第 26 卷第 9 期
2009 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 9
Sept. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)09−0970−07

基于LMI的小时滞饱和系统稳定域估计方法

辛焕海, 屠竞哲, 谢　俊, 甘德强

(浙江大学 电机工程系, 浙江 杭州 310027)

摘要: 基于Pade近似变换, 将小时滞饱和系统的稳定域估计转化为估计奇异摄动饱和系统的稳定域问题. 证明了此奇异摄动饱和系统的稳定域具有可解耦性, 并在此基础上建立LMI优化模型并提出小时滞饱和系统稳定域估计的降阶方法. 算例仿真验证了方法的正确性和有效性.

关键词: 饱和非线性; 小时滞; Pade近似; 奇异摄动饱和系统

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

LMI-based stability region estimation for dynamical systems with saturation nonlinearities and a short time-delay

XIN Huan-hai, TU Jing-zhe, XIE Jun, GAN De-qiang

(Department of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: Based on Pade approximation, the stability region estimation for dynamical systems with saturation nonlinearities and a short time-delay is transformed to that for singular perturbation systems with saturation nonlinearities (SPSSN). The stability region of the singular systems with saturation nonlinearities is proved to be decomposable when the time-delay is short enough. Based on this characteristic, we develop a linear matrix inequality(LMI) optimization model, and propose an order-reduction method for estimating the stability region of systems with saturation nonlinearities and a short time-delay. Simulation results show the effectiveness and the validity of the proposed method.

Key words: saturation nonlinearity; short time-delay; Pade approximation; singular perturbation dynamical systems

1 引言(Introduction)

实际系统(如电力系统)往往存在饱和现象, 这可能会降低系统的稳定性[1~5], 故分析饱和系统的稳定域引起了很多学者的重视, 并且稳定域估计理论研究取得了很大的进展[1,6~9]. 然而, 时滞环节会进一步降低系统的稳定性[10~12]并增加稳定域估计的难度. 因此, 当饱和与时滞因素同时存在时, 稳定域估计是个十分重要的课题.

目前, 同时考虑饱和与时滞对系统稳定性影响的研究主要基于Lyapunov直接法. Chen等人提出时滞饱和系统控制器的设计方法[2,12~15], Cao等[11,16]利用线性矩阵不等式优化方法估计时滞饱和系统的稳定域以减少保守性. 然而, 此类方法考虑的模型中通常没有考虑饱和函数包含时滞因素, 这在小系统或分散控制中是符合实际的, 但在电力系统等大系统中, 如基于广域测量信号控制系统, 饱和函数通常包含了时滞因素[17], 所以利用传统方法估计此类系统的稳定域将失效. 本文基于此背景, 针对饱和函数中存在时滞环节的时滞饱和系统, 提出一种估计此类系统稳定域的近似方法.

Pade变换是工程上处理时滞环节常用的方法之一, 它是用有理多项式近似传递函数, 收敛速度快而且当阶次足够高时误差很小, 这在时滞参数较小时尤为如此[18,19]. 因此, 在小时滞情况下, 用非时滞饱和系统的动态性能可以近似时滞饱和系统的动态性能, 而且本文作者还发现此近似系统是奇异摄动饱和系统(SPSSN). 根据近似系统奇异摄动的特性, 我们证明了此SPSSN系统的稳定域具有解耦性, 并建立SPSSN系统稳定域估计的LMI降阶优化模型, 在此基础上提出一种估计小时滞饱和系统稳定域的估计方法.

符号: $x \geqslant (\leqslant) y$表示向量$x-y$的每个分量都满

收稿日期: 2008−02−28; 收修改稿日期: 2008−12−19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50807046); 中国博士后基金资助项目(20070420224); 中国博士后科学基金特别资助项目(20081471).

足$x_i - y_i \geqslant (\leqslant)0$; 矩阵$A \geqslant (>)0$表示$A$是(半)正定矩阵; $(A)_i$表示矩阵A的第i行向量; $(A)_{ij}$表示矩阵A的第i行第j列元素; 符号“$\Leftrightarrow$”表示“当且仅当”; $C_{n,\tau}$表示时间段$[-\tau, 0]$至$\mathbb{R}^n$的连续映射集.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下时滞饱和系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t)A_{\mathrm{d}}x(t-\tau) + B\mathrm{sat}(Kx(t)+ \\ \qquad K_{\mathrm{d}}x(t-\tau)), \\ x_0(\theta) = \phi(\theta),\ \theta \in [-\tau, \theta], \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t) = [x_1(t), \cdots, x_n(t)] \in \mathbb{R}^n$是状态量; $\tau > 0$是时滞参数; $\phi \in C_{n,\tau}$是初值函数; $\mathrm{sat}(u) = [\mathrm{sat}(u_1), \cdots, \mathrm{sat}(u_s)]^{\mathrm{T}}$, s是输入u的维数且$\mathrm{sat}(u) = \mathrm{sgn}(u) * \min\{1, \mid u \mid\}$.

为方便分析, 定义如下变量: 令x_t表示状态$x(t)$在时间段$[t-\tau, t]$中的值, 即$x_t = x(t+\theta), \theta \in [-\tau, 0]$. $\Omega_{\mathrm{d}} = \{x_0 \mid \varphi_t(x_0) \to 0\}$为系统(1)的稳定域, 其中$\varphi_t(x_0)$表示经过初始状态为$x_0$的轨迹曲线.

定义$C_{n,\tau}$空间中的集合Θ和$\beta\Theta$:

$$\Theta_0 = \{\phi \in C_{(n,\tau)} \mid -\underline{u}^0 \leqslant \phi(t) \leqslant \overline{u}^0, \forall t \in [-\tau, 0]\},$$
$$\beta\Theta_0 = \{\phi \in C_{(n,\tau)} \mid \phi = \beta\phi_1, \phi_1 \in \Theta_0\}.$$

定义欧氏空间中对应Θ_0的集合X_0:

$$X_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -\underline{u}^0 \leqslant x \leqslant \overline{u}^0\},$$

其中: $\beta > 0$是常数, 向量$\underline{u}^0$和$\overline{u}^0$ 是常向量.

