第 26 卷第 8 期
2009 年 8 月
控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications
Vol. 26 No. 8
Aug. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)08−0907−04

切换系统不变集的输出反馈镇定

林相泽[1,2], 邹　云[1], 李世华[3], 钱艳平[4]

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 南京农业大学 工学院, 江苏 南京 210031;

3. 东南大学 自动化学院, 江苏 南京 210096; 4. 河海大学 电气工程学院, 江苏 南京 210098)

摘要: 利用一个非负函数$V(x)$, 推广了小时间状态模可观测和大时间状态模可观测的定义, 提出了小时间$V(x)$可观测和大时间$V(x)$可观测的概念. 利用$V(x)$可观测的概念, 讨论了子系统无源的切换系统不变集的有界输出反馈镇定及动态输出反馈镇定. 利用多Lyapunov函数证明了闭环系统渐近稳定. 仿真例子验证了文中结论正确性.

关键词: 切换系统; 不变集; 输出反馈; 多Lyapunov函数

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Output feedback stabilization of invariant sets for switched systems

LIN Xiang-ze[1,2], ZOU Yun[1], LI Shi-hua[3], QIAN Yan-ping[4]

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
2. College of Engineering, Nanjing Agricultural University, Nanjing Jiangsu 210031, China;
3. School of Automation, Southeast University, Nanjing Jiangsu 210096, China;
4. College of Electrical Engineering, Hohai University, Nanjing Jiangsu 210098, China)

Abstract: By employing a nonnegative function $V(x)$, we extend the definitions of small-time and large-time state-norm observability to the definitions of small-time and large-time $V(x)$ observability. Based on the concept of $V(x)$ observability, we stabilize the invariant sets of the switched systems with passive subsystems by using the bounded output feedback and the dynamic output feedback. The results are proved in detail by using multiple Lyapunov functions. Numerical examples are employed to verify the proposed method.

Key words: switched systems; invariant sets; output feedback; multiple Lyapunov functions

1　引言(Introduction)

近年来, 对切换系统的研究引起了越来越多学者的关注. 目前对切换系统稳定性的研究大多数集中在对系统平衡点稳定性的研究[1~3]. 因此, 讨论切换系统集合稳定性及反馈镇定具有重要意义. 近年来, 切换系统不变集稳定性和反馈镇定问题引起众多学者的关注[4~8], 其中, 文[4]提出了状态模可观测的概念, 用于推广切换系统LaSalle不变性原理. 但是, 应用此概念无法分析切换系统不变集(如极限环)的稳定性.

为讨论切换系统不变集的输出反馈镇定, 文[8]提出了输入输出对$V(x)$稳定的概念. 但是, 这个概念较难验证. 为此, 本文将状态模可观测[4]的概念进行推广, 提出了$V(x)$可观测的概念, 虽然概念的条件较强, 但是验证相对容易. 另外. 文[8]中设计的控制器没有考虑输入饱和现象, 且文[8]没有讨论系统不变集的动态输出反馈控制. 本文在$V(x)$可观测概念基础上, 利用无源性结论, 分两种情况讨论切换系统不变集输出反馈镇定问题:

1) 设计有界输出反馈控制器, 使得切换系统不变集渐近稳定;

2) 设计动态输出反馈控制器, 讨论切换系统不变集的反馈镇定.

2　相关概念(Definitions)

文中, $|\cdot|$表示欧式范数, $\|z\|_J$表示J上信号z最大模.

非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u), \\ y = h(x). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$为系统状态, $u \in \mathbb{R}^m$为控制输入, $y \in \mathbb{R}^p$为系统输出, $f(\cdot,\cdot)$连续可微, $h(\cdot)$ 连续.

收稿日期: 2008−01−09; 收修改稿日期: 2008−10−12.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60504007); 江苏省农机基金资助项目(gxz08008).

为研究切换系统不变集的输出反馈镇定, 将状态模可观测[4]进行推广, 提出$V(x)$可观测的概念.

定义 1 如果存在非负函数$V(x)$, $\forall\ \tau > 0$, $\exists \gamma_1, \gamma_2 \in K_\infty$,

$$V(x) \leqslant \gamma_1(\|y\|_{[t,t+\tau]}) + \gamma_2(\|u\|_{[t,t+\tau]}), \qquad (2)$$

称系统(1)小时间$V(x)$可观测. 如果$\exists \tau > 0, \gamma_1, \gamma_2 \in K_\infty$, 使得上式成立, 称系统(1)大时间$V(x)$可观测.

定义 2[9] 如果$V^{-1}([0,a]) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant V(x) \leqslant a, \forall\ a > 0\}$是紧集, 称非负函数$V(x)$适定.

