文章编号: 1000−8152(2012)07−0909−06

基于分段连续Lyapunov函数的采样系统鲁棒保性能控制

刘富春, 高焕丽

(华南理工大学 自动化科学与工程学院 自主系统与网络控制教育部重点实验室, 广东 广州 510640)

摘要: 针对不确定采样控制系统的鲁棒保性能控制问题, 首先将采样系统描述为跳变线性系统, 基于矩阵凸组合思想构造了分段连续Lyapunov函数, 进而在线性矩阵不等式框架内给出了不确定采样系统鲁棒稳定的条件. 针对范数有界参数不确定采样系统, 提出了鲁棒保性能控制器设计的在线算法, 在每个采样周期内通过求解一组线性矩阵不等式的可行解来构造出状态反馈增益矩阵. 最后的仿真算例验证了所提设计方法的有效性.

关键词: 采样控制系统; 参数不确定性; 鲁棒控制; 保性能控制

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Robust guaranteed cost control for sampled-data systems based on piecewise continuous Lyapunov functions

LIU Fu-chun, GAO Huan-li

(The Key Laboratory of Autonomous Systems and Networked Control, College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: In our work, the sampled-data system is described as a jump linear system. By introducing the piecewise continuous Lyapunov functions based on matrix convex combination, we develop the robust stability conditions for the uncertain sampled-data system in the framework of linear matrix inequality (LMI). The state-feedback gain matrices are obtained as feasible solutions from solving a set of LMIs in every sampling period. A simulation is performed to demonstrate the effectiveness of the proposed design method.

Key words: sampled-data control systems; parametric uncertainty; robust control; guaranteed cost control

1 引言(Introduction)

在实际控制工程中, 仅考虑系统的稳定性是不够的, 还需要考虑其他性能指标, 线性二次型指标在一定程度上反映了系统的动态特性, 如调节时间、控制能量的约束等. 线性二次型最优控制要求被控对象的数学模型精确已知, 然而, 在实际控制工程中, 由于系统变得越来越复杂, 不可能获得系统的精确数学模型. 针对这个问题, Chang和Peng[1]于1972年提出鲁棒保性能控制(guranteed cost control, GCC)思想, 基本思想是当系统不确定在允许的范围内时, 所设计的控制器能保证闭环系统鲁棒稳定, 且二次性能指标不超过某一确定的上界. 鲁棒保性能控制器使系统具有鲁棒稳定和鲁棒性能的性质就决定了它在实际工程中具有重要的实际意义.

对于采样系统的二次型控制问题, 已经取得了许多研究成果[2–8], 研究方法大体上分为两种: 第1种, 基于提升技术的控制设计; 第2种, 基于具有混合系统特性的跳变系统方法的控制设计. 跳变系统方法与提升技术方法相比有如下优势: 描述上具有清楚的物理含义; 适合处理参数不确定、时滞等复杂采样系统; 时域状态空间计算简单易行. Lu等[9]基于跳变Riccati不等式方法研究了时变范数有界参数不确定采样系统的鲁棒保性能控制问题, 并将研究结果应用于打浆造纸过程控制, 取得了较好的效果. 但对于跳变Riccati方程或Riccati不等式, 求解不是很方便. 基于LMI的凸优化方法在系统和控制领域得到了广泛的应用, 高效的数值算法可用来解决控制器求解问题. 文献[10–12]基于LMI优化方法和跳变模型研究了采样系统的滤波器设计问题.

本文将基于文献[9–10, 12]的思路, 研究参数不确定采样系统的鲁棒保性能控制问题. 基于凸组合思想构造分段连续Lyapunov函数, 应用分段连续Lyapunov函数推导参数不确定采样系统的稳定条件, 在此基础上, 提出状态反馈鲁棒保性能控制器的在线设计方法.

2 问题描述(Problem description)

保性能控制设计中往往不考虑外部扰动的影响,

收稿日期: 2012−02−29; 收修改稿日期: 2012−04−26.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61104083, 61174053); 教育部高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20100172120029); 广东省自然科学基金资助项目(S2011040002782); 中国博士后科学基金资助项目(20110490887).

考虑如下参数不确定采样系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + \Delta A(t)]x(t) + [B + \Delta B(t)]u(t), \\ x(0) = x_0, \\ y(ih) = Cx(ih), \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$为系统状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$为控制输入向量, $y(ih) \in \mathbb{R}^r$为采样输出, i为非负整数, $h > 0$为系统的非病态采样周期(即采样后系统的能控性不变), A, B和C为描述名义系统的已知适维实矩阵, $\Delta A(t), \Delta B(t)$为描述参数不确定性的实值不确定矩阵函数, 具有如下形式:

$$[\Delta A(t) \ \ \Delta B(t)] = MF(t)[N_\mathrm{a} \ \ N_\mathrm{b}], \tag{2}$$

其中: $M, N_\mathrm{a}, N_\mathrm{b}$为已知实矩阵, $F(t) \in \mathbb{R}^{i\times j}$是元素为Lebesgue可测的未知矩阵函数, 且满足

$$F^\mathrm{T}(t)F(t) \leqslant I, \ \forall t, \tag{3}$$

其中I为具有适当维数的单位矩阵.