注 1 1) 集合Θ_0实质是引入预想初始状态集合的参考集合, 即假设初始状态组成的集合“相似于”参考集合, 更详细的定义见文献[1];

2) Θ_0是函数空间$C_{(n,\tau)}$中的集合, 而X_0是欧氏空间$\mathbb{R}^n$中的集合, 它们满足如下关系: 如果$x_t \in \Theta_0$成立, 那么$x(t+\theta) \in X_0, \forall\theta \in [-\tau, 0]$.

在工程中, 对于给定的一些初始状态, 判断系统(1)轨迹的稳定性十分重要, 此问题本质是刻画此系统的稳定域, 但由于饱和及时滞因素的影响, 这一工作十分困难, 本文将估计此系统的稳定域, 而且考虑如下的特殊情况:

1) 考虑时滞参数τ很小.

2) 考虑预想初始状态x_0所在的集合的形状和Θ_0相似, 即此集合可以用$\beta\Theta_0$来表示且$x_0 \in \beta\Theta_0$.

显然, 如果估计的稳定域包含的初始状态越多则结果越好, 反之结果越保守. 因此, 为了减少保守性, 我们期望估计的稳定域能包含尽可能大的初始状态集合$\beta\Theta_0$. 由于初始状态集合的基本形状Θ_0已经确定, 要获得尽可能大的初始状态集合就是获得的最大值, 因而本文将主要解决如下问题:

确定最大的β, 使得$\beta\Theta_0 \subset \Omega_{\mathrm{d}}$ 成立, 即寻找最大值β^*, 使得对于$\forall x_0 \in \beta^*\Theta_0$, 轨迹$\varphi_t(x_0)$将收敛到平衡点. 因此, 可建立如下优化模型:

$$\begin{aligned} &\max\ \beta \\ &\text{s.t. } \varphi_t(x_0) \to 0(\text{or } \beta\Theta_0 \subset \Omega_{\mathrm{d}}^*), x_0 \in \beta\Theta_0, \end{aligned} \tag{2}$$

其中集合Ω_{d}^*是系统(1)估计的稳定域.

由于无法直接获得系统(1)的稳定域, 所以直接求解问题(2)十分困难.为此, 后文中将逐步把其中的约束条件替换为更严格的充分条件: 保证轨迹$\varphi_t(x_0)$收敛到平衡点零, 并将此优化问题转化为LMI优化问题求解.后文将需要如下假设条件:

假设 1 系统(1)中矩阵$A + A_{\mathrm{d}} + B(K + K_{\mathrm{d}})$是稳定的, 即$\tau = 0$ 时的雅可比矩阵是稳定的.

假设 2 $\tau \in [0, \tau^*]$, 其中τ^*是足够小的常数.

3 稳定域估计理论基础(Theories of the stability region estimation)

本节利用PADE近似理论, 将时滞系统(1)的稳定域估计问题转化为SPSSN系统稳定域估计问题, 并证明此SPSSN系统的稳定域具有可解耦性.

3.1 时滞环节的PADE近似(Pade approximation for the time-delay)

在复频域中, 时滞环节传递函数可用$P(s) = \mathrm{e}^{-\tau s}$表示, τ表示延时时间. 当参数τ很小时, 为了克服时滞因素导致的稳定域估计困难, 我们采用Pade1阶近似方法处理延时环节, 其近似的表达式为[18]

$$P(s) = \frac{(2-\tau s)}{(2+\tau s)}, \tag{3}$$

为此令

$$z(t) = x(t-\tau), \tag{4}$$

在复频域内为$z(s) = \mathrm{e}^{-\tau s}x(s)$, 所以结合式(3)得

$$z(s) = \frac{2-\tau s}{2+\tau s}x(s) = -x(s) + \frac{4}{2+\tau s}x(s). \tag{5}$$

再令

$$y(t) = z(t) + x(t), \tag{6}$$

在时域内式(5)变换为如下的微分方程

$$\tau\dot{y}(t) = -2y(t) + 4x(t), \tag{7}$$

结合式(4)和(6)(7), 当假设2成立时, 系统(1)的动态性能可由如下两时段的动力系统近似描述:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + A_{\mathrm{d}}\phi(t) + \\ \qquad \mathrm{Bsat}(Kx(t) + K_{\mathrm{d}}\phi(t)),\ t \in [0, \tau], \\ x(0) = \phi(\tau) \in \beta\Theta_0, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - A_{\mathrm{d}})x + A_{\mathrm{d}}y + \\ \qquad B\mathrm{sat}((K - K_{\mathrm{d}})x + K_{\mathrm{d}}y),\ t \in [\tau, +\infty], \\ \tau\dot{y} = Cx + Dy. \end{cases} \tag{9}$$

其中: $C = 4I, D = -2I$; $x(\tau)$的值由系统(8)决定. 而由式(6)可知y的初始量满足

$$y(\tau) = \phi(\tau) + x(\tau), \tag{10}$$

因此, 经过PADE变换后, 问题(2)可变为

$$\begin{aligned} &\max\ \beta, \\ &\mathrm{s.t.}\ (x(\tau), y(\tau)) \in \Omega,\ x_0 \in \beta\Theta_0, \end{aligned} \tag{11}$$

其中: $x(\tau), y(\tau)$是式(8)和(10)将初始值$x_0 \in \beta\Theta_0$映射为τ时刻的状态值; Ω是系统(9)的稳定域.

