

## 加权多模型自适应控制的稳定性

张维存

(北京科技大学 自动化学院, 北京 100083)

**摘要:** 加权多模型自适应控制的稳定性证明是一个未解决的问题. 本文采用基于模型输出误差的递推加权算法, 在模型输出误差可分的情况下, 可以保证其收敛性; 然后在加权收敛的前提下, 借助虚拟等价系统的概念和方法证明了加权多模型自适应控制系统的稳定性和收敛性. 本文的分析方法和结论不依赖于具体的局部控制策略和具体的权值算法, 而只取决于它们的某些属性.

**关键词:** 加权多模型; 自适应; 稳定性; 收敛性; 虚拟等价系统

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Stability of weighted multiple model adaptive control

ZHANG Wei-cun

(School of Automation and Electrical Engineering, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

**Abstract:** The stability of the weighted multiple model adaptive control (WMMAC) is an open problem. On the basis of the model output error, we propose a recursive weighting-algorithm that is convergent when the model output error is separable. Under this condition, we prove the stability and the convergence of WMMAC systems, based on the virtual equivalent system methodology. This analysis method and the result thereof are independent of specific local control strategy and specific weighting algorithm.

**Key words:** weighted multiple model; adaptive; stability; convergence; virtual equivalent system

### 1 引言(Introduction)

加权多模型自适应控制(weighted multiple model adaptive control, WMMAC)的一个重要特点是没有传统自适应控制系统的参数估计环节, 取而代之的是加权值的计算. 如果将传统自适应控制的参数估计看作是“无限模型辨识”, 那么这种权值计算可以看作是“有限模型辨识”, 即通过对离线设计的有限个控制器计算其相应的权值, 实现对有限个局部模型的辨识, 若某个距离真实系统最近的模型所对应的权值为1, 其余权值为0, 则辨识成功. 加权多模型方法应用于控制领域已有几十年的历史, 早在20世纪六七十年代, Magill, Lainiotis和Athans等人就提出用多模型方法进行辨识、估计和控制<sup>[1-3]</sup>. 之后又不断有一些研究成果出现<sup>[4-11]</sup>, 直到最近的采用加权多模型方法与鲁棒控制设计方法相结合的鲁棒多模型自适应控制方法<sup>[12-17]</sup>. 相对来说, 国内学者对加权多模型自适应控制的研究较少, 比较有代表性的文献有<sup>[18-21]</sup>.

加权多模型自适应控制可以看作是一种基于软切换的多模型自适应控制, 与增益调度控制以及基于T-S模型的模糊控制都有一定的相似性. 这种基于

软切换的多模型自适应控制非常适合含有不确定参数的随机系统的控制, 已经在很多领域取得成功应用, 特别是在医学领域的应用<sup>[5]</sup>. 但是, 加权多模型自适应控制系统的闭环稳定性至今没有得到证明, 仅有一些关于加权值的收敛结果<sup>[22-25]</sup>.

本文采用一种新的加权算法, 在模型输出误差可分的情况下, 可以保证其收敛性; 然后, 利用虚拟等价系统(virtual equivalent system, VES)理论<sup>[26-28]</sup>证明针对线性时不变受控对象的加权多模型自适应控制系统的稳定性和收敛性; 最后, 利用切换控制系统的稳定性理论证明针对时变(参数跳变)受控对象的加权多模型自适应控制系统的稳定性和收敛性. 本文所涉及的极限运算都是在概率1的意义下.

### 2 加权多模型自适应控制系统描述 (Description of WMMAC system)

考虑时变离散线性随机系统 $P(k)$ :

$$A(q^{-1}, k)y(k) = q^{-d}B(q^{-1}, k)u(k) + \omega(k), \quad (1)$$

其中:

$$A(q^{-1}, k) = 1 + a_1(k)q^{-1} + \dots + a_{na}(k)q^{-na}, \quad (2)$$

$$B(q^{-1}, k) =$$

$$b_0(k) + b_1(k)q^{-1} + \dots + b_{nb}(k)q^{-nb}, \quad (3)$$

$$na \geq 1, nb \geq 1,$$

式中 $y(k)$ ,  $u(k)$ ,  $\omega(k)$ 分别是系统的输出信号、输入信号和干扰噪声信号, 并假定

$$\begin{cases} y(k) = 0, u(k) = 0, \omega(k) = 0, \forall k \leq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\omega(i)\|^2 = R < \infty, \text{ a.s.}, \end{cases} \quad (4)$$

加权多模型自适应控制系统的目标是跟踪有界参考输入信号 $y_r(k)$ .