定义如下连续二次型性能指标:

$$J = \int_0^\infty [x^\mathrm{T}(t)Qx(t) + u^\mathrm{T}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t, \quad Q > 0, \ R > 0. \tag{4}$$

考虑由零阶保持器实现的状态反馈控制器

$$u(t) = K(i)x(ih), \ ih < t \leqslant (i+1)h \tag{5}$$

应用到采样系统(1)中, 可得到闭环采样控制系统

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = [A_\mathrm{c} + \Delta A_\mathrm{c}(t)]\xi(t), \ t \neq ih, \ \xi(0) = \xi_0, \\ \xi(ih^+) = A_\mathrm{d}\xi(ih), \end{cases} \tag{6}$$

其中:

$$\xi(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \ \xi_0 = [x_0^\mathrm{T} \ \ 0]^\mathrm{T}, \ A_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_\mathrm{c} = M_\mathrm{c}F(t)N_\mathrm{c}, \ M_\mathrm{c} = \begin{bmatrix} M \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$N_\mathrm{c} = [N_\mathrm{a} \ \ N_\mathrm{b}], \ A_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K(i) & 0 \end{bmatrix}.$$

本文所要研究的问题可描述如下:

问题 1 状态反馈保性能控制问题. 对于参数不确定采样系统(1)和二次型性能指标(4), 在每个采样时刻在线设计形如式(5)的状态反馈控制器, 使相应闭环系统(6)渐近稳定, 且二次型性能指标J小于某一确定的性能上界.

3 基于分段连续Lyapuno函数的鲁棒稳定分析(Robust stability analysis based on piecewise continuous Lyapunov functions)

在设计保性能控制器之前, 笔者先基于分段连续Lyapunov函数方法得到参数不确定采样系统鲁棒稳定的条件.

3.1 分段连续Lyapunov函数的构造(Construction of piecewise continuous Lyapunov functions)

为方便叙述, 记$\tilde{A}_\mathrm{c} = A_\mathrm{c} + \Delta A_\mathrm{c}(t)$, 以下引理基于时变Lyapunov函数方法给出了闭环采样系统鲁棒渐近稳定的充分条件.

引理 1 如果存在对称正定矩阵$P(t), P(i^+)$, $P(i)$使如下矩阵不等式成立:

$$\dot{P}(t) + \tilde{A}_\mathrm{c}{}^\mathrm{T}P(t) + P(t)\tilde{A}_\mathrm{c} < 0, \ t \neq ih, \tag{7}$$

$$A_\mathrm{d}^\mathrm{T}P(ih^+)A_\mathrm{d} - P(ih) < 0, \ i = 0, 1, 2, \cdots, \tag{8}$$

那么闭环采样系统(6)渐近稳定.

证 为闭环采样系统(6)定义如下形式的Lyapunov函数:

$$V(t) = \begin{cases} \xi^\mathrm{T}(t)P(t)\xi(t), \ t \neq ih, \\ \xi^\mathrm{T}(t)P(t)\xi(t), \ t = ih, ih^+. \end{cases}$$

下面分两步来完成证明:

第1步 连续部分. 对闭环采样系统中的连续部分, 在区间$ih < t \leqslant (i+1)h$中, 定义Lyapunov函数$V = \xi^\mathrm{T}(t)P(t)\xi(t)$, 对时间求微分, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = {} & \dot{\xi}^\mathrm{T}(t)P(t)\xi(t) + \xi^\mathrm{T}(t)\dot{P}(t)\xi(t) + \\ & \xi^\mathrm{T}(t)P(t)\dot{\xi}(t) = \\ & \xi^\mathrm{T}(t)\tilde{A}_\mathrm{c}{}^\mathrm{T}P(t)\xi(t) + \xi^\mathrm{T}(t)\dot{P}(t)\xi(t) + \\ & \xi^\mathrm{T}(t)P(t)\tilde{A}_\mathrm{c}\xi(t) = \\ & \xi^\mathrm{T}(t)\{\dot{P}(t) + \tilde{A}_\mathrm{c}{}^\mathrm{T}P(t) + P(t)\tilde{A}_\mathrm{c}\}\xi(t). \end{aligned}$$

根据Lyapunov稳定性理论可知连续部分渐近稳定的充分条件是: 存在时变对称矩阵$P(t) > 0$, 满足微分Riccati不等式

$$\dot{P}(t) + \tilde{A}_\mathrm{c}^\mathrm{T}P(t) + P(t)\tilde{A}_\mathrm{c} < 0, \ t \neq ih.$$

