

具有Markovian时延与丢包的离散系统的状态估计

王宝凤, 郭 戈

(大连海事大学 信息科学技术学院, 辽宁 大连 116026)

摘要: 网络化控制系统中经常会因网络带宽有限而导致数据包在网络中传输时产生时延甚至丢失. 本文主要研究具有Markovian时延与丢包的离散线性系统的状态估计问题. 通过在估计器端设置适当长度的缓存器, 把具有多状态Markovian时延与丢包的离散定常系统建模成数据包到达过程为两状态Markovian模型的离散时变系统, 并基于跳跃线性估计器的思想提出了一类特殊的估计器, 即限定接收历史估计器(FRHE). 在最大时延已知时, 给出了可选增益的最优FRHE设计策略. 该策略虽然是次优, 却能提供简便的计算. 通过与时变Kalman估计器(TVKE)的仿真对比, 表明所提策略的有效性.

关键词: Markovian时延; 丢包; 状态估计; 卡尔曼滤波

中图分类号: TP **文献标识码:** A

State estimation for discrete-time systems with Markovian time-delay and packet loss

WANG Bao-feng, GUO Ge

(School of Information Science and Technology, Dalian Maritime University, Dalian Liaoning 116026, China)

Abstract: In networked control systems, data packet transmission time-delays or even dropouts are always inevitable due to bandwidth constraints. The state estimation problem for discrete-time linear systems with Markovian time-delay and packet loss is considered. By setting a buffer with appropriate length on the estimator site, a discrete time-invariant system with multiple-state Markovian time-delay and packet loss is modeled as a time-variant system whose data receiving process is described by a two-state Markov chain. Based on the idea of jump linear estimator, we propose a special class of estimator, termed finite reception history estimator (FRHE). The optimal FRHE design strategy is developed under a known maximum time-delay. Although the FRHE is suboptimal, it provides a computationally inexpensive estimation method. A simulation example is presented to demonstrate the effectiveness of the proposed strategy by comparing to time varying Kalman estimator (TVKE).

Key words: Markovian time-delay; packet loss; state estimation; Kalman filtering

1 引言(Introduction)

近年来, 网络环境下的系统状态估计问题已取得一些研究成果. 针对时延的多样性特点, 文献[1, 2]研究了确定性时延下的状态估计. 文献[3, 4]则对随机时延以及时变时延下的状态估计问题进行了探讨. 而对于丢包问题, 通常把数据包的接收过程描述为一个随机过程, 如伯努利过程^[5~8]或两状态马尔可夫链^[9]等. Schenato^[10, 11]通过在估计器端放置缓存器, 研究了同时存在随机时延、伯努利丢包过程及数据包乱序的状态估计方法.

在实际工程中, 尤其在无线通信网络中, 数据包的时延或丢失更常表现为前后相关或连续发生, 即具有马尔可夫性. 关于这种情况下的状态估计问题

的研究则相对较少, 文献[9]虽然考虑了Markovian丢包的情况, 却忽略了传输时延问题; 文献[10]中虽然同时考虑了时延与丢包问题, 只是其丢包过程为i.i.d随机过程. 本文主要研究数据传输过程具有Markovian时延及丢失情况下的状态估计策略设计问题, 同时也考虑了数据包乱序的情况. 本文通过采用文献[10]中在估计器端放置有限缓存的方法, 把离散定常系统建模为离散时变系统, 并把缓存器中任意固定时刻的数据到达情况看作仅有“临时丢包”的系统模型, 并综合文献[9]中的方法设计了一个限定到达历史估计器(FRHE), 为解决具有Markovian时延与丢包的状态估计问题提供了一种简单的算法.

本文的组织结构如下,第2部分对所研究问题进行数学描述.通过把离散定常系统建模为时变系统,在第3部分给出本文的主要结论,并在第4部分进行仿真对比与验证.最后,第5部分进行总结.

2 问题描述(Problem description)

考虑下列离散定常系统

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bw(t), \\ y(t) &= Cx(t) + v(t). \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $t \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ 表示离散时刻, $x \in \mathbb{R}^n$ 为系统状态, 初始值为 x_0 , $y \in \mathbb{R}^m$ 为传感器输出, $w \in \mathbb{R}^p$, $v \in \mathbb{R}^m$ 分别为过程噪声和输出噪声, 并且 (x_0, w, v) 是均值和方差分别为 $(\bar{x}_0, 0, 0)$ 和 (P_0, Q, R) 的相互独立的高斯白随机过程, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 假设 (A, C) 可观, $(A, Q^{1/2})$ 可达, 且 $R > 0$.