由上面的优化问题可知, 求解的关键在于估计系统(9)稳定域Ω并同时确定其初始状态$x(\tau)$和$y(\tau)$(此工作将在第4节中计算). 此外, 与原系统相比, 系统(9)增加了n个状态变量, 而且因为参数τ很小, 所以它实质上是SPSSN系统, 因而直接估计稳定域可能会出现非刚性、维数高等问题. 为此, 我们将分析系统(9)的基本性质, 并在此基础上解决奇异性和维数高等问题.

3.2 近似系统的基本性质(Basic characteristics of the approximation system)

作如下坐标变换:

$$\begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_x(\tau) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \tag{12}$$

其中矩阵$L_x(\tau)$由后文决定.

在新坐标下, 系统(9)可记为

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = \widetilde{A}\widetilde{x}(t) + A_{\mathrm{d}}\widetilde{y}(t) + B\psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \\ \tau\dot{\widetilde{y}}(t) = \widetilde{C}\widetilde{x}(t) + \widetilde{D}\widetilde{y}(t) + \tau L_x B\psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \end{cases} \tag{13}$$

其中: $\widetilde{A} = A - A_{\mathrm{d}} - A_{\mathrm{d}}L_x + B\widetilde{K}$, $\widetilde{K} = K - K_{\mathrm{d}} - K_{\mathrm{d}}L_x$, $\psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \mathrm{sat}(\widetilde{K}\widetilde{x} + K_{\mathrm{d}}\widetilde{y}) - \widetilde{K}\widetilde{x}$, $\widetilde{C} = C - DL_x(\tau) + \tau L_x\widetilde{A}$, $\widetilde{D} = D + \tau L_x A_{\mathrm{d}}$.

下面的引理1说明, 可以选择合适的矩阵$L_x(\tau)$使得$\widetilde{C} = 0$ 成立, 从而$\widetilde{y}$和$\widetilde{x}$变量部分解耦.

引理 1 考虑如下矩阵方程:

$$\widetilde{C} = C - DL_x(\tau) + \tau L_x(\tau)\widetilde{A}, \tag{14}$$

式中的变量和式(13)中相同. 对$\forall\tau \in (0, \tau^*)$, 方程(14)的解矩阵$L_x(\tau)$惟一存在且是$\tau$的光滑函数.

证 因为$\partial\widetilde{C}/\partial L_x\,|_{\tau=0} = -D = 2I$非奇异, 所以由隐函数定理[20]论成立.

利用式(12)的坐标变换并选择满足方程(14)的矩阵$L_x(\tau)$, 那么系统(13)可进一步简化为

$$\begin{cases} \dot{\widetilde{x}}(t) = \widetilde{A}\widetilde{x}(t) + A_{\mathrm{d}}\widetilde{y}(t) + B\psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}), \\ \tau\dot{\widetilde{y}}(t) = \widetilde{D}\widetilde{y}(t) + \tau L_x B\psi(\widetilde{x}, \widetilde{y}). \end{cases} \tag{15}$$

因此, 估计系统(9)的稳定域仅需估计系统(15)的稳定域. 下面引理进一步给出相关性质.

引理 2[8] 设$\widetilde{x} \in F$, 系统(15)中的非线性函数ψ满足$\|\ \psi(\widetilde{x}, \widetilde{y})\ \| \leqslant \|\ K_{\mathrm{d}}\ \| \cdot \|\ \widetilde{y}\ \|$, 其中集合$F$为

$$F = \{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^s \mid -\boldsymbol{e} \leqslant \widetilde{K}\widetilde{x} \leqslant \boldsymbol{e}\}, \tag{16}$$

其中$\boldsymbol{e}$是具有合适维且分量都为1的列向量.

引理 3 对$\forall\tau \in (0, \tau^*)$, 原点是系统(9)的双曲稳定平衡点.

引理 4 对$\forall\tau \in (0, \tau^*)$, 原点是系统(15)的双曲稳定平衡点.

证 这两个引理证明较简单, 此处略.

3.3 稳定域解耦估计理论(Theories of the stability region decompositions)

由于直接估计如系统(15)这种SPSSN系统的稳定域, 将遇到高维(计算量大)和奇异性(条件数大)等困难. 为此, 构造系统(15)的如下两个伴随系统:

$$\dot{\widetilde{x}}(t) = \widetilde{A}\widetilde{x}(t), \tag{17}$$

$$\dot{\widetilde{y}}(\eta) = \widetilde{D}\widetilde{y}(\eta) + \tau L_x B\psi(\widetilde{x}(\eta), \widetilde{y}(\eta)). \tag{18}$$

引理 5 对$\forall\tau \in (0, \tau^*)$, 如果如下条件成立: 1)$\widetilde{\Omega}_x \in \mathbb{R}^{n_1}$是伴随系统(17)在集合$\widetilde{F}_1$中的不变集, 即$\widetilde{\Omega}_x \subset \widetilde{F}_1$. 2)对于系统(18), 当$x \in F_2$恒成立时其轨迹满足: 存在与$\tau$无关的正数$\gamma$和$l$使得

$$\|\ \widetilde{y}(\eta)\ \| \leqslant l\mathrm{e}^{-\gamma\tau},\ \forall y_1^0 = \widetilde{y}(0) \in \widetilde{\Omega}_y,\ \forall\eta \geqslant 0.$$

其中$\widetilde{F}_1$定义为

$$\widetilde{F}_1 = \{\widetilde{x} \mid -\sigma\boldsymbol{e} \leqslant \widetilde{K}\widetilde{x} \leqslant \sigma\boldsymbol{e}\}, \tag{19}$$

σ为常数且$\sigma \in (0, 1)$.

结论: 笛卡尔积$\widetilde{\Omega}_x \times \widetilde{\Omega}_y$是系统(15)稳定域的一个子集. 其中集合$\widetilde{\Omega}_y \subset \mathbb{R}^{n_2}$表示球心在原点、半径足够大但有界的球; n_1和n_2分别是$\widetilde{x}$和$\widetilde{y}$的维数, 在本文中满足$n_1 = n_2 = n$.

