H_c^T R_c^{-1} H_c]^{-1}. \end{aligned} \quad (35)$$

根据式(34), 有

$$\bar{R}_M \leq R_M. \quad (36)$$

由  $[I_n - K_M] = P_M \Sigma_M^{-1}$ , 可知

$$\det[I_n - K_M] = \det(P_M \Sigma_M^{-1}) \neq 0,$$

所以  $[I_n - K_M]$  为可逆的. 再根据  $\Delta_\xi > 0$ , 有

$$[I_n - K_M] \Delta_\xi [I_n - K_M]^T > 0. \quad (37)$$

因此, 当  $\Delta\Phi \rightarrow 0$ , 根据式(32), 有

$$U_M \rightarrow [I_n - K_M] \Delta_\xi [I_n - K_M]^T > 0. \quad (38)$$

故当  $\Delta\Phi$  足够小时, 存在一个域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$  使  $U_M > 0$ . 再根据式(3)(31)–(32), 有

$$V_M > 0, \Delta\Phi \in \mathfrak{R}_{\Delta\Phi}. \quad (39)$$

故应用引理 1, 由式(30)有  $\Delta P_M > 0$ , 即  $\bar{P}_M < P_M$  成立. 证毕.

**注 2** 由式(24)–(25)(32)以及  $\Phi = \Phi_e + \Delta\Phi$  可以看到鲁棒域与  $\bar{Q}$  有关, 记为  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q})$ . 定义鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$  为  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi} = \bigcap_{\bar{Q} \leq Q} \mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q})$ , 它不依赖于  $\bar{Q}$ .

### 3 鲁棒集中式融合稳态 Kalman 滤波器 (Robust centralized fusion steady-state Kalman filter)

对带不确定参数和噪声方差多传感器系统(1)和(6), 有鲁棒集中式融合稳态 Kalman 滤波器

$$\hat{x}_c(t|t) = \Psi_c \hat{x}_c(t-1|t-1) + K_c y_c(t), \quad (40)$$

$$\Psi_c = [I_n - K_c H_c] \Phi_e, \quad (41)$$

$$K_c = \Sigma_c H_c^T (H_c \Sigma_c H_c^T + R_c)^{-1}, \quad (42)$$

其中:  $y_c(t)$  为实际观测,  $\Psi_c$  为稳定阵,  $\Sigma_c$  满足 Riccati 方程

$$\begin{aligned} \Sigma_c = & \Phi_e [\Sigma_c - \Sigma_c H_c^T (H_c \Sigma_c H_c^T + R_c)^{-1} H_c \Sigma_c] \times \\ & \Phi_e^T + \Gamma Q \Gamma^T + \Delta_\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

保守的集中式融合滤波误差方差  $P_c$  满足 Lyapunov 方程

$$\begin{aligned} P_c = & \Psi_c P_c \Psi_c^T + [I_n - K_c H_c] (\Gamma Q \Gamma^T + \Delta_\xi) \times \\ & [I_n - K_c H_c]^T + K_c R_c K_c^T. \end{aligned} \quad (44)$$

实际的集中式融合滤波误差方差  $\bar{P}_c$  满足 Lyapunov 方

程

$$\begin{aligned} \bar{P}_c &= \Psi_c \bar{P}_c \Psi_c^T + [I_n - K_c H_c] (\Gamma \bar{Q} \Gamma^T + \\ &\quad \Delta \Phi X \Delta \Phi^T) \times [I_n - K_c H_c]^T + \\ &\quad [I_n - K_c H_c] \Delta \Phi C \Psi_c^T + \\ &\quad \Psi_c C^T \Delta \Phi^T [I_n - K_c H_c]^T + K_c \bar{R}_c K_c^T. \end{aligned} \quad (45)$$