3 输出反馈(Output feedback)

切换系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f_\sigma(x) + g_\sigma(x)u_\sigma, \\ y = h_\sigma(x). \end{cases} \qquad (3)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$为系统状态, $u \in \mathbb{R}^m$为控制输入, $y \in \mathbb{R}^m$为系统输出, $f_\sigma(\cdot), g_\sigma(\cdot)$连续可微, $h_\sigma(\cdot)$连续, $f_\sigma(0) = 0, g_\sigma(0) = 0$. 函数$\sigma : [0, \infty) \to Q = \{1, 2, \cdots, N\}$表示右端连续逐段常值切换信号.

记$\{t_i\}_{i=1}^\infty$是按先后顺序排列的时间点, 称为切换系统的切换时间点. 显然在区间$[t_i, t_{i+1})$中σ为常值. 将所有$\sigma(t) = q \in Q$的区间起始时刻记为$\{t_{q_k}\}_{k=1}^\infty$, 那么它是$\{t_i\}_{i=1}^\infty$的子序列.

3.1 有界输出反馈(Bounded output feedback)

记$S_q^0 = \{x : V_q(x) = 0\}, Z \subset S_0 = \bigcup\limits_{q=1}^N S_q^0$是最大不变集, 函数$\phi_q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$连续, $\phi_q(0) = 0$, 且$y = h_q(x) \neq 0, y^\mathrm{T}\phi_q(y) > 0, \forall\ q \in Q$.

定理 1 如果切换系统(3)满足如下假设:

1) $\forall\ q \in Q$, 第q个子系统是无源的, 且存在非负光滑的存储函数$V_q(x)$;

2) $\exists S_q^0$紧邻域$S_q^{c_q} = \{x : V_q(x) \leqslant c_q\}, \forall\ x_0 \in S_q^{c_q}$, 第$q$个子系统小时间$V_q(x)$可观测,

设计幅值可任意小的输出反馈控制

$$u_q = -\frac{\beta_q}{1 + h_q^\mathrm{T}(x)\phi_q(y)}\phi_q(y),$$

$$\phi_q(y) = [\frac{\partial V_q(x)}{\partial x}g_q(x)]^\mathrm{T}, \beta_q > 0$$

及如下切换信号$\sigma(t)$: 存在$\tau > 0$, 相邻的两次切换之间的时间间隔不小于τ, 且在切换时间点t_i,

$$V_q(x(t_i)) \geqslant V_p(x(t_i)), q = \sigma(t_{i-1}), p = \sigma(t_i), \quad (4)$$

Z局部渐近稳定; 如果$V_q(x)$适定, Z全局渐近稳定.

证 取$u_q = -\dfrac{\beta_q}{1 + h_q^\mathrm{T}(x)\phi_q(y)}\phi_q(y)$, 由于第$q$个子系统无源且$V_q(x)$非负光滑, 那么$\dot{V}_q(x) \leqslant 0$, 设计的切换序列使得在切换时间点满足式(4), 那么$V_q(x)$非增. 因此存在η, 使得$\lim\limits_{t\to\infty} V_q(x) = \eta$.

如果切换系统(3)只有有限多个切换时间点, 那么切换系统将退化为一个连续系统, 定理易证.

如果切换系统(3)无穷多次切换到某个子系统. 不失一般性, 假设切换系统(3)无穷多次切换到第q个子系统, 那么第q个子系统有无穷多个切换时间点$\{t_{q_k}\}_{k=1}^\infty$, 当$k \to \infty$时, $t_{q_k} \to \infty$.

对$\forall\ t_a, t_b \in [t_{q_k}, t_{q_k} + \tau), t_b \geqslant t_a$,

$$V_q(x(t_b)) - V_q(x(t_a)) \leqslant \int_{t_a}^{t_b} y^\mathrm{T}(s)u_q(s)\mathrm{d}s \leqslant 0,$$

当$k \to \infty$时, $t_a \to \infty, t_b \to \infty$, 由上式可得, $y \to 0$, 进而可得, $u_q \to 0$. 由于第q个子系统小时间$V_q(x)$可观测, 那当$k \to \infty$时,

$$V(x) \leqslant \gamma_1(\|y\|_{[t,t+\tau]}) + \gamma_2(\|u\|_{[t,t+\tau]}) \to 0. \quad (5)$$

即

$$\lim_{t\to\infty} V_q(x(t)) = V_q(\lim_{t\to\infty} x(t)) = 0,$$

因此, $d(\lim\limits_{t\to\infty} x(t), S_0) = 0$. 因为$Z \subset S_0$是最大不变集, 因此$Z$局部渐近稳定. 不难验证, $\|u_q(x)\| \leqslant 0.5\beta_q$, 取足够小的$\beta_q$, 反馈控制$u_q$的幅值可任意小. 同理可得, 如果$V_q(x)$适定, 那么$Z$全局渐近稳定.