证 详见文献[8]中定理3, 此处略.

由此引理可知, 估计系统(15)的稳定域, 只需在集合$\widetilde{F}$中寻找伴随系统(17)的不变集, 这一方面可以克服系统的奇异性(条件数大); 另一方面也减少了

计算量(伴随系统是低维系统). 但是, 应用此结论有两个前提条件, 一是伴随系统(17)的不变集必须存在, 另外就是伴随系统(18)必须满足条件2. 下面证明, 对于时滞近似系统(15), 这些条件是成立的.

定理 1　对$\forall\tau\in(0,\tau^*)$, 零点是伴随系统(17)的双曲稳定平衡点.

证　因为在原点很小范围内$\psi(\widetilde{x},\widetilde{y})=K_{\rm d}\widetilde{y}$, 故系统(15)在原点处的雅克比矩阵为

$$J=\begin{bmatrix}\widetilde{A} & * \\ 0 & \tau^{-1}(\widetilde{D}+\tau L_xBK_{\rm d})\end{bmatrix}.$$

又因为变换(12)是可逆变换, 故系统(15)和(9)的雅克比矩阵稳定性相同. 由引理3可知系统(9)的雅克比矩阵是稳定的, 从而命题成立.

此定理说明准静态系统(17)的平衡点是双曲稳定的, 所以是全局稳定的, 而集合$\widetilde{F}_1$的边界都是高维平面. 因此, 由文献[1, 18]等方法很容易在集合$\widetilde{F}_1$中找到一个高维椭球使得它既是系统(19)的不变集, 也是系统(19)稳定域的子集.

定理 2　考虑系统(18)的性质. 对$\forall\tau\in(0,\tau^*)$, 如果存在$\eta^*>0$(η^*可以是无穷大量), 使得$\widetilde{x}(\eta)\in F$对$\forall\eta\in[0,\eta^*)$成立, 那么存在与τ无关的正数γ, 系统的轨迹满足

$$\|\widetilde{y}(\eta)\|\leqslant\|\widetilde{y}(0)\|{\rm e}^{-\gamma\eta},\ \forall\eta\in[0,\eta^*). \tag{20}$$

其中$\widetilde{y}(0)$是$\widetilde{y}(\eta)$的初值.

证　在时间段$[0,\eta^*)$考虑系统的性质.

选择Lyapunov函数为$V=\widetilde{y}^{\rm T}\widetilde{y}$, 它沿着系统(20)的轨线导数满足(利用$C=4I, D=-2I$)

$$\dot{V}=\widetilde{y}^{\rm T}(\widetilde{D}^{\rm T}+\widetilde{D})\widetilde{y}+2\tau\widetilde{y}^{\rm T}L_xB\psi=$$
$$-\widetilde{y}^{\rm T}[4I-\tau(L_xA_{\rm d}+A_{\rm d}^{\rm T}L_x^{\rm T})]\widetilde{y}+2\tau\widetilde{y}^{\rm T}L_xB\psi.$$

应用引理2可得$\|\psi(\widetilde{x},\widetilde{y})\|\leqslant\|K_{\rm d}\widetilde{y}\|$, 所以

$$\dot{V}\leqslant-2(2-\tau\|L_xA_{\rm d}\|-\tau\|L_xB\|\|\widetilde{K}_{\rm d}\|)\|\widetilde{y}\|^2.$$

因为当$\tau=0$时$2-\tau\|L_xA_{\rm d}\|-\tau\|L_xB\|\|\widetilde{K}_{\rm d}\|=2>0$, 又因其中的变量是$\tau$的连续函数, 所以当$\tau$足够小时存在与$\tau$无关的正数$\gamma$满足

$$\dot{V}\leqslant-2\gamma\|\widetilde{y}\|^2=-2\gamma V.$$

再根据微分方程中的比较定理得[20]:

$$\widetilde{y}^{\rm T}\widetilde{y}=V(\eta)\leqslant V_0{\rm e}^{-2\gamma_1\eta}=\|\widetilde{y}(0)\|^2{\rm e}^{-2\gamma_1\eta}.$$

因为考虑的时间段为$\eta\in[0,\eta^*)$, 所以

$$\|\widetilde{y}(\eta)\|\leqslant\|\widetilde{y}(0)\|{\rm e}^{-\gamma\eta},\eta\in[0,\eta^*).$$

显然上述证明对η^*是无穷大量仍然成立.

由定理2可以发现引理5中条件2也是成立的, 因此, 结合定理1和定理2关于伴随系统的性质, 并应用引理5可得系统(15)稳定域的如下结论.

定理 3　考虑系统(19). 对$\tau\in(0,\tau^*)$, 都存在集合$\widetilde{\Omega}_x$, 使得$\widetilde{\Omega}$是此系统在集合中的不变集, 而且笛卡尔积$\widetilde{\Omega}_x\times\widetilde{\Omega}_y$是系统(15)稳定域的一个子集. 其中集合$\widetilde{F}_1$定义如式(19)所示, 集合$\widetilde{\Omega}_y\subset\mathbb{R}^n$是一个球心在原点、半径足够大且有界的球体.

证　因为由定理1可知存在集合$\widetilde{\Omega}_x$, 使得它是系统(17)在集合$\widetilde{F}_1$中的不变集, 所以引理5的条件1成立. 此外, 由定理2可知, 当$x\in F_2$将恒成立时(对应η^*无穷大), 伴随系统(20)的轨迹满足: 存在与τ无关的正数γ和l使得

$$\|\widetilde{y}(\eta)\|\leqslant\|\widetilde{y}(0)\|{\rm e}^{-\gamma\eta},\ \forall\eta\geqslant0,\ \forall y_1^0=\widetilde{y}(0)\in\widetilde{\Omega}_y.$$

所以引理5中条件2也成立, 因而引理5条件都成立, 故$\widetilde{\Omega}_x\times\widetilde{\Omega}_y$是系统(15)稳定域的子集.