首先, 对受控对象建立模型集 $M = M_i (i = 1, 2, \dots, m)$ , 然后针对模型集中的每一个模型 $M_i$ 分别设计相应的局部控制器 $C_i$ , 从而得到控制器集合 $C = C_i, i = 1, 2, \dots, m$ . 局部控制器可以按任意现有控制策略进行设计, 只要对 $M_i$ 满足稳定性要求, 并能跟踪有界参考输入信号 $y_r(k)$ 即可, 例如可以采用极点配置策略、预测控制策略、棒控制策略( $\mu$ 方法,  $H_\infty$ ), 等等. 局部控制器 $C_i$ 的输出记为 $u_i(k)$ , 全局控制器输出记为 $u(k)$ , 全局控制律随后给出.

在每个采样时刻 $k$ , 分别计算 $m$ 个局部模型的输出误差 $e_i(k), i = 1, 2, \dots, m$ :

$$e_i(k) = y(k) - y_i(k) = y(k) - \phi^T(k-d)\theta_i, \quad (5)$$

$$y_i(k) = 0, e_i(k) = 0, \forall k \leq 0, \quad (6)$$

其中:  $\phi^T(k-d) = [y(k-1) \dots u(k-d) \dots]$ 为回归向量,  $\theta_i$ 为模型 $M_i$ 的参数向量.

在 $e_i(k)$ 的基础上计算每个局部控制器所对应的权值, 可以采用不同的递推计算方法, 本文采用如下算法<sup>[29]</sup>:

$$l_i(0) = \frac{1}{m}, p_i(0) = l_i(0), \quad (7)$$

$$l'_i(k) = 1 + \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k e_i^2(p), \quad (8)$$

$$l'_{\min}(k) = \min_i l'_i(k), \quad (9)$$

$$l_i(k) = \frac{l'_{\min}(k)}{l'_i(k)} l_i(k-1), \quad (10)$$

$$p_i(k) = \frac{l_i(k)}{\sum_{i=1}^m l_i(k)}. \quad (11)$$

若检测到系统参数跳变, 则按式(7)重置 $l_i(k)$ , 本文在进行仿真实验时, 是通过检测 $l'_i(k)$ 大小顺序的改变来确定系统是否发生参数跳变.

在 $p_i(k)$ 的基础上, 全局控制律可以表示为

$$u(k) = \sum_{i=1}^m p_i(k)u_i(k). \quad (12)$$

加权多模型自适应控制系统可以简单地用图1来表示.

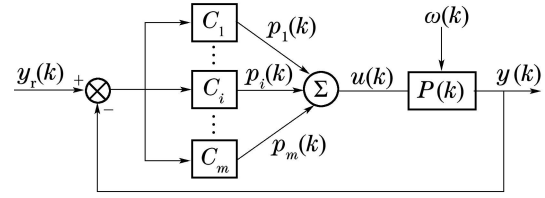


图1 加权多模型自适应控制系统  
Fig. 1 Weighted multiple model adaptive control system

### 3 加权多模型自适应控制的虚拟等价系统 (Virtual equivalent system for WMMAC)

假定模型集中包含真实对象的模型 $M_j$ , 并且加权收敛, 即对应于真实对象模型的权值收敛于1, 其余收敛于0, 实际上这样的要求在比较宽松的条件下即可实现<sup>[29]</sup>. 在上述前提下, 给出加权多模型自适应控制的输入输出等价系统——虚拟等价系统, 分别考虑线性时不变受控对象和参数跳变受控对象.

#### 3.1 WMMAC的虚拟等价系统——线性时不变对象 (Virtual equivalent system for WMMAC-LTI plant)

考虑如下线性时不变受控对象 $P$ :

$$A(q^{-1})y(k) = q^{-d}B(q^{-1})u(k) + \omega(k), \quad (13)$$

其中

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_{na}q^{-na}, \quad (14)$$

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb}, \quad (15)$$

$$na \geq 1, nb \geq 1. \quad (16)$$

模型集中有 $M_j = P$ , 控制器集中有 $C_j$ 与 $M_j$ 对应, 记做 $C = C_j$ , 虚拟等价系统如图2所示. 其中 $u_j(k)$ 是 $C_j$ 产生的输出,  $u(k)$ 同图1所示, 在 $u_j(k)$ 和 $u(k)$ 的基础上可以得到

$$\Delta u(k) = u(k) - u_j(k). \quad (17)$$

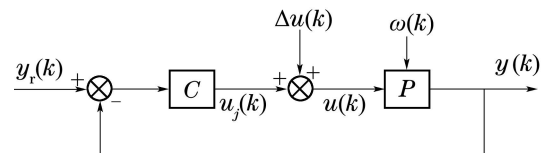


图2 WMMAC的虚拟等价系统——线性时不变对象  
Fig. 2 VES for WMMAC-LTI Plant

#### 3.2 WMMAC的虚拟等价系统——参数跳变对象 (Virtual equivalent system for WMMAC-parameter jump plant)

考虑第2节描述的时变受控对象 $P(k)$ , 关于 $A(q^{-1}, k), B(q^{-1}, k)$ 的时变性作如下假设:

