文章编号: 1000−8152(2009)09−0937−05

极小极大加系统(F, G, H)的输出反馈镇定

魏红昀[1,2], 陈文德[3], 王永骥[4]

(1. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074; 2. 中南民族大学 计算机科学学院, 湖北 武汉 430074;
3. 中国科学院数学与系统科学研究院 系统控制重点实验室, 北京 100190;
4. 华中科技大学 控制科学与工程系, 湖北 武汉 430074)

摘要: 研究了一般化非自治非线性极小极大加系统的输出反馈镇定问题. 首先, 提出了闭环系统单极大射影系统表达式. 其次, 研究指出闭环单极大射影子系统存在严格的颜色匹配关系. 接着, 针对颜色匹配的复杂情况, 提出新的着色图构造. 以往对闭环单极大射影子系统中出现的新增圈研究, 仅涉及含有一条反馈弧的圈, 本文指出新增圈中可能包含由多条反馈弧构成的圈. 最后, 根据新着色图和新增圈特点得到了系统输出反馈镇定的一个充分条件.

关键词: 极小极大加函数; 能达性; 能观性; 着色图; 输出反馈镇定

中图分类号: O231 **文献标识码**: A

Output-feedback stabilization for min-max-plus systems (F, G, H)

WEI Hong-yun[1,2], CHEN Wen-de[3], WANG Yong-ji[4]

(1. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China;
2. College of Computer Science, South-Central University for Nationalities, Wuhan Hubei 430074, China;
3. Key Laboratory of Systems and Control, Academy of Mathematics and Systems Science,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
4. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: The problem of output-feedback stabilization for a general nonlinear, non-autonomous min-max-plus system is studied; new results of nonlinear discrete event dynamic systems are described. First, the max-plus projection system representation for a closed-loop system with min-max-plus output feedback is proposed. Second, strict color-match requirements for the closed-loop max-plus projection system are pointed out. Then, based on the complexity of the color-match requirements, a new coloring graph structure is presented. Previous researches only considered new circuits relating to one feedback edge in the closed-loop max-plus projection system; whereas in this paper, it is pointed out that more feedback edges can be included in the new circuits. Finally, a sufficient condition for output feedback stabilization of min-max-plus system is derived according to the new coloring graph and new circuits characteristics.

Key words: min-max-plus function; reachability; observability; coloring graph; output-feedback stabilization

1 引言(Introduction)

极小极大加系统可以描述一类通信网络、计算机网络、工业制造系统. 近年来, 极小极大加系统有了一系列研究成果[1~13], 尤其是预测控制和反馈控制问题引起了人们的关注[1~4]. 施加反馈使非自治极小极大加系统稳定, 即所谓反馈镇定, 是一个有重要实用价值的问题, 尤其是输出反馈镇定问题. Cohen等人研究了非自治单极大系统的镇定[5], 文献[6]给出了非自治极小极大加系统(F, B, C)状态反馈镇定的一个充分条件, 文献[7]给出了系统(F, B, C)状态反馈镇定的一个充分必要条件, 文献[8]给出了系统(F, G, C) 状态反馈镇定的一个充分条件. 文献[9]研究了系统(F, G, C)输出反馈的镇定问题, 给出了一个充分条件, 由于该系统的输出函数是单极大函数, 所以在着色图中仅体现为一种颜色.

本文研究系统(F, G, H)的输出反馈镇定问题, 其输出函数是极小极大加函数, 在着色图中由多种颜色体现, 较文献[9]更为复杂. 由此, 带来系统的单极大射影子系统如何建立、输出反馈稳定性分析难度

收稿日期: 2008−07−22; 收修改稿日期: 2009−01−07.

加大等一系列问题. 本文研究指出: (F,G,H)闭环单极大射影子系统存在严格的颜色匹配关系. 针对颜色匹配要求, 提出新的闭环单极大射影子系统着色图. 该着色图较好地避免了某些输出矩阵元素容易构成无效圈的问题. 最后, 给出了系统(F,G,H)输出反馈镇定的一个充分条件.

2 基本定义(Basic definitions)

$\mathbb{R}$表示实数集, $\mathbb{R}^n$表示R上n维列向量集. 令$\bar{R}=\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$; $\forall a,b\in\bar{R}$, $a\vee b:=\max\{a,b\}$, $a\wedge b:=\min\{a,b\}$; $D:=(\overline{R},\vee,+)$. D称为极大代数. $-\infty$为D上的零元. 假设$x_1,x_2,\cdots$是变量, $a\in\mathbb{R}$是参量, 一个极小极大加式是有限个$a+x_i$经过有限次$\vee$或$\wedge$运算构成的式子. 仅含$\vee$的极小极大加式称为单极大式. n维极小极大加函数是$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$的函数, 其中每个分支是$\mathbb{R}^n$到R的关于n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的极小极大加式. 习惯上, 记n维极小极大加函数为

$$F(x)=[F_1(x)\ F_2(x)\ \cdots F_n(x)]^{\mathrm{T}},$$

其中$x=[x_1\ x_2\ \cdots x_n]^{\mathrm{T}}$. 如果$F_i(x),1\leqslant i\leqslant n$都是单极大式, 则$F(x)$称为单极大函数. Gunawardena给出极小极大加函数表达式[10]:

$$F(x)=\bigwedge_{r\in I}(A_r x). \tag{1}$$

其中: $A_r\in\mathbb{D}^{n\times n}$是$F(x)$的单极大射影, $A_r x$为D上的矩阵乘法运算: $(A_r x)_i=\bigvee_{1\leqslant j\leqslant n}a_{ij}(r)+x_j, 1\leqslant i\leqslant n$. I是$F(x)$所有单极大射影的指标集合. 令$F^k(x)=F(F^{k-1}(x))$, 其中$F^0(x)=x$.