其中  $X = E[x(t)x^T(t)]$  和  $C = E[x(t)\tilde{x}^T(t|t)]$  分别满足 Lyapunov 方程

$$X = \Phi X \Phi^T + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T, \quad (46)$$

$$C = \Phi C \Psi_c^T + \Phi X \Delta \Phi^T [I_n - K_c H_c]^T + \Gamma \bar{Q} \Gamma^T [I_n - K_c H_c]^T. \quad (47)$$

**定理 2** 对带不确定参数和噪声方差的多传感器系统(1)和(6), 在假设1-3下, 对于指定的虚拟噪声方差上界  $\Delta_\xi > 0$ , 存在一个鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$ , 对于所有可容许的干扰  $\Delta\Phi \in \mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$ , 以及  $\bar{Q}$  和  $\bar{R}_i$  满足式(3)时, 实际集中式融合稳态 Kalman 滤波器是鲁棒的, 即

$$\bar{P}_c < P_c. \quad (48)$$

**证** 定义  $\Delta P_c = P_c - \bar{P}_c$ , 式(45)减去式(44), 可得 Lyapunov 方程

$$\Delta P_c = \Psi_c \Delta P_c \Psi_c^T + V_c, \quad (49)$$

其中定义

$$V_c = [I_n - K_c H_c] \Gamma (Q - \bar{Q}) \Gamma^T [I_n - K_c H_c]^T + K_c (R_c - \bar{R}_c) K_c^T + U_c, \quad (50)$$

$$\begin{aligned} U_c &= [I_n - K_c H_c] \Delta_\xi [I_n - K_c H_c]^T - \\ &\quad [I_n - K_c H_c] \Delta \Phi X \Delta \Phi^T [I_n - K_c H_c]^T - \\ &\quad [I_n - K_c H_c] \Delta \Phi C \Psi_c^T - \\ &\quad \Psi_c C^T \Delta \Phi^T [I_n - K_c H_c]^T. \end{aligned} \quad (51)$$

由式(3)和式(34), 有  $\bar{Q} \leq Q$  和  $\bar{R}_c \leq R_c$ . 完全类似于定理1的推导可得式(48)成立. **证毕.**

**定理 3** 对带不确定参数和噪声方差的多传感器系统, 加权观测融合鲁棒 Kalman 滤波器(15)等价于集中式融合鲁棒 Kalman 滤波器(40), 即

$$\hat{x}_M(t|t) = \hat{x}_c(t|t), \quad (52)$$

$$P_M = P_c, \bar{P}_M = \bar{P}_c. \quad (53)$$

**证** 应用信息滤波器<sup>[13]</sup>, 易证得

$$H_c^T R_c^{-1} H_c = H_M^T R_M^{-1} H_M, \quad (54)$$

$$H_c^T R_c^{-1} y_c(t) = H_M^T R_M^{-1} y_M(t), \quad (55)$$

其中  $y_c(t)$  和  $y_M(t)$  为实际的融合观测. 由式(54)可得式(53)的第1个等式成立, 进而由式(55)可得式(52)成立. 由实际融合滤波器的等价性, 即式(52)可得式(53)的第2个等式成立. **证毕.**

**推论 1**

$$\text{tr } \bar{P}_M \leq \text{tr } P_M, \text{tr } P_M = \text{tr } P_c, \quad (56)$$

$$\text{tr } \bar{P}_c \leq \text{tr } P_c, \text{tr } \bar{P}_M = \text{tr } \bar{P}_c. \quad (57)$$

称  $\text{tr } \bar{P}_M$  为实际精度, 并称  $\text{tr } P_M$  为鲁棒精度或总体精度<sup>[9]</sup>. 这意味着鲁棒观测融合和鲁棒集中式融合具有相同的鲁棒精度和相同的实际精度<sup>[9]</sup>.

对于系统(1)-(2), 类似可得局部鲁棒稳态 Kalman 滤波器  $\hat{x}_i(t|t)$ , 局部实际滤波误差方差为  $\bar{P}_i$ , 局部滤波误差保守上界为  $P_i$ .