**假设 1** 参数  $a_i(k) (i \in 1, \dots, na)$ ,  $b_j(k) (j \in 1, \dots, nb)$  都是时间  $k$  的分段常值函数;

**假设 2** 参数跳变间隔足够长, 且参数跳变可以检测, 以便重置权值递推算法;

**假设 3** 参数向量  $(a_1(k), \dots, a_{na}(k), b_0(k), b_1(k), \dots, b_{nb}(k))^T$  在一个凸集中变化, 且保持  $A(q^{-1}, k), B(q^{-1}, k)$  互质.

下面, 分两种情况进行讨论.

**情况 1** 有限跳变.  $P(k)$  经过有限次跳变后, 停止在某个定常参数模型;

**情况 2** 无限跳变.  $P(k)$  持续发生参数跳变, 但变化的范围有限, 即每次跳变, 模型集中均有与之对应的模型, 这样, 模型集合为有限集即可覆盖对象的变化.

第 1 种情况的虚拟等价系统与时不变对象的虚拟等价系统类似, 不妨设  $P(k)$  最后停止在第  $j$  个模型  $M_j$  上, 记做  $P = M_j$ ; 那么控制器集合中有  $C_j$  与  $M_j$  对应, 记做  $C = C_j$ , 这种情况下的虚拟等价系统仍然可以用图 2 表示, 即将有限次的参数跳变都看成是动态过程的扰动, 并将扰动对系统性能的影响记入  $\Delta u(k)$  中. 第 2 种情况, 设  $P(k)$  在  $P_i = M_i$  之间跳变, 相应的虚拟等价系统如图 3 所示, 它由一个“理想”切换系统和一个补偿信号组成. “理想”切换的意思是说  $C_i$  和  $P_i$  的下标  $i$  同步变化, 其中  $C_i$  是  $P_i = M_i$  所对应的非自适应控制器.

图 3 中

$$\Delta u(k) = u(k) - u_i(k). \quad (18)$$

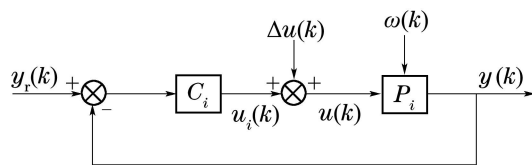


图 3 WMMAC 的虚拟等价系统——参数跳变对象  
Fig. 3 VES for WMMAC of parameter jump plant

#### 4 主要结果及证明(Main results and proof)

本节将证明上节所讨论的各种加权多模型自适应控制系统的稳定性、收敛性.

##### 4.1 时不变对象的加权多模型自适应控制 (WMMAC for LTI plant)

考虑针对线性时不变对象的加权多模型自适应控制系统, 有如下结论.

**定理 1** 针对时不变对象的加权多模型自适应控制, 若满足以下条件:

- 1) 模型集合中包含真实对象的模型, 记为  $M_j$ ;
- 2) 每一个局部控制器与模型集合中的对应模型构成一个稳定的闭环系统, 且跟踪参考输入信号;
- 3) 模型输出误差可分, 即依概率 1 有

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^k e_j^2(p) < \sum_{p=1}^k e_i^2(p), k \geq d, i \neq j, \\ \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k e_j^2(p) \rightarrow R_j, \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k e_i^2(p) \rightarrow R_i, R_j < R_i, \end{cases} \quad (19)$$

$d$  为系统输出延迟,  $R_j$  为常数,  $R_i$  为常数或无穷大. 则加权多模型自适应控制系统是稳定的和收敛的.

证明思路: 将图 2 所示的虚拟等价系统进行分解, 然后用反证法得到结论, 细节见文献 [29].

##### 4.2 参数跳变受控对象的加权多模型自适应控制 (WMMAC for parameter jump plant)

本节考虑参数跳变对象的加权多模型自适应控制系统, 首先考虑有限次参数跳变的情况.