第2步 离散部分. Lyapunov函数在$t = ih, ih^+$处求差分, 得

$$\begin{aligned} & \Delta V(ih) = V(ih^+) - V(ih) = \\ & \xi^\mathrm{T}(ih^+)P(ih^+)\xi(ih^+) - \xi^\mathrm{T}(ih)P(ih)\xi(ih) = \\ & \xi^\mathrm{T}(ih)\left[A_\mathrm{d}^\mathrm{T}P(ih^+)A_\mathrm{d} - P(ih)\right]\xi(ih). \end{aligned}$$

根据离散Lyapunov稳定性理论, 由式(8)可知离散部分渐近稳定. 引理得证.

在分析不确定采样系统鲁棒稳定性的引理1中采用了时变的Lyapunov函数, 这在实际计算时有一定的困难. 为了便于应用线性矩阵不等式技术来设计保性能控制器, 必须构造一种便于计算的Lyapunov函数. 为了解决这个问题, 基于矩阵凸组合思想构造如下形式的分段连续Lyapunov矩阵[13]:

$$\begin{aligned} P(t) = {} & P(i+1) - (t - (i+1)h)W(i+1), \\ & ih < t \leqslant (i+1)h, \end{aligned} \tag{9}$$

其中: 顶点$P(i+1)$是对称正定矩阵, 顶点$P(i+1) -$

$hW(i+1)$也是对称正定矩阵, 从而可以保证在区间$ih<t\leqslant(i+1)h$中, Lyapunov矩阵$P(t)$是对称正定的. 这样构造的Lyapunov函数具有一个明显的特点: 只需在凸组合的端点处判定相应线性矩阵不等式的成立与否.　　证毕.

3.2　参数不确定采样系统的鲁棒稳定条件(Condition of robust stability of parametric uncertain SD systems)

考虑自治闭环采样系统(6), 以下定理基于式(9)定义的分段连续Lyapunov函数给出了闭环采样系统鲁棒稳定的充分条件.

定理 1　自治闭环采样系统(6)鲁棒渐近稳定的充分条件为: 对于每个采样区间$ih<t\leqslant(i+1)h$, $i=0,1,2,\cdots$, 存在对称正定矩阵$P(i+1^+)$, $P(i+1)$和矩阵$W(i+1)$, 满足

$$\tilde{A}_{\rm c}^{\rm T}P(i+1)+P(i+1)\tilde{A}_{\rm c}+W(i+1)-h[\tilde{A}_{\rm c}^{\rm T}W(i+1)+W(i+1)\tilde{A}_{\rm c}]<0, \tag{10}$$

$$\tilde{A}_{\rm c}^{\rm T}P(i+1)+P(i+1)\tilde{A}_{\rm c}+W(i+1)<0, \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix}-P(i+1) & A_{\rm d}^{\rm T}\\ A_{\rm d} & -P(i+1^+)^{-1}\end{bmatrix}<0. \tag{12}$$

证　由引理1可知, 闭环系统连续部分渐近稳定的条件为

$$\dot{P}(t)+\tilde{A}_{\rm c}^{\rm T}P(t)+P(t)\tilde{A}_{\rm c}<0. \tag{13}$$

将式(9)定义的分段连续Lyapunov矩阵代入上式, 得

$$\tilde{A}_{\rm c}^{\rm T}P(i+1)+P(i+1)\tilde{A}_{\rm c}+W(i+1)+(t-(i+1)h)[\tilde{A}_{\rm c}^{\rm T}W(i+1)+W(i+1)\tilde{A}_{\rm c}]<0.$$

由于$P(t)$是关于端点的凸组合形式, 只需在端点处检验式(13)是否成立, 即采样区间$ih<t\leqslant(i+1)h$中, 在$t=(i+1)h$处检验$P((i+1)h)$和在$t=ih^+$处检验$P(ih^+)$是否满足式(13), 可得式(10)和式(11).

离散部分: 针对系统(6)的离散跳变方程的每个跳变点定义Lyapunov函数

$$V(i+1)=\xi^{\rm T}(i+1)P(i+1)\xi(i+1).$$

计算时间差分

$$\begin{aligned}\Delta V=&\ \xi(i+1^+)^{\rm T}P(i+1^+)\xi(i+1^+)-\\ &\ \xi(i+1)^{\rm T}P(i+1)\xi(i+1)=\\ &\ \xi(i+1)^{\rm T}[A_{\rm d}^{\rm T}P(i+1^+)A_{\rm d}-P(i+1)]\xi(i+1).\end{aligned}$$

依据离散Lyapunov稳定理论可得$A_{\rm d}^{\rm T}P(i+1^+)A_{\rm d}-P(i+1)<0$. 进一步应用Schur补引理得到如下LMI:

$$\begin{bmatrix}-P(i+1) & A_{\rm d}^{\rm T}\\ A_{\rm d} & -P(i+1^+)^{-1}\end{bmatrix}<0. \tag{14}$$

定理得证.