**推论 2**

$$\bar{P}_i \leq P_i, P_M \leq P_i, i = 1, \dots, L, \quad (58)$$

$$\text{tr } \bar{P}_i \leq \text{tr } P_i, \text{tr } P_M \leq \text{tr } P_i, i = 1, \dots, L. \quad (59)$$

**证** 类似于定理1的证明可得式(58)的第1部分成立, 根据文献[15], 有  $P_c \leq P_i$  和  $P_M = P_c$ , 可得式(58)的第2部分成立. 根据式(58)可得式(59)成立.

**证毕.**

式(59)意味着融合器的鲁棒精度高于单个传感器的局部滤波器鲁棒精度.

**注 3** 与集中式融合鲁棒 Kalman 滤波器相比, 所提出的加权观测融合鲁棒 Kalman 滤波器具有较少的维数, 可显著减小计算负担, 且无精度损失.

**注 4** 由式(20)看到鲁棒精度  $\text{tr } P_M$  有关于虚拟噪声方差保守上界  $\Delta_\xi$  的选择. 减小  $\Delta_\xi$  的保守性可减小  $\text{tr } P_M$ , 从而提高鲁棒精度. 下面仿真实例图2和图3指出搜索保守性较小的上界  $\Delta_\xi$  的方法.

**4 仿真实例(Simulation example)**

考虑带不确定参数和噪声方差的两传感器定常跟踪系统

$$x(t+1) = (\Phi_e + \Delta\Phi)x(t) + \Gamma w(t), \quad (60)$$

$$y_i(t) = H_i x(t) + v_i(t), i = 1, 2. \quad (61)$$

在仿真中, 选择

$$\Phi_e = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix}, \Delta\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = [1 \ 0], H_2 = [0 \ 1], Q = 1.5, \bar{Q} = 1.0,$$

$$R_1 = 2.5, \bar{R}_1 = 2.0, R_2 = 4.5, \bar{R}_2 = 3.8.$$

在本例中  $\|\Delta\Phi\| = |\delta|$ , 因此, 干扰  $\Delta\Phi$  的鲁棒域等价于  $\delta$  的鲁棒域, 即  $\Delta\Phi$  的鲁棒域可用  $\delta$  的鲁棒域表示.

取虚拟噪声方差上界  $\Delta_\xi = \alpha I_2$ ,  $\alpha = 0.2$ , 并取  $\bar{Q} = 1.0$ , 则  $\det U_M$  的数值随  $\delta$  变化情况的如图1所示. 在本例中,  $U_M > 0$  和  $\det U_M > 0$  是等价的. 应用二分法, 可精确得到  $\delta$  的鲁棒域为  $-0.7099 \leq \delta \leq 0.1536$ , 在鲁棒域中可确保  $\bar{P}_M \leq P_M$ .

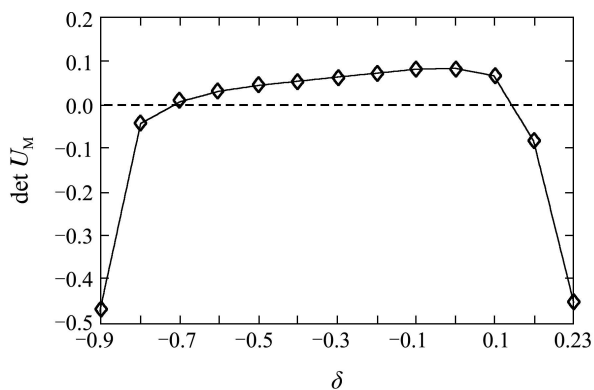


图 1 关于不确定  $\delta$  的鲁棒域

Fig. 1 The robust region with respect to uncertainty  $\delta$

当  $\bar{Q}$  从 0.05 变化到  $Q$  时, 图 2 给出了鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q}, \Delta_\xi)$  随  $\bar{Q}$  和  $\Delta_\xi$  变化的情况. 从图 2 可以看到, 当  $\bar{Q}$  从 0.05 变化到  $Q = 1.5$  时, 融合的 Kalman 滤波器的鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q})$  变小, 所以称  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(Q)$  为  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}$  的公共鲁棒域, 即当  $\bar{Q} \leq Q = 1.5$  时,  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi} = \mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(Q) \subset \mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q})$ .