**定理 2** 若

- 1) 受控对象参数发生改变的间隔充分长, 且最终停止在某个固定模型参数上, 记为  $M_j$ ;
- 2) 模型集合中包含  $M_j$ ;
- 3) 每一个局部控制器与模型集合中的对应模型均构成稳定闭环系统, 且跟踪参考输入信号;
- 4) 模型输出误差可分, 即依概率 1 有

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^k e_j^2(p) < \sum_{p=1}^k e_i^2(p), k \geq d, i \neq j, \\ \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k e_j^2(p) \rightarrow R_j, \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k e_i^2(p) \rightarrow R_i, R_j < R_i, \end{cases} \quad (20)$$

$d$  为系统延迟,  $R_j$  为常数,  $R_i$  为常数或无穷大. 则加权多模型自适应控制系统是稳定的和收敛的.

证明思路: 仍然采用图 2 所示的虚拟等价系统, 证明过程和定理 1 一样, 细节省略.

下面考虑参数无限跳变的情况, 有如下判据.

**定理 3** 若

- 1) 受控对象参数发生改变的间隔充分长;
- 2) 模型集合中包含各阶段真实的对象模型, 记为  $M_i, i = 1, \dots, m$ ;
- 3) 每一个局部控制器与模型集合中的对应模型均构成稳定闭环系统, 且跟踪参考输入信号;
- 4) 模型输出误差可分, 即依概率 1 有

$$\begin{cases} \sum_{p=1}^k e_j^2(p) < \sum_{p=1}^k e_i^2(p), k \geq d, i \neq j, \\ \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k e_j^2(p) \rightarrow R_j, \frac{1}{k} \sum_{p=1}^k e_i^2(p) \rightarrow R_i, R_j < R_i, \end{cases} \quad (21)$$

$d$  为系统延迟,  $R_j$  为常数,  $R_i$  为常数或无穷大. 则加权多模型自适应控制系统是稳定的和收敛的.

证明思路: 在定理各条件成立的前提下, 假想将跳变参数“冻结”, 则由定理 1 知道, 对于每一套“冻

结”的参数必构成一个稳定且跟踪参考输入的闭环系统;再考虑定理的条件1),显然总的加权多模型自适应控制系统是由这些稳定的系统之间的“慢”切换所组成,因此根据切换系统理论<sup>[30]</sup>,知道定理3的结论成立。

## 5 结论(Conclusions)

本文将虚拟等价系统的概念和方法用于分析加权多模型自适应控制系统的稳定性和收敛性,证明了在权值收敛及模型集包含真实对象模型等前提下,时不变线性系统和两种参数跳变线性系统的加权多模型自适应控制系统的稳定性和收敛性。