4　基于ILMI的状态反馈保性能控制器设计(ILMI-based state-feedback guaranteed cost controller design)

基于迭代线性矩阵不等式技术给出参数不确定采样系统的状态反馈保性能控制问题可解的充分条件和控制器参数化形式. 为了导出主要结果, 给出以下引理.

引理 2[14]　给定适当维数的矩阵Y, M和N, 其中Y是对称的, 则

$$Y+MF(t)N+N^{\rm T}F^{\rm T}(t)M^{\rm T}<0$$

对于所有满足$F^{\rm T}(t)F(t)\leqslant I$的矩阵$F$成立, 当且仅当存在一个常数$\varepsilon>0$, 使得

$$Y+\frac{1}{\varepsilon}MM^{\rm T}+\varepsilon N^{\rm T}N<0.$$

对于闭环采样系统(6), 二次型指标(4)可改写为$J=\int_0^\infty\xi^{\rm T}(t)Q_{\rm c}\xi(t){\rm d}t$, 其中$Q_{\rm c}={\rm diag}\{Q,R\}$. 给出鲁棒保性能控制器的定义:

定义 1　对于闭环采样系统(6), 如果存在对称正定矩阵$P(t), P(i^+), P(i)$满足

$$\dot{P}(t)+[A_{\rm c}+\Delta A_{\rm c}(t)]^{\rm T}P(t)+P(t)[A_{\rm c}+\Delta A_{\rm c}(t)]+Q_{\rm c}<0, \tag{15}$$

$$A_{\rm d}^{\rm T}P(i^+)A_{\rm d}-P(i)<0, \tag{16}$$

那么, 对于所有允许的参数不确定性, 控制器(5)称为鲁棒保性能控制器.

为了揭示定义1和闭环系统稳定性和性能的关系, 给出以下引理.

引理 3　若控制器(5)是一个鲁棒保性能控制器, 则闭环采样系统(6)全局一致渐近稳定, 此外, 对所有允许的不确定性, 相应二次型性能指标满足

$$J\leqslant\xi(0)^{\rm T}P(0)\xi(0).$$

证　由矩阵不等式(15)和(16)和引理1, 可知闭环系统渐近稳定.

接下来, 证明闭环系统二次型性能指标小于一个确定的性能上界. 对任意的$s\in[ih,ih+h)$, 有

$$\begin{aligned}&\int_{ih}^{s}\dot{V}(\xi(t)){\rm d}t=\\ &\xi^{\rm T}(s)P(s)\xi(s)-\xi^{\rm T}(ih)P(ih)\xi(ih)=\\ &\int_{ih}^{s}\{\xi^{\rm T}(t)[\dot{P}(t)+[A_{\rm c}+\Delta A_{\rm c}(t)]^{\rm T}P(t)+\\ &P(t)[A_{\rm c}+\Delta A_{\rm c}(t)]]\xi(t)\}{\rm d}t<\\ &\int_{ih}^{s}\xi^{\rm T}(t)(-Q_{\rm c})\xi(t){\rm d}t.\end{aligned} \tag{17}$$

另一方面, 考虑闭环系统离散跳变方程, 有

$$\begin{aligned}&\Delta V(ih)=\xi^{\rm T}(t)P\xi(t)|_{ih}^{ih^+}=\\ &\xi^{\rm T}(ih^+)P(ih^+)\xi(ih^+)-\xi^{\rm T}(ih)P(ih)\xi(ih)=\\ &\xi^{\rm T}(ih)\big[A_{\rm d}^{\rm T}P(ih^+)A_{\rm d}-P(ih)\big]\xi(ih)<0.\end{aligned}$$

在时间区间$T \in [0,\infty)$, 可得

$$\xi^{\mathrm T}(T)P(T)\xi(T)-\xi^{\mathrm T}(0)P(0)\xi(0)< \int_0^{\infty}\xi^{\mathrm T}(t)(-Q_{\mathrm c})\xi(t)\mathrm dt+ \sum_{ih\in[0,\infty]}\xi^{\mathrm T}(ih)\big[A_{\mathrm d}^{\mathrm T}P(ih^+)A_{\mathrm d}-P(ih)\big]\xi(ih).$$

注意到系统是稳定的, 得到$\xi(\infty)=0$, 由式(16)可得

$$\int_0^{\infty}\xi^{\mathrm T}(t)Q_{\mathrm c}\xi(t)\mathrm dt\leqslant \xi^{\mathrm T}(0)P(0)\xi(0),$$

即二次型性能指标值小于$\xi^{\mathrm T}(0)P(0)\xi(0)$. 定理得证.