为表述简单, 本文把数字通信网络建模为被控对象与估计器之间的一个模块(如图1所示), 并假设数据包通过该模块传输时存在有限的Markovian时延甚至可能完全丢失. 同时, 由于时延的随机性, 数据包在估计器端可能出现乱序到达的情况.

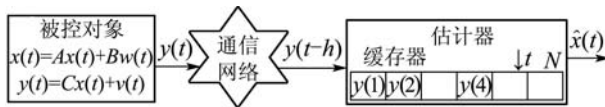


图1 网络化控制系统模型

Fig. 1 Networked control systems modeling

为了解决上述通信受限下的状态估计问题, 假设估计器端设置有缓存器. 为解决乱序问题, 假设数据包带有时间戳, 且所有正确传输的数据包根据时间戳存储在缓存中, 从而实现在估计器端对量测数据重新排序的目的. 在任意时刻 t , 所有到达估计器端缓存器的量测值 $y(k)$ ($k \in \{0, 1, \dots, t\}$) 按时间戳存储在缓存器中, 未到达时设存放数值0. 如图2分别给出 $t=4$ 和 $t=5$ 时刻缓存器中的数值:

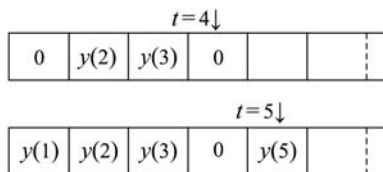


图2 t 时刻缓存器的数据

Fig. 2 The measurement in buffer at time t

注1 由于存在乱序问题, 可能出现连续采样时间内没有数据包到达或后采样值先到达(如图2中 $y(1), y(2)$) 等情况.

对时延和丢包问题, 定义随机变量 γ_k^t 来描述 t 时刻缓存器中数据包的到达过程:

$$\gamma_k^t = \begin{cases} 1, & \text{如果 } y(k) \text{ 在 } t \text{ 时刻或之前到达;} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (2)$$

显然 $k \in \{0, 1, 2, \dots, t\}$, 即 $t \geq k$. 本文假设系统能够接受的最大时延为 $\tau_{\max} = M$, 且时延超过 $\tau_{\max}$ 时数据包视为丢失, 则量测值 $y(k)$ 的时延 $\tau_k \in \{0, 1, \dots, M, \infty\}$ 的数学表达式为:

$$\tau_k = \begin{cases} \infty, & \text{当 } t - k \geq M \text{ 且 } \gamma_k^t = 0; \\ t_k - k, & t_k \triangleq \min\{t | \gamma_k^t = 1\}. \end{cases} \quad (3)$$

很显然, t_k 表示观测值 $y(k)$ 到达估计器端的时间.

在估计器端的缓存器中, 设数据包的时延 τ_k 是具有一下列概率函数的多状态马尔可夫链:

$$P[\tau_{k+1} = j | \tau_k = i] = p_{ij}. \quad (4)$$

其中 $k \geq 0$, $i, j \in \{0, 1, \dots, M, \infty\}$, 从而该Markovian时延的一步转移矩阵 P_τ 为:

$$P_\tau = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0M} & p_{0\infty} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1M} & p_{1\infty} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ p_{M0} & p_{M1} & \cdots & p_{MM} & p_{M\infty} \\ p_{\infty 0} & p_{\infty 1} & \cdots & p_{\infty M} & p_{\infty \infty} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

由式(4)(5)可知 $0 \leq p_{ij} \leq 1$, $\sum_{j=0}^M p_{ij} + p_{i\infty} = 1$, 且数

据包的丢失概率为最后一列之和, 即 $\sum_{i=0}^M p_{i\infty} + p_{\infty\infty}$.

记任意固定时刻 t 缓存器中存储的数值为 $y^t(k)$ ($k \in \{0, 1, \dots, t\}$), 则 $y^t(k)$ 可表示为(当丢失情况已知时, 观测噪声在传输之后或之前加在式中并不重要):

$$y^t(k) = \gamma_k^t y(k) = \gamma_k^t Cx(k) + v(k). \quad (6)$$

因此, 本文研究的状态估计问题可描述为: 对系统(1), 在具有最大时延、丢包、乱序且时延满足(5)的统计特性情况下, 根据估计器端缓存器中存储的数据对系统状态 $x(t)$ 进行估计, 得出估计值 $\hat{x}(t|t)$, 使估计误差满足某一性能指标. 即:

$$\hat{x}(t|t) \triangleq E[x(t) | \tilde{y}(t), \gamma_t, \bar{x}_0, P_0]. \quad (7)$$

其中 $\tilde{y}(t) = (y^t(1), y^t(2), \dots, y^t(t))$, $\gamma_t = (\gamma_1^t, \gamma_2^t, \dots, \gamma_t^t)$.