今后的研究方向是考虑被控对象为非线性时变系统等更加复杂的不确定情形,证明加权多模型自适应控制系统的稳定性和收敛性。

## 参考文献(References):

- [1] MAGILL D T. Optimal adaptive estimation of sampled stochastic processes [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1965, 10(4): 434 – 439.
- [2] LAINIOTIS D G. Partitioning: a unifying framework for adaptive systems—I: estimation; II: Control [J]. *Proceedings of IEEE*, 1976, 64(8): 1126 – 1143, 1182 – 1197.
- [3] ATHANS M, CASTANON D, DUNN K P, et al. The stochastic control of the F-8C aircraft using a multiple model adaptive control (MMAC) method—part I: equilibrium flight [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(5): 768 – 780.
- [4] LANE D W, MAYBECK P S. Multiple model adaptive estimation applied to the Lambda URV for failure detection and identification [C] // *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Florida, USA: IEEE, 1994: 678 – 683.
- [5] YU C, ROY R J, KAUFMAN H, et al. Multiple-model adaptive predictive control of mean arterial pressure and cardiac output [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1992, 39(8): 765 – 778.
- [6] MOOSE R L, VAN LANDINGHAM H F, MCCABE D H. Modeling and estimation for tracking maneuvering targets [J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1979, 15(3): 448 – 456.
- [7] LI X R, BAR-SHALOM Y. Design of an interacting multiple model algorithm for air traffic control tracking [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1993, 1(3): 186 – 194.
- [8] BADR A, BINDER Z, REY D. Application of tracking multimodel control to a non-linear thermal process [J]. *International Journal of Systems Science*, 1990, 21(9): 1795 – 1803.
- [9] BADR A, BINDER Z, REY D. Weighted multi-model control [J]. *International Journal of Systems Science*, 1992, 23(1): 145 – 149.
- [10] NAGIB G, GHARIEBAND W, BINDER Z. Qualitative multi-model control using a learning approach [J]. *International Journal of Systems Science*, 1992, 23(6): 855 – 869.
- [11] ALY A, BADR A, BINDER Z. Multi-model control of MIMO systems: location and control algorithms [J]. *International Journal of Systems Science*, 1992, 19(9): 1687 – 1698.
- [12] FEKRI S, ATHANS M, PASCOAL A. Issues, progress and new results in robust adaptive control [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2006, 20(10): 519 – 579.
- [13] FEKRI S, ATHANS M, PASCOAL A. Robust multiple model adaptive control (RMMAC): a case study [J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2007, 21(1): 1 – 30.
- [14] AGUIAR A, HASSANI V, PASCOAL A, et al. Identification and convergence analysis of a class of continuous-time multiple-model adaptive estimators [C] // *Proceedings of the 17th IFAC World Congress*. Seoul, South Korea: IFAC, 2008: 8605 – 8610.
- [15] HASSANI V, AGUIAR A, PASCOAL A, et al. A performance based model-set design strategy for multiple model adaptive estimation [C] // *Proceedings of European Control Conference*. Budapest, Hungary: IEEE, 2009: 123 – 129.
- [16] HASSANI V, AGUIAR A, ATHANS M, et al. Multiple model adaptive estimation and model identification using a minimum energy criterion [C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Missouri, USA: IEEE, 2009: 518 – 523.
- [17] HASSANI V, ATHANS M, PASCOAL A. An application of the RM-MAC methodology to an unstable plant [C] // *Proceedings of the 17th Mediterranean Conference on Control and Automation*. Thessaloniki, Greece: IEEE, 2009: 37 – 42.
- [18] 王宇飞, 姜长生, 吴庆宪. 近空间飞行器多模型软切换保性能非脆弱控制 [J]. *控制理论与应用*, 2012, 29(4): 440 – 446. (WANG Yufei, JIANG Changsheng, WU Qingxian. Multi-model soft-switching cost-guaranteed non-fragile control for near-space vehicle [J]. *Control Theory & Applications*, 2012, 29(4): 440 – 446.)
- [19] 何文光. 一类不确定参数系统的多模型自适应控制 [J]. *自动化学报*, 1988, 14(3): 191 – 198. (HE Wenguang. Multiple model adaptive control for a category of systems with uncertain parameters [J]. *Acta Automatica Sinica*, 1988, 14(3): 191 – 198.)
- [20] HE W G, KAUFMAN H, ROY R. Multiple model adaptive control procedure for blood pressure control [J]. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, 1986, 33(1): 10 – 19.
- [21] 董志坤, 王昕, 王笑波, 等. 多模型加权自适应控制在中厚板层流冷却系统中的应用 [J]. *自动化学报*, 2010, 36(8): 1144 – 1150. (DONG Zhikun, WANG Xin, WANG Xiaobo, et al. Application of weighted multiple models adaptive controller in the plate cooling process [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2010, 36(8): 1144 – 1150.)
- [22] BARAM Y. *Information, consistent estimation and dynamic system identification* [D]. Cambridge, MA: MIT, 1976.
- [23] BARAM Y, SANDELL N R. An information theoretic approach to dynamical systems modeling and identification [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, 23(1): 61 – 66.
- [24] BARAM Y, SANDELL N R. Consistent estimation on finite parameter sets with application to linear systems identification [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1978, 23(3): 451 – 454.
- [25] KEHAGIAS A. Convergence properties of the lainiotis partition algorithm [J]. *Control and Computers*, 1991, 19(1): 1 – 6.
- [26] ZHANG W C. On the stability and convergence of self-tuning control—virtual equivalent system approach [J]. *International Journal of Control*, 2010, 83(5): 879 – 896.
- [27] ZHANG W C, CHU T G, WANG L. A new theoretical framework for self-tuning control [J]. *International Journal of Information Technology*, 2005, 11(11): 123 – 139.
- [28] ZHANG W C. The convergence of parameter estimates is not necessary for a general self-tuning control system—stochastic plant [C] // *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. Shanghai: IEEE, 2009: 3489 – 3494.
- [29] ZHANG W C. Stable weighted multiple model adaptive control: discrete-time stochastic plant [J/JOL]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*.
- [30] SHORTEN R, WIRTH F, MASON O, et al. Stability criteria for switched and hybrid systems [J]. *SIAM Review*, 2007, 49(4): 545 – 592.

## 作者简介:

张维存 (1962-), 男, 博士, 副教授, 研究方向为控制理论及应用, E-mail: weicunzhang@ustb.edu.cn.