定义1和引理3给出了状态反馈保性能控制器设计的条件, 但该条件是无穷维的, 为此, 需要将定义1中描述的无穷维微分矩阵不等式转换成可由数值算法可解的有限维线性矩阵不等式. 以下定理基于分段连续Lyapunov函数方法给出了参数不确定采样系统状态反馈鲁棒保性能控制器存在条件及增益矩阵$K(i)$的参数化形式.

定理 2 如果在每个采样区间$ih<t\leqslant(i+1)h$ $(i=0,1,2,\cdots)$中, 存在对称正定矩阵$P(i+1^+)$, $P(i+1)$、矩阵$W(i+1)$:

$$\begin{cases} P(i+1^+)=\begin{bmatrix}P_{11}^+ & P_{12}^+\\ * & P_{22}^+\end{bmatrix},\\ P(i+1)=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ * & P_{22}\end{bmatrix},\\ W(i+1)=\begin{bmatrix}W_{11} & W_{12}\\ * & W_{22}\end{bmatrix}\end{cases} \tag{18}$$

和标量$\varepsilon_1(i+1)>0$, $\varepsilon_2(i+1)>0$及状态反馈控制器参数矩阵$K(i)$, 满足如下LMIs:

$$\begin{bmatrix}\Omega_{11}(i+1) & \Omega_{12}(i+1) & \Psi_{13}(i+1)\\ * & \Omega_{22}(i+1) & \Psi_{23}(i+1)\\ * & * & -\varepsilon_1(i+1)I\end{bmatrix}<0, \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix}\Phi_{11}(i+1) & \Phi_{12}(i+1) & P_{11}M\\ * & \Phi_{22}(i+1) & P_{12}^{\mathrm T}M\\ * & * & -\varepsilon_2(i+1)I\end{bmatrix}<0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix}\Pi_{11}(i+1) & *\\ \Pi_{12}^{\mathrm T}(i+1) & \Pi_{22}(i+1^+)\end{bmatrix}<0, \tag{21}$$

其中:

$$\Omega_{11}(i+1)= A^{\mathrm T}P_{11}+P_{11}A+W_{11}-h[W_{11}A+A^{\mathrm T}W_{11}]+ \varepsilon_1(i+1)N_{\mathrm a}^{\mathrm T}N_{\mathrm a},$$

$$\Omega_{12}(i+1)= A^{\mathrm T}P_{12}+P_{11}B+W_{12}- h[W_{11}B+A^{\mathrm T}W_{12}]+\varepsilon_1(i+1)N_{\mathrm a}^{\mathrm T}N_{\mathrm b},$$

$$\Omega_{22}(i+1)= B^{\mathrm T}P_{12}+P_{12}^{\mathrm T}B+W_{22}- h[W_{12}^{\mathrm T}B+B^{\mathrm T}W_{12}]+R+\varepsilon_1(i+1)N_{\mathrm b}^{\mathrm T}N_{\mathrm b},$$

$$\Psi_{13}(i+1)=[P_{11}-hW_{11}]M,$$

$$\Psi_{23}(i+1)=[P_{12}^{\mathrm T}-hW_{12}^{\mathrm T}]M,$$

$$\Phi_{11}(i+1)= A^{\mathrm T}P_{11}+P_{11}A+W_{11}+Q+\varepsilon_2(i+1)N_{\mathrm a}^{\mathrm T}N_{\mathrm a},$$

$$\Phi_{12}(i+1)= A^{\mathrm T}P_{12}+P_{11}B+W_{12}+\varepsilon_2(i+1)N_{\mathrm a}^{\mathrm T}N_{\mathrm b},$$

$$\Phi_{22}(i+1)= B^{\mathrm T}P_{12}+P_{12}^{\mathrm T}B+W_{22}+R+\varepsilon_2(i+1)N_{\mathrm b}^{\mathrm T}N_{\mathrm b},$$

$$\Pi_{11}(i+1)=-\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ * & P_{22}\end{bmatrix},$$

$$\Pi_{22}(i+1^+)=-\begin{bmatrix}P_{11}^+ & P_{12}^+\\ * & P_{22}^+\end{bmatrix}^{-1},$$

$$\Pi_{12}^{\mathrm T}(i+1)=\begin{bmatrix}I & 0\\ K(i) & 0\end{bmatrix},$$

那么闭环采样系统(6)渐近稳定, 且二次型性能指标$J\leqslant\xi^{\mathrm T}(0)P(0)\xi(0)$.