注 2　1) 上述引理和定理对$\tau\in(0,\tau^*)$都成立, 前提是$\tau^*>0$足够小, 故上述结论也可表达为: 存在$\tau^*>0$, 使得对$\tau\in(0,\tau^*)$ 结论成立.但本文仍然采用$\tau^*>0$足够小这种说法, 使得结论及其证明过程更简洁;

2) 由于定理3中$\widetilde{\Omega}_y$是很大的球, 所以此定理实质说明系统(15)的稳定域具有可解耦性, 即优化问题(11)中的约束$(x(\tau),y(\tau))\in\Omega$可替换为

$$x(\tau)=\widetilde{x}(\tau)\in\Omega_x. \tag{21}$$

4　稳定域估计的优化方法(Optimization method for the stability region estimation)

4.1　初始条件的确定方法(Method for the initial states calculation)

对于问题(11), 上节讨论了其中的稳定域估计问题, 本节将讨论剩下的一个问题, 即$x(\tau)$和$y(\tau)$的求解方法, 同时还将引入LMI优化模型获取β的最大值.在已知Θ_0的基础上, 估计τ时刻系统(9)的初值$\widetilde{x}(\tau)=x(\tau)$所在的集合$X_1$, 以确定$\widetilde{x}(\tau)\in X_1$成立的充分条件.

用待定系数法, 设集合X_1具有如下形式:

$$X_1=\{x\in\mathbb{R}^n|-\underline{u}^1\leqslant x\leqslant\overline{u}^1\},$$

类似地, 在$C_{n,x}$中定义对应的集合Θ_1为

$$\Theta_1=\{\phi|-\underline{u}^1\leqslant\phi(t)\leqslant\overline{u}^1,\forall t\in[0,\tau]\}, \tag{22}$$

其中, 向量$\underline{u}^1$和$\overline{u}^1$是待求的变量.

接下来将用待定系数法确定向量$\underline{u}^1$和$\overline{u}^1$.

构造两个矩阵K^+和K^-满足

$$(K^+)_{ij}=\begin{cases}(K)_{ij}, & (K)_{ij}>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$(K^-)_{ij}=\begin{cases}(K)_{ij},\ (K)_{ij}\leqslant 0,\\ 0,\qquad 其他,\end{cases}$$

其中$(\cdot)_{ij}$表示取矩阵的第i行j列元素.

对于系统(8), 当$x_\tau\in\Theta_1$时, 对$\forall t\in[0,\tau]$, 有

$$\begin{bmatrix}K^-\big|-K^+\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{u}^1\\ \hline \underline{u}^1\end{bmatrix}\leqslant Kx\leqslant\begin{bmatrix}K^+\big|-K^-\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{u}^1\\ \hline \underline{u}^1\end{bmatrix}. \tag{23}$$

按同样的方法构造其他矩阵A^-, A^+等. 因为当$a>0$时$\mathrm{sat}(a)\leqslant a$, 而当$a\leqslant 0$时$\mathrm{sat}(a)\geqslant a$, 又因为向量$K^+\overline{u}^1-K^-\underline{u}^1$和$K_\mathrm{d}^+\overline{u}^0-K_\mathrm{d}^-\underline{u}^0$每个分量都是正数, 而$K^-\overline{u}^1-K^+\underline{u}^1$和$K_\mathrm{d}^-\overline{u}^0-K_\mathrm{d}^+\underline{u}^0$的每个分量都为负, 所以结合式(8)可得$x(t)(\forall t\in[0,\tau])$被限制在一个高维矩形中. 如果令这个矩形的边长和待求的系数$\underline{u}^1$和$\overline{u}^1$相等, 那么很显然, 此时可以根据$\underline{u}^0$和$\overline{u}^0$可以求得$\underline{u}^1$和$\overline{u}^1$, 这就是待定系数法的主要思想. 限于篇幅此处将推导略去.

利用上面介绍的待定系数法思路, 可得到如下的方程: 化简可得以下等价方程:

$$\left[\begin{array}{c|c}I-\tau H_1^+ & \tau H_1^-\\ \hline \tau H_1^- & I-\tau H_1^+\end{array}\right]\begin{bmatrix}\overline{u}^1\\ \hline \underline{u}^1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c}I+\tau H_2^+ & -\tau H_2^-\\ \hline -\tau H_2^- & I+\tau H_2^+\end{array}\right]\begin{bmatrix}\overline{u}^0\\ \hline \underline{u}^0\end{bmatrix}, \tag{24}$$

其中: I是n维的单位阵, $H_1^+=A^++B^+K^++B^-K^-$, $H_1^-=A^-+B^+K^-+B^-K^+$, $H_2^+=A_\mathrm{d}^++B^+K_\mathrm{d}^++B^-K_\mathrm{d}^-$, $H_2^-=A_\mathrm{d}^-+B^+K_\mathrm{d}^-+B^-K_\mathrm{d}^+$.

注 3 上式中共有$2n$个方程, $2n$个未知数, 而且当τ较小时, 变量$\overline{u}^1$和$\underline{u}^1$可由$\overline{u}^0$和$\underline{u}^0$惟一确定且是其线性函数, 证明略.