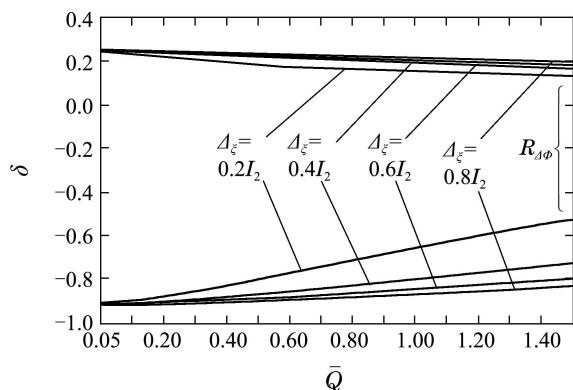


图 2 鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q}, \Delta_\xi)$  随  $\bar{Q}$  和  $\Delta_\xi$  变化

Fig. 2 The varying robust region  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q}, \Delta_\xi)$  with  $\bar{Q}$  and  $\Delta_\xi$

当  $\bar{Q}$  从 0.05 变化到  $Q$  时, 且虚拟噪声方差上界  $\Delta_\xi = \alpha I_2$  中的  $\alpha$  从 0.2 变化到 0.9 时, 图 3 给出了  $\delta$  的鲁棒域变化情况.

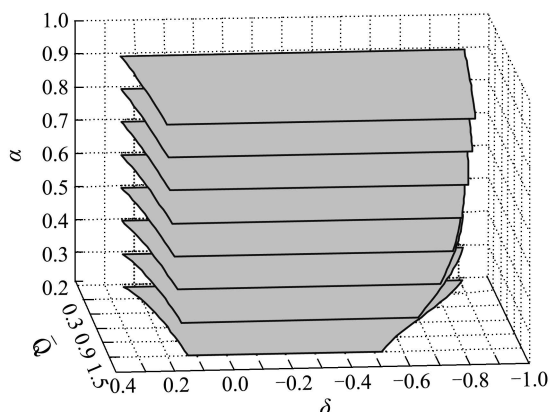


图 3 鲁棒域随  $\alpha$  和  $\bar{Q}$  变化

Fig. 3 The varying robust region with respect to  $\alpha$  and  $\bar{Q}$

根据图 2-3, 可以得出以下结论:

- 1) 当虚拟噪声方差被指定时, 如果  $\bar{Q}$  从 0.05 变化到  $Q = 1.5$  时, 鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q})$  变小.
- 2) 当  $\Delta_\xi = \alpha I_2$  中的  $\alpha$  从 0.2 变化到 0.9 时, 鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(\bar{Q}, \Delta_\xi)$  增大.
- 3) 当鲁棒域  $\mathfrak{R}_{\Delta\Phi}(Q)$  被指定时, 根据图 2-3, 还能够得到保证鲁棒性保守性较小的方差上界  $\Delta_\xi = \alpha I_2$ .

取虚拟噪声方差上界  $\Delta_\xi = 0.6 I_2$ ,  $\det U_M$  的数值随  $\bar{Q}$  和  $\delta$  变化的三维图如图 4 所示.