3 具有 Markovian 时延与丢包的估计器设计(Design for estimator with Markovian time-delay and packets loss)

由前一节的问题描述可知, 时刻 t , 估计器端缓存

器中的信息可以看作是如下线性离散时变系统的输出:

$$\begin{cases} x^t(k+1) = Ax^t(k) + Bw(k), & k = 0, \dots, t. \\ y^t(k) = C^t(k)x^t(k) + v(k), \end{cases} \quad (8)$$

只是这里随时间变化的因素只有 $C^t(k)$, 它依 γ_k^t 的取值在 C 和 0 之间进行转换, 且 t 时刻缓存器中数据包只存在两种状态: 已到达或未到达(可能由于时延也可能由于丢包). 由(5)知, 此两种状态服从马尔可夫链, 即 γ_k^t 为两状态马尔可夫链, 设到达状态为 1 , 未到达状态为 0 , 本文用 m_{01} 表示前一数据包未到达而当前数据包到达的情况, m_{11} 表示前一数据包到达且当前数据包也到达的情况(如图3所示), 则:

$$\begin{aligned} m_{01} &= \sum_{i=1}^{N-1} p'_{i0} + p'_{\infty 0}, \quad m'_{00} = 1 - m_{01}, \\ m_{11} &= p'_{00} + p'_{10}, \quad m_{10} = 1 - m_{11}. \end{aligned}$$

此时, 离散时定常系统(1)在估计器端被建模为数据包到达过程为两状态Markovian模型的离散时变系统(8), 相应的估计器设计问题转换成了具有Markovian到达过程的离散时变系统的估计器设计问题.

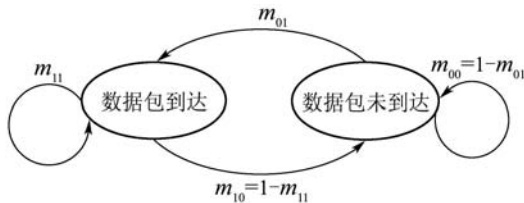


图3 数据包到达过程为Markovian模型

Fig. 3 Markov chain for packet reception process

3.1 限定到达历史估计器(Finite reception history estimator)

基于最近数据包的到达情况能够反应当前时刻增益大小的思想, 对系统(8)设计如下结构递归计算过程:

$$\begin{aligned} \hat{x}^t(k|k) &= A\hat{x}^t(k-1|k-1) + K_{n(k)}^t \times \\ &\quad (y^t(k) - C^t A\hat{x}^t(k-1|k-1)), \quad (9) \\ k &= 1, \dots, t. \end{aligned}$$

其中 $\{K_{n(k)}^t\}$ 为增益集合, $n(k) \in N_n = \{1, \dots, n\}$.

显然, 系统(1)的状态估计 $\hat{x}(t|t)$ 满足 $\hat{x}(t|t) = \hat{x}^t(t|t)$.

要设计(9)结构的估计器, 需要做的工作包括:

1) 选择开关逻辑(switching logic), 即实时计算时, 如何从增益集合中选择适当的增益值; 2) 确定增益数量 n ; 3) 计算增益值.

定义 1 给定基于最近 r 个数据包到达情况的增益集合 $K_{n(k)}^t \in K^r = \{K_1^r, \dots, K_n^r\}$, 记长度为 r 的 2^r 种可能到达序列的编号方式如下:

$$f(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_r) = 2^r - \sum_{k=1}^r \begin{cases} 1, & \text{如果 } \gamma_k = 1 \\ 0, & \text{如果 } \gamma_k = 0 \end{cases} 2^{k-r}. \quad (10)$$

其中 $\gamma_i = 0$ (数据未到达) 或 $\gamma_i = 1$ (数据已到达) ($i = 1, \dots, r$), 本文称这样设计的估计器为限定到达历史估计器(finite reception history estimator, FRHE), 使用的历史数据的长度 r 称为FRHE的阶, 此时 $n = 2^r$.