另外, 由上式的线性关系, 当系统(8)的初始条件满足$x_0\in\beta\Theta_0$时, 必然可得$x_\tau\in\beta\Theta_1$, 所以系统(9)的初始条件$x(\tau)$满足$\widetilde{x}(\tau)=x(\tau)\in\beta X_1$. 因此, 考虑$x_0\in\beta\Theta_0$, 优化问题(2)或(11)中约束(21)可替换为更强的充分条件

$$\beta X_1\subset\widetilde{\Omega}_x. \tag{25}$$

4.2 稳定域估计的LMI优化模型(LMI Optimization model for the stability region estimation)

由前面定理3, 在集合$\widetilde{F}_1$中寻找系统(17)的不变集就能得系统(15)的稳定域子集, 利用文献[1]中方法, 很容易求得椭球$\widetilde{\Omega}=\{\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n|\widetilde{x}^\mathrm{T}P\widetilde{x}\leqslant 1\}$满足此要求, 其中正定矩阵$P$满足$\widetilde{A}^\mathrm{T}P+P\widetilde{A}\leqslant 0$.

进一步, 为减少稳定域估计结果的保守性, 在满足要求的所有正定矩阵P中, 结合初始状态量$\widetilde{x}(\tau)$所在集合βX_1的形状, 选择最优的矩阵P使得估计的稳定域$\widetilde{\Omega}=\{\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n|\widetilde{x}^\mathrm{T}P\widetilde{x}\leqslant 1\}\subset\widetilde{F}_1$能包含最大的集合$\beta X_1$, 即$\beta$最大, 从而问题(2)或(11)可转化为

$$\beta^*=\max_{P>0}\ \beta, \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t. a)}\ &\beta X_1\subset\widetilde{\Omega}=\{\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n|\ \widetilde{x}^\mathrm{T}P\widetilde{x}\leqslant 1\},\\ \text{b)}\ &\widetilde{\Omega}\subset\widetilde{F}_1,\\ \text{c)}\ &\widetilde{A}^\mathrm{T}P+P\widetilde{A}\leqslant 0.\end{aligned}$$

其中: 约束a)表示式(35)成立; 约束b)和c)表示$\widetilde{\Omega}$是系统(19)在$\widetilde{F}_1$中的不变集[1], 所以问题(36)的最优解$\widetilde{\Omega}=\{\widetilde{x}\in\mathbb{R}^n|\ \widetilde{x}^\mathrm{T}P\widetilde{x}\leqslant 1\}$满足定理3条件, 从而可获得对应于问题(2)的近似最优解β^*.

4.3 优化模型的化简(Simplification of the optimization model)

本节将优化(36)简化为LMI凸优化问题. 因为高维矩形$\beta\Theta_1$可看作是一个特殊的凸多面体, 其顶点坐标分别为$Z_i^0=\beta[x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0]^\mathrm{T}$, $i=1,2,\cdots,2^n$, 其中$x_k^0=-\underline{u}_k^1$或$\overline{u}_k^1$.

因此, 根据凸多面体的性质, 约束a)等价于每个顶点都在椭球$\tilde{\Omega}$中[1], 即

$$\beta\Theta_1\subset\tilde{\Omega}\Leftrightarrow\beta^2(Z_i^0)^\mathrm{T}PZ_i^0\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,2^n. \tag{27}$$

另外由矩阵Schur性质, 约束b)等价于[1,5]

$$\Big\{\widetilde{x}|\ \widetilde{x}^\mathrm{T}P\widetilde{x}\leqslant 1\Big\}\subset\Big\{\widetilde{x}|\ -\sigma 1\leqslant\widetilde{K}\widetilde{x}\leqslant\sigma 1\Big\}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\sigma^2 & (\widetilde{K})_i\\ (\widetilde{K}^\mathrm{T})_i & P\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{28}$$

式中$\widetilde{K}_i$表示矩阵$\widetilde{K}$的第i行行向量.

再令

$$\gamma=\beta^{-2}, \tag{29}$$

从而问题(26)可变换为以下LMI凸优化问题[5,6]

$$\gamma^*=\min_{P>0}\ \gamma, \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t.}\ \ \text{a)}\ &(Z_i^0)^\mathrm{T}PZ_i^0\leqslant\gamma,\ i=1,2,\cdots,2^n,\\ \text{b)}\ &\begin{bmatrix}\sigma^2 & (\widetilde{K})_i\\ (\widetilde{K}^\mathrm{T})_i & P\end{bmatrix}\geqslant 0,\\ \text{c)}\ &\widetilde{A}^\mathrm{T}P+P\widetilde{A}\leqslant 0.\end{aligned}$$

注 4 1) 系统(17)是在原点小邻域内系统(1)的准静态系统, 所以$\widetilde{A}$的条件数不大, 故利用优化模型(30)估计稳定域不会出现奇异的问题;

2) 延时环节导致系统近似为非时滞饱和系统时扩充为$2n$个状态变量. 然而, 由式(30)可知, 本文方法仍然只有估计n维饱和系统稳定域的计算量;

3) 在优化(30)中, 最优值γ^*和经验常数σ的取值有关, 而且不难证明γ^*/σ是常数, 证明略(见文献[3]). 因此, 在实际求解此优化时可令$\sigma = 1$, 然后根据比例关系得到对应于实际σ值的最优解. 另外, 根据此比例关系还可以克服调整σ值而需重新求解的问题, 从而大大减少计算量.

4.4 稳定域估计的降阶算法(Reduced-order method for the stability region estimation)

当延时时间足够小时, 矩阵$L_x(\tau)$惟一存在. 考虑到它是τ的光滑函数, 利用泰勒级数逼近, 令

$$L_x(\tau) = L_x^0 + \tau L_x^1 + \tau^2 L_x^2 + \tau^3 L_x^3 \cdots, \tag{31}$$

其中矩阵L_x^0、L_x^1和L_x^2是待求量.