证 由引理3可知, 闭环系统连续部分鲁棒保性能控制问题有解的条件是

$$\dot P(t)+[A_{\mathrm c}+\Delta A_{\mathrm c}(t)]^{\mathrm T}P(t)+ P(t)[A_{\mathrm c}+\Delta A_{\mathrm c}(t)]+Q_{\mathrm c}<0. \tag{22}$$

应用定理1, 将式(9)构造的分段连续Lyapunov矩阵代入式(22), 得到如下LMIs:

$$[A_{\mathrm c}+\Delta A_{\mathrm c}(t)]^{\mathrm T}P(i+1)+P(i+1)[A_{\mathrm c}+ \Delta A_{\mathrm c}(t)]+W(i+1)+Q_{\mathrm c}-h[(A_{\mathrm c}+ \Delta A_{\mathrm c}(t))^{\mathrm T}W(i+1)+W(i+1)(A_{\mathrm c}+ \Delta A_{\mathrm c}(t))]<0, \tag{23}$$

$$[A_{\mathrm c}+\Delta A_{\mathrm c}(t)]^{\mathrm T}P(i+1)+P(i+1)[A_{\mathrm c}+ \Delta A_{\mathrm c}(t)]+W(i+1)+Q_{\mathrm c}<0. \tag{24}$$

将不确定性的形式$\Delta A_{\mathrm c}=M_{\mathrm c}F(t)N_{\mathrm c}$代入LMI(23), 可得

$$A_{\mathrm c}^{\mathrm T}P(i+1)+P(i+1)A_{\mathrm c}+W(i+1)+Q_{\mathrm c}+ P(i+1)M_{\mathrm c}F(t)N_{\mathrm c}+N_{\mathrm c}^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)M_{\mathrm c}^{\mathrm T}P(i+1)- h[A_{\mathrm c}^{\mathrm T}W(i+1)+W(i+1)A_{\mathrm c}]- h[W(i+1)M_{\mathrm c}F(t)N_{\mathrm c}+ N_{\mathrm c}^{\mathrm T}F^{\mathrm T}(t)M_{\mathrm c}^{\mathrm T}W(i+1)]<0. \tag{25}$$

进一步合并同类项并应用引理2和Schur补引理, 式(25)成立等价于存在$\varepsilon_1(i+1)>0$, 满足

$$\begin{bmatrix}\Xi_1(i+1) & [P(i+1)-hW(i+1)]M_{\mathrm c}\\ * & -\varepsilon_1(i+1)I\end{bmatrix}<0, \tag{26}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varXi_1(i+1)=\\&A_{\rm c}^{\rm T}P(i+1)+P(i+1)A_{\rm c}+W(i+1)+\\&Q_{\rm c}-h[A_{\rm c}^{\rm T}W(i+1)+W(i+1)A_{\rm c}]+\\&\varepsilon_1(i+1)N_{\rm c}^{\rm T}N_{\rm c}.\end{aligned}$$

将定理2中定义的正定矩阵$P(i+1)$和$W(i+1)$代入式(26)可得式(19). 基于类似的方法, 式(24)成立等价于存在$\varepsilon_2(i+1)>0$, 满足

$$\begin{aligned}&A_{\rm c}^{\rm T}P(i+1)+P(i+1)A_{\rm c}+W(i+1)+Q_{\rm c}+\\&\frac{1}{\varepsilon_2(i+1)}P(i+1)M_{\rm c}M_{\rm c}^{\rm T}P(i+1)+\\&\varepsilon_2(i+1)N_{\rm c}^{\rm T}N_{\rm c}<0.\end{aligned}$$

由Schur补引理得到

$$\begin{bmatrix}\varXi_2(i+1) & P(i+1)M_{\rm c}\\ M_{\rm c}^{\rm T}P(i+1) & -\varepsilon_2(i+1)I\end{bmatrix}<0, \tag{27}$$

其中

$$\begin{aligned}&\varXi_2(i+1)=\\&A_{\rm c}^{\rm T}P(i+1)+P(i+1)A_{\rm c}+W(i+1)+\\&Q_{\rm c}+\varepsilon_2(i+1)N_{\rm c}^{\rm T}N_{\rm c}.\end{aligned}$$

将定理2中定义的正定矩阵$P(i+1)$和$W(i+1)$代入式(27)可得式(20).

离散部分: 针对离散跳变方程的每个跳变点定义Lyapunov函数

$$V(i+1)=\xi^{\rm T}(i+1)P(i+1)\xi(i+1). \tag{28}$$

计算时间差分

$$\begin{aligned}\Delta V=&\,\xi(i+1^+)^{\rm T}P(i+1^+)\xi(i+1^+)-\\&\xi(i+1)^{\rm T}P(i+1)\xi(i+1)=\\&\xi(i+1)^{\rm T}[A_{\rm d}^{\rm T}P(i+1^+)A_{\rm d}-\\&P(i+1)]\xi(i+1).\end{aligned}$$

将定理2中定义的正定矩阵$P(i+1^+)$和$P(i+1)$代入定理1中的式(12)可得式(21). 定理得证.