定义1给出了估计器(9)的转换逻辑及增益数量 n . 下面, 首先研究阶数 r 已知的情况下, 如何确定FRHE增益集合使FRHE最优. 然后, 考虑给定最大Markovian时延时, 如何确定FRHE的阶数及缓存器的长度使FRHE最优.

3.2 确定阶数 r 下的最优FRHE(Optimal FRHE under certain order r)

由定义1知 r 阶FRHE具有 2^r 种可能到达序列, 即 $N_n = \{1, \dots, 2^r\}$, 且该序列为 2^r 个状态的马尔可夫链, 它们的概率分布可由两状态马尔可夫到达过程得出. 设 2^r 个状态在第 k 步的概率分布为行向量, 行向量中的元素为 $\pi_j(k) = \Pr\{n(k) = j\}$, $j \in N_n$, 一步转移矩阵为 $P = [p_{ij}]_{i,j \in N_n}$, 则相应概率分布为 $\pi(k+1) = \pi(k)P$.

首先给出下列前提假设:

1) 设FRHE的 2^r 个状态的马尔可夫链是具有非0概率的静态分布, 即 $\pi(0) = \pi^{ss}$, 则 $\pi^{ss} = \pi^{ss}P$;

2) 设 $p_{ij}^*(k) = \Pr\{n(k-1) = j | n(k) = i\} = \frac{\pi_j(k-1)p_{ji}}{\pi_i(k)}$;

由假设1) 可知对所有的 k 有 $p_{ij}^* = \pi_j^{ss}p_{ji}/\pi_i^{ss}$, 即 $p_{ij}^*(k)$ 是常量, 记为 p_{ij}^* .

3) 对 r 阶FRHE定义性能指标为所有采样路径上的平均性能, 即给定 N_n 上的概率分布, FRHE的损失指标为:

$$E_{N_k}[P^r(k)] = \sum_{i=1}^{M_n} \underbrace{E_{N_{k-1}}[P^r(k) | n(k) = i] \pi_i(k)}_{:= P_i^r(k)}. \quad (11)$$

很显然该FRHE的平均损失可以离线计算.

定义 2 给定 Markovian 数据包到达模型及FRHE的阶数 r , 设计增益集合使得

$$J_\infty^r = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}[E_{N_k}[P^r(k)]] \quad (12)$$

最小, 则称该FRHE为确定阶数 r 下的最优FRHE.

对每个 $i \in N_n$, 定义 A -迭代式和 $\mathcal{R}$ -迭代式分别为:

$$1) \quad P_i^r(k) = A_{K_i^r}(M_i^r(k)),$$

$$M_i^r(k) = \sum_{j=1}^{N_n} p_{ij}^*(AP_j^r(k-1)A^T + BQB^T).$$

其中 $\{K_i^r\}$ 为给定的可选增益集合,

$$A_{K_i^r}(M) \doteq (I - K_i^r\gamma(i)C)M(I - K_i^r\gamma(i)C)^T + K_i^rVK_i^{rT},$$

且由式(10)可知, 当 $i \leq 2^{r-1}$ 时, $\gamma(i) = 1$, 否则 $\gamma(i) = 0$.

$$2) \quad P_i^r(k) = \mathfrak{R}_i(M_i^r(k)),$$

$$M_i^r(k) = \sum_{j=1}^{N_n} p_{ij}^*[AP_j^r(k-1)A^T + BQB^T].$$

其中

$$\mathfrak{R}_i(M) \doteq M - M\gamma(i)C^T \times (\gamma(i)CM\gamma(i)C^T + V)^{-1}\gamma(i)CM.$$

关于A-迭代式和 $\mathfrak{R}$ -迭代式给出下列引理^[9].

引理 1 设 (A, B) 可控, 存在稳定FRHE的充分必要条件是对 $\mathfrak{R}$ -迭代式的初始条件 $P_i^r(0) = 0 \forall i \in N_n$, $\mathfrak{R}$ -迭代式都收敛.

引理 2 设 (A, B) 可控, 如果FRHE稳定, 则极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}[E[P^r(k)]]$ 存在.

引理 3 设 $\{\tilde{P}_i^r(k)\}$ 和 $\{P_i^r(k)\}$ 分别为给定增益集合下初始条件分别为 $P_i^r(0) \geq 0$ 及 $P_i^r(0) = 0 (\forall i \in N_n)$ 的A-迭代式的估计误差, 则 $\tilde{P}_i^r(k) \geq P_i^r(k), \forall i \in N_n, \forall k$.