将式(41)代入式(14)中, 再比较等式两端τ的各次系数, 得

$$\begin{cases} L_x^0 = D^{-1}C,\ L_x^1 = D^{-1}L_x^0\widetilde{A}^0, \\ L_x^2 = -D^{-1}L_x^0(A_\mathrm{d} + BK_\mathrm{d})L_x^1 + D^{-1}L_x^1\widetilde{A}^0, \\ \qquad \vdots \end{cases} \tag{32}$$

其中$\widetilde{A}^0 = A - A_\mathrm{d} - A_\mathrm{d}L_x^0 + B(K - K_\mathrm{d} - K_\mathrm{d}L_x^0)$.

利用式(42)就可得$L_x(\tau)$的近似式, 再结合前面的分析可得系统(9)稳定域估计的算法为

步骤 1　建立系统(8), (9)的模型;

步骤 2　计算得$L_x(\tau)$的近似式, 选择经验常数σ并建立系统(15)的模型;

步骤 3　根据Θ_0并解方程(24)得集合X_1;

步骤 4　解优化问题(30)得$\widetilde{\Omega} = \{\widetilde{x} |\ \widetilde{x}^\mathrm{T}P^*\widetilde{x} \leqslant 1\}$和最优值$\beta^*$, 即可得系统的近似稳定域.

5 算例仿真(Simulation results)

考虑2维时滞饱和系统, 表达式为(1)所示, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_\mathrm{d} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ K_\mathrm{d} = -\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

容易验证, 当$\tau = 0$时系统在原点处雅可比矩阵的特征根为$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i$, 故假设1成立.

5.1 Pade近似模型误差分析结果(Error analysis of the approximation model)

通过时域仿真可以发现, 系统的时滞极限平衡点渐进稳定时τ的最大值在0.179 至0.182之间, τ在此范围内系统的轨迹开始振荡发散.

选择不同的时滞参数τ, 用相同的初始条件(考虑初始条件为$\phi(t) = [\sin t, \cos t]^\mathrm{T}$), 分别对原系统和Pade近似系统进行时域仿真, 其误差见图1.由图可以发现, 在时滞极限范围内, Pade近似带来的误差很小且随着时间t增大逐渐收敛; 而随着时滞参数τ的减小, Pade近似引起的误差也减小. 因此, 在小时滞情况下利用非时滞的近似模型估计时滞饱和系统的稳定域是合理的.

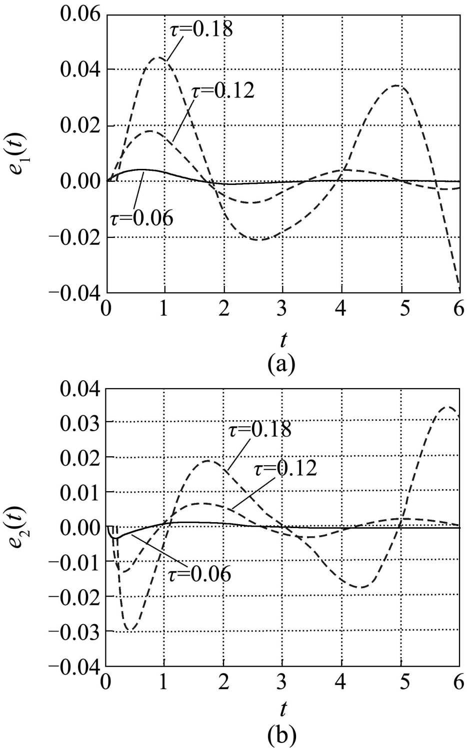

图 1　实际轨迹与近似轨迹误差曲线

Fig. 1　Errors between the real trajectories and the approximate trajectories

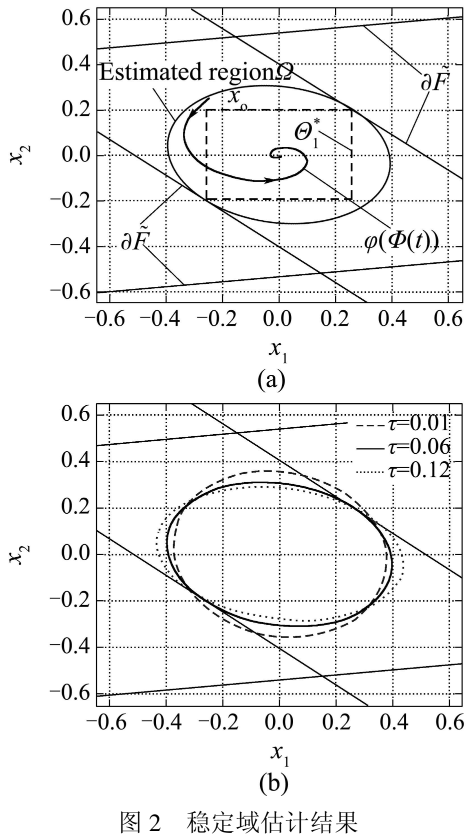

图 2　稳定域估计结果

Fig. 2　Results of the estimated stability region

5.2 稳定域估计结果(Results of the stability region estimation)

下面应用前面的方法估计稳定域. 其中: σ取为0.9, 初始条件$\phi(t), \forall t \in [0,\tau]$ 所在集合的参考形状为单位正方体, 即$\overline{u}_1^0 = \underline{u}_1^0 = \overline{u}_2^0 = \underline{u}_2^0 = 1$.

利用算法1, 当$\tau = 0.06$时最优值$\beta^* = 0.14$, 对应稳定域的估计结果如图2(a), 其他时滞参数的稳定域结果如图2(b)所示.图中的直线为集合$\widetilde{F}_1$ 的边界, 其交叉而成的区域为集合$\widetilde{F}_1$. 在估计的稳定域中任选一点, 系统的轨迹将收敛到平衡点, 如图2(a)中曲线$\phi_t(x_0)$所示, 其中此曲线的初始状态满足$x_0(t) = [-0.25, 0.25]^{\mathrm{T}}, \forall t \in [-0.06, 0]$.