结合定理2可给出如下状态反馈鲁棒保性能控制器设计的在线算法.

算法 1

Step 1 给定有限时域$0\leqslant t\leqslant(N-1)h$和采样周期$h$, 选取终点初始值$P(N^+)$, 设定$i=N-1$准备反向迭代求解;

Step 2 利用高效的内点法求解线性矩阵不等式组(19)–(21), 得到矩阵$P(i+1), W(i+1), K(i)$和标量$\varepsilon_1(i+1), \varepsilon_2(i+1)$;

Step 3 利用式(9)计算下一个采样区间的终点值$P(ih^+)$, 即

$$P(ih^+)=P(i+1)-hW(i+1).$$

Step 4 若$i\neq0$, 设定$i=i-1$, 循环执行Step 2和Step 3, 否则结束.

实现算法1的关键是在每个采样区间内, 能实时高效地完成线性矩阵不等式组的求解. 优化问题一般可划分为两类, 即P问题和NP难问题. 所谓P问题, 就是可以被关于问题本身的参数, 如维数, 约束个数等的多项式时间内求解的问题. NP难问题仍然是计算复杂性理论未解决的难题. 具有线性矩阵不等式(组)约束的凸优化问题是P问题, 即为多项式时间可解的, 且能够得到全局最优解. 目前, LMI问题的多项式时间数值解法有多种, 如椭球法和内点法. 内点法又分中心内点法、投影法和原始–对偶法. Nestorov[15]等对不同内点法的计算复杂性界限给出了理论分析, 从理论上保证了LMI求解的效率. 随着凸优化问题数值求解算法的发展和完善, 基于LMI的在线控制算法将得到广泛的应用. 本文后续给出的基于LMI的在线算法均采用高效的内点算法来保证求解的实时性.

5 仿真算例(Simulation example)

本节给出数字仿真算例来验证所提方法的有效性.

例 1 为了验证定理2所提出的基于分段连续Lyapunov函数的状态反馈鲁棒保性能控制器设计方法的有效性, 考虑参数不确定采样系统(1), 参数矩阵如下:

$$A=\begin{bmatrix}-1.25 & -0.2\\ 0.2 & -2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0.2\\ 0.3\end{bmatrix}.$$

设系统矩阵具有如下形式的摄动:

$$\Delta A(t)=\begin{bmatrix}-0.1\sin t & -0.1\sin t\\ 0.12\sin t & 0.12\sin t\end{bmatrix},$$

$$\Delta B(t)=\begin{bmatrix}-0.1\sin t\\ 0.12\sin t\end{bmatrix},$$

则, 根据式(2), 不确定时变矩阵$F(t)=\sin t$, 从而得到表征参数不确定性的矩阵

$$M=\begin{bmatrix}-0.1\\ 0.12\end{bmatrix},\ N_{\rm a}=[1\ \ 1],\ N_{\rm b}=1.$$

采样周期选择为$h=0.1$ s, 仿真时间10 s, 在有限区间$ih<t\leqslant(i+1)h,\ i=0,1,2,\cdots,100$. 根据定理2, 利用MATLAB LMI工具箱求解LMIs(19)–(21), 可得到状态反馈控制器. 选取终点值$P(100^+)=\mathrm{diag}\{1,1,1,1,1\}$, 得到的最后迭代结果为

$$P(0)=\begin{bmatrix}2.9879 & 0.1789 & -0.0142\\ 0.1789 & 2.3482 & -0.0143\\ -0.0142 & -0.0143 & 2.3212\end{bmatrix},$$

$$W(0)=\begin{bmatrix}3.7962 & -0.5136 & -0.6421\\ -0.5136 & 5.4734 & -0.5541\\ -0.6421 & -0.5541 & -2.4532\end{bmatrix},$$

$$K(0)=[0.2877\quad 0.2432].$$

系统的初始状态$x(0)=[1\quad -1]^{\mathrm{T}}$, 由定理2得到的二次型性能指标上界为4.9783. 图1和图2分别给出了闭环系统的状态响应和控制信号, 仿真结果表明闭环采样系统是稳定的, 验证了所提方法的有效性. 图3给出了在每个采样区间优化得到的矩阵$P(i+1)$的最小特征值,表明每个区间的$P(i+1)$都是正定的, 从而保证了闭环系统渐近稳定.