引理 4 设 (A, B) 可控, 且给定FRHE的增益集合, 则A-迭代式的某一固定点 $\{\bar{P}_i\}$, 对所有的 $i \in N_n$ 满足 $\bar{P}_i > 0$.

定理 1 给定被控对象、马尔可夫链到达过程和FRHE的阶 r , 设具有初始条件 $P_i^r(0) = 0, \forall i \in N_n$ 的 $\mathfrak{R}$ -迭代式收敛到 $\{P_i^{ss}\}$, 及相应的 $\{M_i^{ss}\}$, 如下选择增益:

$$K_i^r \doteq M_i^{ss}\gamma(i)C^T(\gamma(i)CM_i^{ss}\gamma(i)C_g^T + V)^{-1}. \quad (13)$$

则基于该增益集合的FRHE稳定, 且在损失 J_∞^r 的意义下为确定阶数下的最优FRHE, 即对任意其它的增益集合 $\{\tilde{K}^r\}$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}_j(k) \geq P_j^{ss} \forall j \in N_n$.

证 已知具有初始条件 $P_i^r(0) = 0, \forall i \in N_n$ 的 $\mathfrak{R}$ -迭代式收敛到有限值 P_i^{ss} 及相应的 M_i^{ss} , 由于 $\mathfrak{R}$ -迭代式为单调递增的半正定序列^[9], 可知 $\{P_i^{ss}\}$ 为 $\mathfrak{R}$ -迭代式的固定点, 且都为半正定矩阵. 设如式(13)选择增益集合, 由引理4知 $\{P_i^{ss}\}$ 为A-迭代式的固定点且为正定矩阵.

设 $\{\tilde{P}_i^r(k)\}$ 为给定初始条件满足

$$1 \leq \tilde{P}_i^r(0) \leq P_i^{ss}, \quad \forall i \in N_n$$

的A-迭代式中的估计误差, 则对任意 $i \in N_n$, 由引理3得 $P_i^r(k) \leq \tilde{P}_i^r(k)$, 另外由于A-迭代式具有有序性^[9], 则得不等式 $\tilde{P}_i^r(k) \leq P_i^{ss}$. 因此A-迭代式存在上下界, 即

$$P_i^r(k) \leq \tilde{P}_i^r(k) \leq P_i^{ss}.$$

由假设条件知 $\lim_{k \rightarrow \infty} P_j^r(k) = P_j^{ss}$, 因此

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}_j^r(k) = P_j^{ss},$$

从而基于该增益集合(13)的FRHE是稳定的.

由定义2及式(11)可得基于稳定增益集合 $\{K_i^r\}$ 的FRHE的最优, 即对任意其它的增益集合 $\{\tilde{K}^r\}$, 都有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{P}_j(k) \geq P_j^{ss}, \forall j \in N_n$.

3.3 具有 Markovian 时延与丢包的最优 FRHE (Optimal FRHE with Markovian time-delay and packets loss)

定义 3 给定Markovian数据包到达模型及定理1的确定阶数下的最优FRHE增益设计方法, 选择尽可能小FRHE的阶数 $\bar{r}$, 使得

$$J_\infty^{\bar{r}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \text{tr}[E[P^{\bar{r}}(k)]] \quad (14)$$

最小, 则称该FRHE为最优FRHE.

由前述可知, 增加FRHE的阶数 r , 即增加了可选增益的数量, 如果令FRHE的阶数 $r \rightarrow \infty$, 则 $2^r \rightarrow \infty$, 此时FRHE需要实时计算每一个增益 K_k^r , 退化为标准的时变线性滤波器, 因此 r 无限增加将大大加重计算的强度, 也就失去了设计FRHE的意义. 同时, 由于时延有界, 阶数 r 无限增加, 并不总能提高FRHE的性能. 下面以定理的形式给最优FRHE所需阶数的最小值. 首先不加证明地给出下列引理:

引理 5 为式(1)的线性离散时间系统设计FRHE, 考虑(11)的性能指标, 当时延无界时, 阶数越高 J_∞^r 越小. 即分别设计 r_1 和 r_2 阶的FRHE, 如果 $r_1 \geq r_2$, 则 $J_\infty^{r_1} \leq J_\infty^{r_2}$.