由定理1类似思路, 可得如下定理:

定理 2 如果切换系统(3)满足定理1假设1)且存在S_q^0紧邻域$S_q^{c_q} = \{x : V_q(x) \leqslant c_q\}, \forall\ x_0 \in S_q^{c_q}$, 第$q$个子系统大时间$V_q(x)$可观测, 设计与定理1中相同的反馈控制器$u_q$和切换信号$\sigma(t)$, 其中定理1中的$\tau$不小于大时间$V_q(x)$可观测的时间常数, 不变集$Z$局部渐近稳定; 如果$V_q(x)$适定, 那么$Z$全局渐近稳定.

由定理1和定理2可得如下推论:

推论 1 如果切换系统(3)满足定理1(或定理2)的假设, 集合S_0只包含$x = 0$, 那么$x = 0$在定理1(或定理2)中相同的反馈控制器和切换序列作用下局部渐近稳定; 如果$V_q(x)$适定, 那么$x = 0$全局渐近稳定.

3.2 动态输出反馈(Dynamic output feedback)

利用动态输出反馈来讨论切换系统的不变集的反馈镇定, 有如下定理:

定理 3 如果切换系统(3)满足定理1(或定理2)假设, 可设计反馈控制器$\dot{\xi} = -[h_q(x)]^\mathrm{T} - \xi, u_q = \xi$ 及如定理1(或定理2)的切换信号$\sigma(t)$, 使得不变集Z局部渐近稳定; 如果$V_q(x)$适定, 那么Z全局渐近稳定.

证　利用动态反馈控制器u_q, 可得闭环系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_q(x) + g_q(x)\xi, \\ \dot{\xi} = -[h_q(x)]^{\mathrm{T}} - \xi. \end{cases} \tag{6}$$

取Lyapunov函数$W_q(x,\xi) = V_q(x) + 0.5\xi^{\mathrm{T}}\xi$, 不难证明定理结论.

由定理3可得如下推论:

推论 2　如果切换系统(3)满足定理3的假设, 集合S_0只包含$x = 0$, 那么$x = 0$在定理3中相同的反馈控制器和切换序列作用下局部渐近稳定; 如果$V_q(x)$适定, 那么$x = 0$全局渐近稳定.

4　仿真例子(Numerical examples)

下面设计反馈控制器, 使得不变集渐近稳定.

4.1　例 1(Example 1)

具有A, B两个子系统的切换系统:

$$A: \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -0.25 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} u_{\mathrm{A}}, \tag{7}$$

$$y_{\mathrm{A}} = -0.5(x_1^2 + (0.25x_2)^2 - 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$B: \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -0.5\sqrt{2} \end{pmatrix} u_{\mathrm{B}}, \tag{9}$$

$$y_{\mathrm{B}} = -0.5\sqrt{2}((0.5x_1)^2 + (x_2)^2 - 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

取

$$V_{\mathrm{A}} = 0.25(x_1^2 + (0.25x_2)^2 - 1)^2,$$
$$V_{\mathrm{B}} = 0.25((0.5x_1)^2 + x_2^2 - 1)^2,$$

将状态空间划分为

$$X_{\mathrm{A}} = \{x : |x_1 \leqslant 0.25\sqrt{5}|x_2|\}, X_{\mathrm{B}} = \mathbb{R}^2/X_{\mathrm{A}},$$

那么

$$S_0 = \{x : x \in X_{\mathrm{A}}, V_{\mathrm{A}}(x) = 0\} \cup \{x : x \in X_{\mathrm{B}}, V_{\mathrm{B}}(x) = 0\}.$$

取

$$u_{\mathrm{A}} = \frac{y_{\mathrm{A}}}{4 + \|y_{\mathrm{A}}\|^2},$$
$$u_{\mathrm{B}} = \frac{\sqrt{2}y_{\mathrm{B}}}{2 + \|y_{\mathrm{B}}\|^2},$$

从$x_0 = (1.2, -4.5)^{\mathrm{T}}$出发, S_0渐近稳定, 如图1.