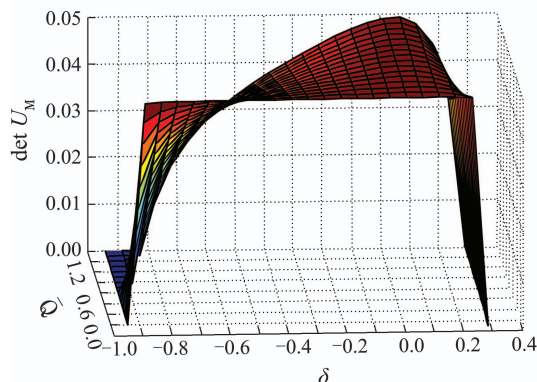


图 4 鲁棒域随  $\bar{Q}$  和  $\delta$  变化

Fig. 4 The varying robust region with  $\bar{Q}$  and  $\delta$

在鲁棒域中选择  $\alpha = 0.2$  及  $\delta = 0.2$ , 最优、鲁棒和次优加权观测融合 Kalman 滤波器间的性能比较如图 5 所示. 根据图 5 可以看到, 由于没有考虑到模型参数和噪声方差的 uncertainty, 没有使用虚拟噪声补偿不确定模型参数, 次优 Kalman 滤波器损失了精度, 其性能明显比鲁棒滤波器和最优滤波器差.

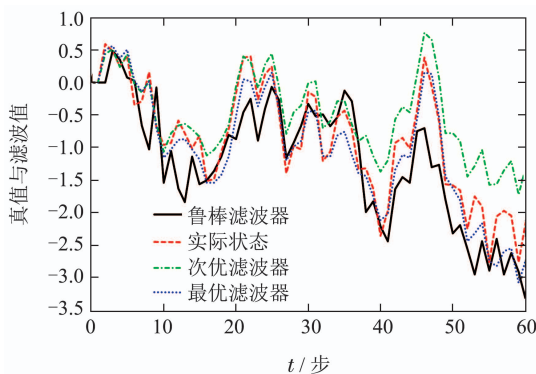


图 5 最优、鲁棒、次优滤波器间的比较

Fig. 5 The comparison among the optimal, robust and sub-optimal Kalman filters

为验证上述理论精度关系, 图 6 给出了  $\rho = 1000$  次的均方误差 (MSE) 曲线 Monte Carlo 仿真结果. 在时刻  $t$  局部和融合的鲁棒 Kalman 滤波器  $\hat{x}_\theta(t|t)$  的 MSE 值定义为: 实际方差  $\bar{P}_\theta$  的采样方差的迹, 根据采样方差的性质, 有

$$\text{MSE}_\theta(t) \rightarrow \text{tr } \bar{P}_\theta, \quad t \rightarrow \infty, \quad \rho \rightarrow \infty, \quad \theta = 1, 2, M, c.$$

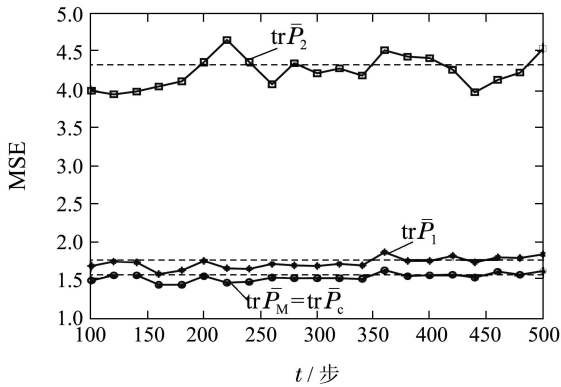


图6 局部和融合的鲁棒Kalman滤波器MSE曲线  
Fig. 6 The MSE curves of local and fused robust Kalman filters

根据图6可知,当 $t$ 和 $\rho$ 充分大时, $MSE_{\theta}(t)$ 的值近似于 $\text{tr } \bar{P}_{\theta}$ 的值,这验证了MSE估值的一致性式(62).