定理 2 考虑式(1)的线性离散时间系统, 其中 $R > 0$, 式(2)的到达过程及式(4)的Markovian时延模型, 在估计器端设置适当长度 N 的缓存器($N > M + 1$), 则满足定义3的最优FRHE阶数为:

$$r' = \tau_{\max} + 1 = M + 1. \quad (15)$$

证 设估计器端缓存器的长度 $N > M + 1$, 当 $r' = \tau_{\max} + 1 = M + 1$ 时, r' 个数据的到达序列可记为 $(\gamma_{k-r'+1}^t, \gamma_{k-r'+2}^t, \dots, \gamma_k^t)$, 增益数量 $n = 2^{r'}$.

下面需要证明阶数为 r' 的FRHE最优, 即对 $\forall \tilde{r} \neq r$ 有 $J_{\infty}^{r'} \leq J_{\infty}^{\tilde{r}}$.

1) 如果 $\tilde{r} \leq r'$, 即 $\tilde{r} \leq M+1$, 由引理5, 显然 $J_{\infty}^{r'} \leq J_{\infty}^{\tilde{r}}$.

2) 如果 $\tilde{r} > r' + 1$, 则数据到达序列可记为 $(\gamma_{k-\tilde{r}+1}^t, \dots, \gamma_{k-r'}^t, \gamma_{k-r'+1}^t, \gamma_{k-r'+2}^t, \dots, \gamma_k^t)$, 由于数据包的最大时延为 M , 因此 $\gamma_k^t (k < t-M)$ 或者为1(接收)或者为0(丢失), 均已确定, 不再发生变化, 即序列 $(\gamma_{k-\tilde{r}+1}^t, \dots, \gamma_{k-r'}^t)$ 的每个元素确定已知, 因此增益的数量仍由 $\gamma_k^t (k \geq t-M)$ 的取值确定, 即增益数量仍然为 $n = 2^r$, 所以 $J_{\infty}^{r'} = J_{\infty}^{\tilde{r}}$.

综上所述对所有的 $\tilde{r} \neq r'$ 都有 $J_{\infty}^{r'} \leq J_{\infty}^{\tilde{r}}$. 所以, 最优FRHE的阶数 $r' = M+1$.

定理3 考虑线性离散时间系统(1), 其中 $R > 0$. 同时考虑到达过程(2), Markovian时延模型(4), 及FRHE阶数(15), 则最优FRHE策略为:

1) 设具有初始条件 $P_i^r(0) = 0 \forall i \in N_n$ 的 $\mathfrak{R}$ -迭代式收敛到 $\{P_i^{ss}\}$, 及相应的 $\{M_i^{ss}\}$, 预先计算的可供选择的增益集合为

$$K_{n(k)}^t \in K^{r'} = \{K_1^{r'}, \dots, K_n^{r'}\}: \\ K_i^{r'} = M_i^{ss} \gamma(i) C^T (\gamma(i) C M_i^{ss} \gamma(i) C_{g(i)}^T + V)^{-1}. \quad (16)$$

2) 最优FRHEs估计器中 $\hat{x}(t|t) = \hat{x}^t(t|t)$ 的计算如下:

$$\hat{x}^t(0|0) = \bar{x}_0, M^t(1) = P_0. \quad (17)$$

$$\hat{x}^t(k|k) = A\hat{x}^t(k-1|k-1) + \gamma_k^t K_{n(k)}^t \times \\ (y^t(k) - CA\hat{x}^t(k-1|k-1)), \quad (18) \\ k = 1, \dots, N.$$

3) 当系统(1)的最大时延为 $\tau_{\max} = M$ 时, 设置估计器端缓存器的长度 $N = M+2$, 最优FRHE估计器中 $\hat{x}(t|t) = \hat{x}^t(t|t)$ 的计算如下:

$$\hat{x}^t(t-N|t-N) = \hat{x}^{t-1}(t-N|t-N), t > N. \quad (19)$$

等式(18) $k = t-N+1, \dots, t$.

证 1) 由定理1可知该增益集合是确定阶数下的最优FRHE, 又由定理4知最优FRHE的阶数为 r' . 因此(16)为最优FRHE增益集合.

2) 由于在时刻 t , 估计器端缓存中的信息可表示为时变线性随机系统(8), 因此该时变最优FRHEs计算式应为:

$$\hat{x}^t(k|k) = A\hat{x}^t(k-1|k-1) + K_{n(k)}^t \times \\ (y^t(k) - C^t(k)A\hat{x}^t(k-1|k-1)), \\ k = 1, \dots, N, \\ \hat{x}^t(0|0) = \bar{x}_0, M^t(1) = P_0.$$

把 $C^t(k) = \gamma_k^t C$ 代入上式, 经过简化整理即得式(18).