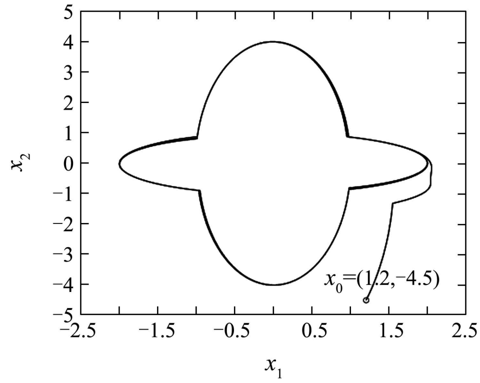

图 1　有界输出反馈

Fig. 1　Bounded output feedback

取动态反馈控制器$\dot{\xi} = -y_i - (\xi_1, \xi_2)^{\mathrm{T}}, u_i = \xi, i = A, B$, 那么$S_0$渐近稳定, $\xi \to 0$, 如图2和图3所示.

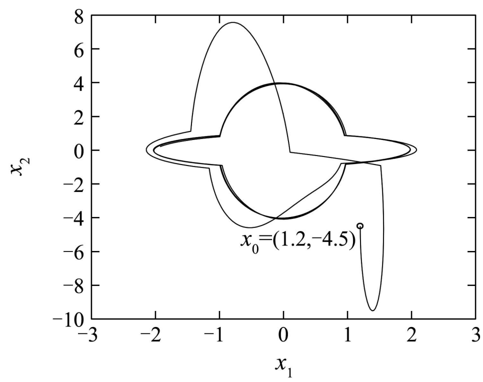

图 2　动态输出反馈

Fig. 2　Dynamic output feedback

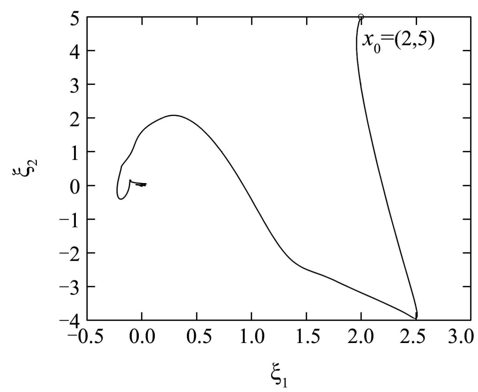

图 3　ξ轨迹图

Fig. 3　Trajectory of ξ

注 1　由例子可知, 切换系统平衡状态不是孤立平衡点, 而是极限环, 利用状态模可观测[4]无法分析系统稳定性, 而利用文中结论易得切换系统不变集渐近稳定.

参考文献(References):

[1] LIBERZON D, MORSE A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.

[2] ZHAO J, HILL D J. Passivity and stability of switched systems: A multiple storage function method[J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 57(2): 158 – 164.

[3] SUN Z, GE S S. Analysis and synthesis of switched linear control systems[J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 181 – 195.

[4] HESPANHA J P, LIBERZON D, ANGELI D, et al. Nonlinear norm-observability notions and stability of switched systems[J], *IEEE Transactions on Automatic Control* , 2005, 50(2): 154 – 168.

[5] BACCIOTTI A, MAZZI L. An invariance principle for nonlinear switched systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 45(11): 1109 – 1119.

[6] MANCILLA AGUILAR J L, GARCIA R A. An extension of LaSalle's invariance principle for switched systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(5): 376 – 384.

[7] WANG J, CHENG D Z. Extensions of LaSalle's invariant principle for switched nonlinear systems[C] //*Proceedings of the 17th World Congress, the International Federation of Automatic Control*. Seoul Korea: [s.n.], 2008: 14397 – 14402.

[8] 林相泽, 李世华, 邹云. 非线性切换系统不变集的输出反馈镇定[J]. 自动化学报, 2008, 34(7): 784 – 791.
(LIN Xiangze, LI Shihua, ZOU Yun. Output feedback stabilization of invariant sets for nonlinear switched systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(7): 784 – 791.)

[9] BYRNES C I, ISIDORI A, WILLEMS J C. Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 36(11): 1228 – 1240.

作者简介:

林相泽 (1977—), 男, 南京理工大学博士研究生, 南京农业大学讲师, 目前主要研究切换系统、复杂系统建模与控制等, E-mail: xzlin@njau.edu.cn;

邹 云 (1962—), 男, 南京理工大学教授, 目前主要研究微分代数系统、应急控制等, E-mail: zouyun@vip.163.com;

李世华 (1975—), 男, 东南大学教授, 目前主要研究有限时间控制、切换系统等, E-mail: lsh@seu.edu.cn;

钱艳平 (1975—), 男, 河海大学讲师, 目前主要研究网络控制系统、网络切换控制等, E-mail: qyp_wxf@163.com.