6 结论(Conclusions)

基于Pade变换, 将小时滞饱和系统的动态特性近似为SPSSN系统的动态特性.证明了只要时滞参数足够小, 近似的SPSSN系统的稳定域具有可解耦性, 在此基础上提出一种估计小时滞饱和系统稳定域的方法. 文中提出的方法可以一定程度地克服奇异性和维数灾等问题.

参考文献(References):

[1] HU T, LIN Z. *Control Systems with Actuator Saturation: Analysis and Design*[M]. Boston: Birkhauser, 2001.

[2] 王利魁, 杨军, 石胜利, 等. 对离散多饱和系统吸引域的估计[J]. 控制理论与应用, 2003, 23(4): 649 – 652.
(WANG Likui, YANG Jun, SHI Shengli, et al. Estimating the domain of attraction of discrete-time linear system with nested saturation[J]. *Control Theroy & Applications*, 2003, 23(4): 649 – 652.)

[3] 甘德强, 辛焕海, 邱家驹, 等. 一种饱和电力系统稳定域估计的降阶方法[J]. 中国科学E辑, 2007, 37(7): 958 – 974.
(GAN Deqiang, XIN Huanhai, QIU Jiaju, et al. A reduced-order method for estimating the stability region of power systems with saturated controls[J]. *Science in China(Series E)*, 2007, 37(7): 958 – 974.)

[4] 辛焕海, 吴荻, 甘德强, 等. 基于饱和系统理论的电力系统稳定器性能分析方法[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(31): 14 – 19.
(XIN Huanhai, WU Di, GAN Deqiang, et al. A method for analyzing the power system stabilizer performance based on the theory of saturated system[J]. *Proceeding of the Chinese Society for Electrical Engineering*, 2007, 27(31): 14 – 19.)

[5] XIN H H, GAN D Q, CHUNG T S, et al. A method for evaluating the performance of PSS with saturated input[J]. *Electric Power Systems Research*, 2007, 77(10): 1284 – 1291.

[6] CAO Y, LIN Z, WARD D G. An anti-windup approach to enlarging domain of attraction for linear systems subject to actuator saturation[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(1): 140 – 145.

[7] 缪银龙, 王景成, 吴凤. 基于LMI和IMC的动态反馈抗饱和补偿设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(2): 303 – 306, 311.
(MIAO Yinlong, WANG Jingcheng, WU Feng. Anti-windup compensation design based on LMI and IMC[J]. *Control Theroy & Applications*, 2007, 24(2): 303 – 306, 311.)

[8] 辛焕海, 吴荻, 甘德强, 等. 一种估计奇异摄动饱和系统稳定域的方法[J]. 自动化学报, 2008, 34(12): 1548 – 1554.
(XIN Huanhai, WU Di, GAN Deqiang, et al. A method for estimating the stability region of singular perturbation systems with saturation nonlinearities[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2008, 34(12): 1548 – 1554.)

[9] 王利魁, 杨军, 石胜利, 等. 对离散多饱和系统吸引域的估计[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(4): 649 – 652.
(WANG Likui, YANG Ju, SHI Shengli, et al. Estimating the domain of attraction of discrete-time linear system with nested saturation[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(4): 649 – 652.)

[10] WU H X, TSAKALIS K S, HEYDT G T. Evaluation of time delay effects to wide-area power system stabilizer design[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2004, 19(4): 1935 – 1941.

[11] TARBOURIECH S, PERES G, QUEINNEC I. Delay-dependent stabilisation and disturbance tolerance for time-delay systems subject to actuator saturation[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2002, 149(5): 387 – 393.

[12] 魏爱荣, 王玉振, 赵克友. 含状态时滞及执行器饱和不确定系统反馈镇定及L2增益分析[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 475 – 479.
(WEI Airong, WANG Yuzhen, ZHAO Keyou. Feedback stabilization and L_2-gain analysis of uncertain systems with state delay and actuator saturation[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 475 – 479.)

[13] CHOU J, HORNG I, CHEN B S. Dynamical feedback compensator for uncertain time-delay systems containing saturating actuator[J]. *International Journal of Control*, 1989, 49(33): 961 – 968.

[14] 张先明, 吴敏, 佘锦华. 含饱和驱动的线性时滞系统的时滞相关鲁棒稳定化[J]. 控制理论与应用, 2006, 22(6): 145 – 148.
(ZHANG Xianming, WU Min, SHE Jinhua. Delay-dependent robust stabilization of uncertain linear time-varying delay systems containing saturating actuators[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 22(6): 145 – 148.)

[15] OOCHERIAH S. Global stabilization of a class of linear continuous time-delay systems with saturating controls[J]. *IEEE Transactions Circuits Systems-Fundamental Theory and Applications*, 1996, 43(12): 1012 – 1015.

[16] CAO Y, LIN Z, HU T. Stability analysis of linear time-delay systems subject to input saturation[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(2): 233 – 240.

[17] NI H, HEYDT G T, MILI L. Power system stability agents using robust wide area control[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2002, 17(4): 1123 – 1131.

[18] GEORGE A, BAKER J, GRAVES-MORRIS P. *Pade Approximants*[M]. 2nd edition. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[19] WANG Z H, HU H Y. Robust stability test for dynamic systems with short delays by using pade approximation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1999, 18(3): 275 – 287.

[20] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. 2nd edition. New Jersey: Prentice Hall, 1996.

作者简介:

辛焕海 (1981—), 男, 讲师, 主要从事电力系统稳定性分析与控制研究工作, E-mail: eexinhh@gmail.com;

屠竞哲 (1984—), 男, 博士研究生, 主要从事电力系统稳定性研究工作, E-mail: tujingzhe@gmail.com;

谢 俊 (1979—), 男, 博士, 主要从事电力系统优化研究工作, E-mail: jxie.zju@gmail.com;

甘德强 (1966—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事电力系统稳定和电力市场的研究工作, E-mail: deqiang.gan@ieee.org.