## 5 结论(Conclusions)

对带不确定参数和噪声方差的多传感器系统,应用虚拟噪声方法补偿参数不确定性,基于带噪声方差保守上界的最坏情形保守系统,提出了鲁棒加权观测融合和集中式融合鲁棒Kalman滤波器.基于Lyapunov方程方法,证明了所提出滤波器的鲁棒性.基于信息滤波器,证明了两种融合Kalman滤波器的等价性,且融合器的鲁棒精度高于每个局部滤波器的鲁棒精度.为保证滤波器的鲁棒性,提出了鲁棒域的概念,并给出了寻找鲁棒域和寻找保守性较小的虚拟噪声方差上界的搜索方法.

## 参考文献(References):

- [1] SHALOM Y B, LI X R, KIRUBARAJAN T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation* [M]. New York: Wiley, 2001.
- [2] SUN S L, DENG Z L. Multi-sensor optimal information fusion Kalman filter [J]. *Automatica*, 2004, 40(6): 1017 – 1023.
- [3] SRIYANANDA H. A simple method for the control of divergence in Kalman filter algorithms [J]. *International Journal of Control*, 1972, 16(6): 1101 – 1106.
- [4] XIE L H, SOH Y C, DE SOUZA C E. Robust Kalman filtering for uncertain discrete-time systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1310 – 1314.
- [5] ZHU X, SOH Y C, XIE L H. Design and analysis of discrete-time robust Kalman filters [J]. *Automatica*, 2002, 38(6): 1069 – 1077.
- [6] EBINARA Y, HAGIVARA T. A dilated LMI approach to robust performance analysis of linear time-invariant uncertain systems [J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1933 – 1941.
- [7] LEE T H, RA W S, YOON T S, et al. Robust filtering for linear discrete-time systems with parametric uncertainties: a Krein space estimation approach [C] // *Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control*. Hawaii: IEEE, 2003, 2: 1285 – 1290.
- [8] LEE T H, RA W S, YOON T S, et al. Robust Kalman filtering via Krein space estimation [J]. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 2004, 151(1): 59 – 63.
- [9] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion Kalman filters for multisensor time-varying systems with uncertain noise variances [J]. *Signal Processing*, 2014, 99(6): 185 – 200.
- [10] QI W J, ZHANG P, DENG Z L. Robust weighted fusion time-varying Kalman smoothers for multisensor systems with uncertain noise variances [J]. *Information Sciences*, 2014, 282(11): 15 – 37.
- [11] QI W J, ZHANG P, NIE G H, et al. Robust weighted fusion Kalman predictors with uncertain noise variances [J]. *Digital Signal Processing*, 2014, 30(1): 37 – 54.
- [12] ZHE D, ZHENG Y. Finite-horizon robust Kalman filtering for uncertain discrete time-varying systems with uncertain covariance white noises [J]. *IEEE Signal Processing*, 2006, 13(8): 493 – 496.
- [13] 冉陈健, 惠玉松, 顾磊, 等. 相关观测融合稳态Kalman滤波器及其最优性 [J]. *自动化学报*, 2008, 34(3): 233 – 239.  
(RAN Chenjian, HUI Yusong, GU Lei, et al. Correlated measurement fusion steady-state Kalman filtering algorithms and their optimality [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(3): 233 – 239.)
- [14] KAILATH T, SAYED A H, HASSIBI B. *Linear Estimation* [M]. New York: Prentice Hall, 2000.
- [15] DENG Z L, ZHANG P, QI W J, et al. The accuracy comparison of multisensor covariance intersection fuser and three weighting fusers [J]. *Information Fusion*, 2013, 14(2): 177 – 185.

## 作者简介:

杨春山 (1975–), 男, 博士研究生, 副教授, 主要研究方向为多传感器信息融合鲁棒Kalman滤波, E-mail: dengzili891@163.com;

王雪梅 (1979–), 女, 博士研究生, 副教授, 主要研究方向为多传感器信息融合鲁棒Kalman滤波, E-mail: dengzili889@163.com;

邓自立 (1938–), 男, 博士生导师, 教授, 主要研究方向为最优和信息融合鲁棒Kalman滤波理论, E-mail: dzl@hlju.edu.cn.