3) 当 $t > N$ 时, 由于系统(1)的最大时延为 $\tau_{\max} = M$, 对 $\forall t \geq k+n$, 有 $\hat{x}^t(k|k) = \hat{x}^{t-1}(k|k)$. 当 $k = t-N$ 时, $\hat{x}^t(t-N|t-N) = \hat{x}^{t-1}(t-N|t-N)$ 成立. 因此没有必要在每一个时间步 t 都从 $k=1$ 开始进行递归计算. 可按式(19)充分利用前一个时间步 $t-1$ 时的值 $\hat{x}^{t-1}(t-N|t-N)$, 而对最近的 N 次递归可按式(18)进行计算.

由定理3可以看出, 如果允许无限时延, 即 $M \rightarrow \infty$, 为了得到最优FRHEs, 需要在估计器端设置无限缓存, 且每一个时间步 t 都需要基于缓存器中的数值, 从 $k=1$ 开始按式(17)(18)进行递归计算(如图4(a)). 由于控制系统的实时计算要求, 它的计算复杂度和强度很难满足实时控制的需要. 而当所有数据包的时延不大于 M 时, 缓存器中 t 时刻的到达序列 $(y^t(1), \dots, y^t(t-M-1))$ 与 $t-1$ 时刻的到达序列 $(y^{t-1}(1), \dots, y^{t-1}(t-M-1))$ 不会发生任何变化, 因此, t 时刻缓存器中只需要存储 $t-1$ 时刻 $t-M-1$ 步的递归计算 $\hat{x}^{t-1}(t-M-1|t-M-1)$ 的值(如图4(b)所示).

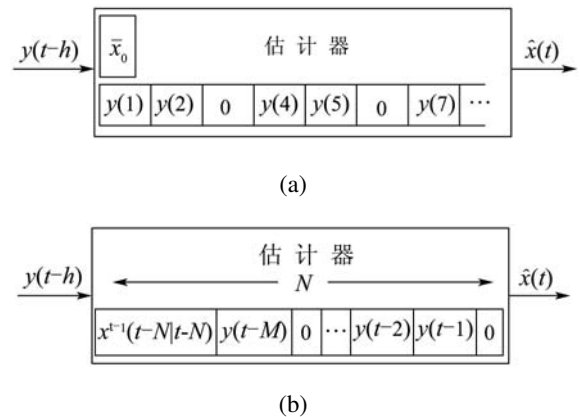


图4 具有无限长度和有限长度缓存器的最优FRHE

Fig. 4 Optimal FRHE with infinite and finite memory buffer

4 仿真实例与误差分析(Simulation examples and error analysis)

对系统(1), 设 A 、 B 、 C 及 w 、 v 、 M_0 分别为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0],$$

$$w = 0.1, v = 1.0, M_0 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

设 $\tau_{\max} = 2$, 则 $r' = 3$, $N = M+2$. 令在估计器端缓存里的数据到达过程 $m_{10} = 0.3, m_{00} = 0.5$, 则 $m_{11} = 0.7, m_{01} = 0.5$.

这里分别对阶数 $r = 1$, $r = 2$ 和 $r = 3$ 的最优FRHE增益与TVKE增益结果进行对比(如图5所示).

由图5可以看出随着 r 的增加, 可选增益的值越来越接近于实时增益的值; 对每一个确定的阶数 r , 可选增益的值位于实时增益的“重心”。

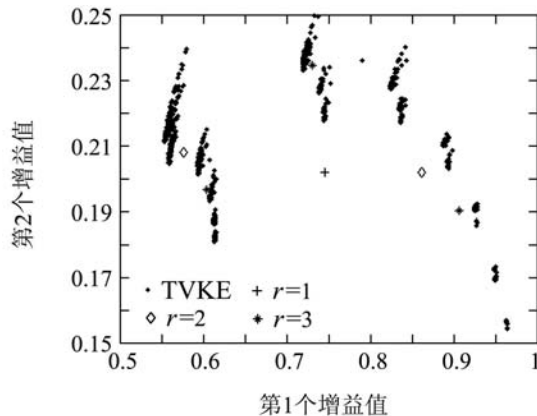


图5 FRHE和TVKE增益值对比

Fig. 5 FLHE gains compared with gains of TVKE

基于式(11)给出的损失指标, 对于不同阶数的FRHE分别有:

$$J_{\infty}^r = \begin{cases} 3.6696, & r = 1; \\ 3.5455, & r = 2; \\ 3.5133, & r = 3. \end{cases} \quad (20)$$

由式(20)可以看出, 随着 r 的递增, 损失指标 J_{∞}^r 递减, 由于考虑最大时延为2的马尔可失时延, 这里的最优FRHE的阶数为3, 且基于本文估计策略, 提高该阶数并不能减少 J_{∞}^r 的值. 如果允许更大的时延, 则可相应增加阶数的值, 从而使 J_{∞}^r 越来越少, 更接近于时变卡尔曼滤波器的损失指标.