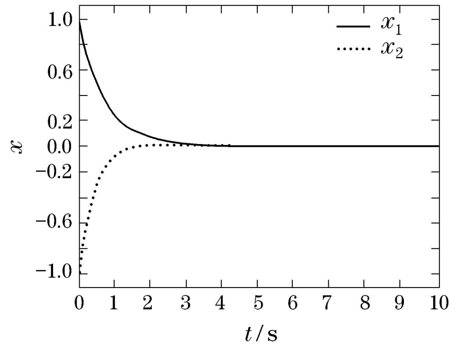

图 1 系统状态响应曲线

Fig. 1 The state response

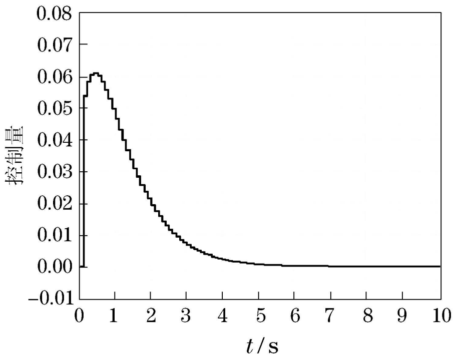

图 2 系统的控制输入

Fig. 2 The control actuation

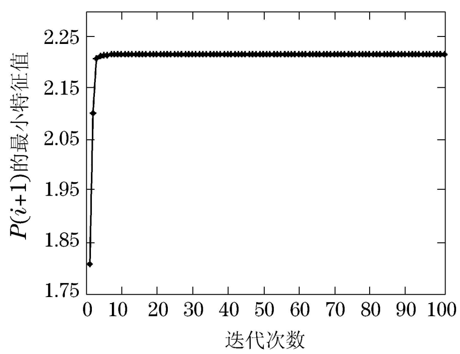

图 3 矩阵$P(i+1)$的最小特征值

Fig. 3 The minimum eigenvalues of matrices $P(i+1)$

6 结论(Conclusion)

本文基于跳变系统方法研究了参数不确定采样系统的状态反馈鲁棒保性能控制问题. 基于分段连续Lyapunov函数方法给出了参数不确定采样系统鲁棒稳定的充分条件, 在此基础上提出了状态反馈鲁棒保性能控制器的在线设计算法, 该算法可通过求解迭代线性矩阵不等式得到控制器参数矩阵.

参考文献(References):

[1] CHANG S S L, PENG T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1972, 17(4): 474 – 483.

[2] CHEN T, FRANCIS B A. H_2–optimal sampled-data control [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(4): 387 – 397.

[3] QIU L, CHEN T. H_2–optimal design of multirate sampled-data systems [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2506 – 2511.

[4] ICHIKAWA A, KATAYAMA H. H_2 and H_∞ control for jump systems with application to sampled-data systems [J]. *International Journal of Systems Science*, 1998, 29(8): 829-849.

[5] HU L S, LAM J, CAO Y Y, et al. A linear matrix inequality (LMI) approach to robust H_2 sampled-data control for linear uncertain systems [J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B*, 2003, 33(1): 149 – 155.

[6] PARK K S, PARK J B, CHOI Y H, et al. Design of H_2 controllers for sampled-data systems with input time delays [J]. *Real-Time Systems*, 2004, 26(3): 231 – 260.

[7] MIRKIN L, PALMOR Z J. Mixed discrete/continuous specifications in sampled-data H_2–optimal control [J]. *Automatica*, 1997, 33(11): 1997 – 2014.

[8] MIRKIN L, ROTSTEIN H P, PALMOR Z J. H_2 and H_2 design of sampled-data systems using lifting, part II: properties of systems in the lifted domain [J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1999, 38(1): 197 – 218.

[9] LU Y Q, XUE A K, SUN Y X. Guaranteed cost control for sampled-data systems [C] //*Proceedings of the American Control Conference*. Chicago: IEEE, 2000, 1(6): 185 – 189.

[10] XU S, CHEN T. Robust H_∞ filtering for uncertain impulsive stochastic systems under sampled measurements [J]. *Automatica*, 2003, 39(3): 509 – 516.

[11] DONG Y, SUN J. Robust stochastic stability and H_∞ performance for a class of uncertain impulsive stochastic systems [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 26(5): 1491 – 1498.

[12] SUN P, JING Y W. Robust H_∞ filtering on uncertain systems under sampled measurements [J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2006, 4(4): 379 – 384.

[13] 苏千豪. H_∞取样模糊系统观测与控制定理 [D]. 台湾: 国立中央大学, 2005.
(SU Chien-Hao. H_∞ *sampled-data fuzzy systems–control and observer theor* [D]. Taiwan: National Central University, 2005.)

[14] XIE L H. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty [J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 741-750.

[15] NESTOROV Y, NEMIROVSKII A S. *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming Theory and Applications* [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

作者简介:

刘富春 (1978–), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为采样控制系统、无人机导航与控制, E-mail: liufc@scut.edu.cn;

高焕丽 (1977–), 女, 博士, 讲师, 目前研究方向为广义系统及应用, E-mail: hlgao@scut.edu.cn.