FRHE策略虽然是次最优, 相对于文献 [11]中的时变Kalman估计器(TVKE), 却能提供便宜的计算. 根据估计器的阶数, FLHE策略的可选增益可以离线设计, 增益数量与阶数有关而与采样次数无关. 而TVKE策略的每一步计算都需要对缓存器中的数值进行递归计算, 计算次数随采样次数的增加及缓存长度的增加而增加. 对本文中的4000次采样, 表1分别给出FLHE与TVKE所需的增益计算次数.

表1 FLHE与TVKE的增益计算次数

Table 1 The numbers of computation for FLHE and TVKE

估计策略	TVKE	FLHE		
		$r = 1$	$r = 2$	$r = 3$
增益计算次数	11996	2	4	8

5 结论(Conclusion)

本文基于跳变线性估计器、有限缓存的思想对估计器性能进行了最优化的设计与分析, 给出阶数最优FRHEs的状态估计策略.

本文所提的估计策略具有理论与应用的双重意义. 从应用的角度来看, 相对于TVKE的高强度递归计算, FLHE为处理具有时延与丢包网络提供了便宜的计算方式, 并能帮助确定估计误差性能及缓存需求. 从理论的角度来看, TVKE使用的估计误差期望与一个先验未知的丢失/接收序列相关, 而FLHEs的期望性能可以使用确定的算法来计算, 并能为TVKE性能提供一个界限.

将来的研究方向之一是把当前的工作扩展到更复杂的系统中, 如不确定系统或非线性系统, 也可延伸到控制器的设计中去. 另外, 还可探讨把这些方法应用到基于无线传感器网络的实时控制系统中.

参考文献(References):

- [1] ZHANG H S, FENG G, DUAN G R. H_{∞} filtering for multi-time-delay measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(5): 1681 – 1688.
- [2] ZHANG H S, LU X, CHENG D Z. Optimal estimation for continuous-time systems with delayed measurements[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2006, 51(5): 823 – 827.
- [3] WANG Z D, HO W C D, LIU X H. Robust filtering under randomly varying sensor delay with variance constraints[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2004, 51(6): 320 – 326.
- [4] PHAT V N, SAVKIN A V. Robust state estimation for a class of uncertain time-delay systems[J]. *System & Control Letter*, 2002, 47(3): 237 – 245.
- [5] WANG Z D, YANG F W, HO W C D. Robust finite-horizon filtering for stochastic system with missing measurements[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(6): 437 – 440.
- [6] WANG Z D, YANG F W, HO W C D. Robust finite-horizon filtering for stochastic system with missing measurements[J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2005, 12(6): 437 – 440.
- [7] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANCESCHETTI M. Kalman filtering with intermittent observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.
- [8] 王武, 杨富文, 詹耀清. 测量数据丢失的随机不确定离散系统的鲁棒 H_2 状态估计[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(3): 439 – 445. (WANG Wu, YANG Fuwen, ZHAN Yaoqing. Robust H-two state estimation for stochastic uncertain discrete-time system with missing measurements[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 439 – 445.)
- [9] SMITH S C, SEILER P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2163 – 2171.
- [10] SCHENATO L. Kalman filtering for networked control systems with random delay and packet loss[C] // *The 17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems*. Japan: IEEE Press, 2006: 1509 – 1517.
- [11] SCHENATO L. Optimal estimation in networked control systems subject to random delay and packet loss[C] // *Proceedings of the 45th Conference on Decision & Control*. United States: IEEE Press, 2006: 5615 – 5620.

作者简介:

王宝凤 (1980—), 女, 博士生, 从事网络化控制系统中状态估计等相关问题的研究, E-mail: wbfmdm@163.com;

郭戈 (1972—), 男, 教授, 博士生导师, 首批国家新世纪人才, 从事网络化控制系统分析、移动机器人、智能车辆等的研究, E-mail: geguo@yeah.net.