定义 1 设$F(x)$是一个n维极小极大加函数, 则极限向量$\lim\limits_{k\to\infty}F^k(x)/k$称为$F(x)$的周期时间(向量), 记为: $\chi(F)=[\chi_1(F)\ \chi_2(F)\ \cdots\ \chi_n(F)]^{\mathrm{T}}$.

一类非自治非线性极小极大加系统:

$$\begin{cases}x(k+1)=F(x(k))\vee G(u(k)),\\ y(k)=Cx(k).\end{cases} \tag{2}$$

其中: $F(x)$同上, $G(u)=\bigwedge_{s\in J}(B_s u)$, $B_s\in\mathbb{D}^{n\times p}$, $C\in\mathbb{D}^{p\times n}$, $x(k)\in\mathbb{R}^n$, $u(k)\in\mathbb{R}^q$, $y(k)\in\mathbb{R}^p$. 此系统简记为(F,G,C). 文[8]研究了(F,G,C)的状态反馈镇定问题, 在国际上引起了注意.

而更为一般的、具有更强非线性的极小极大加系统是

$$\begin{cases}x(k+1)=F(x(k))\vee G(u(k)),\\ y(k)=H(x(k)).\end{cases} \tag{3}$$

其中: $H(x)=\bigwedge_{t\in T}(C_t x)$, $C_t\in D^{p\times n}$, 其他同(F,G,C). 此系统简记为(F,G,H). 异步数字电路中两个时间信号经过"与"门、"或"门时, 分别相当于做极大、极小运算; 因而一般化模型(F,G,H)可以描述带输入、输出的非自治异步数字电路. 本文研究该系统的输出反馈镇定问题. 为讨论方便, 记此系统为S, 也称为开环系统.

系统S可以用图论的方法来描述. 设$a_{ij}(r)$表示A_r的第i行、第j列元; $b_{ij}(s)$表示B_s的第i行、第j列元; $c_{ij}(t)$表示C_t的第i行、第j列元. 图$g(A_r)$由结点$x_1,\cdots,x_n$构成, 当$a_{ij}(r)\neq-\infty$时, 点x_j到点x_i有权为$a_{ij}(r)$且着有第r种颜色的弧; 当$a_{ij}(r)=-\infty$时, 点x_j到点x_i没有着第r种颜色的弧. 在$g(A_r)$基础上, 加入输入结点$u_1,\cdots,u_q$和输出结点$y_1,\cdots,y_p$, 构成图$g(S_{(r,s,t)})$. 当$b_{ij}(s)\neq-\infty$, 点u_j到点x_i有权为$b_{ij}(s)$且着有第s种颜色的弧; 当$b_{ij}(s)=-\infty$时, 点u_j到点x_i没有第s种颜色的弧; 当$c_{ij}(t)\neq-\infty$, 点x_j到点y_i有权为$c_{ij}(t)$且着有第t种颜色的弧; 当$c_{ij}(t)=-\infty$, 点x_j到点y_i没有第t种颜色的弧[11].

计算机硬件中含有复杂的异步数字电路, 当它们用系统(F,G,H)描述时, 式(3)及图论工具说明了多颜色的重要作用.

定义 2 如果在$g(S_{(r,s,t)})$中从一个输入结点到x_i有路, 则x_i称为(r,s)–能达状态分量. 如果对所有$(r,s)\in I\times J$($I\times J$ 是I,J的笛卡儿积), x_i是(r,s)–能达的, 则称x_i能达. 如果所有的$x_i,1\leqslant i\leqslant n$能达, 则称系统$S$能达. 如果在$g(S_{(r,s,t)})$中存在$x_i$到某输出结点的路, 则称$x_i$是$(r,t)$–能观状态分量. 如果对所有$(r,t)\in I\times T$, x_i 是(r,t)–能观的, 则称x_i能观. 如果所有的$x_i,1\leqslant i\leqslant n$能观, 则称系统$S$能观. 如果对任意$(r,t)\in I\times J$, x_i都是不能观的, 则称x_i全色不能观.

定义 3 设A是D上一个n阶矩阵, 定义$\mu(A):=[\mu_1(A)\ \mu_2(A)\ \cdots\mu_n(A)]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$, 称$\mu(A)$为矩阵$A$的周期时间. 其中$\mu_i(A)=\max\{w(c)/l(c)|c$是$g(A)$中到点$x_i$有路的圈$\}$, $w(c)$表示$g(A)$中圈c的权, $l(c)$表示$g(A)$中圈c的长度[11]. 也称c是点x_i的上游圈.

引理 1 $F(x)=\bigwedge_{r\in I}(A_r x)$的周期时间$\chi(F)$存在, 且$\chi(F)=\bigwedge_{r\in I}\mu(A_r)$[12].

设对系统S施加输出反馈$u(k)=K(y(k))$(允许$K_i(y)=-\infty$). 其中$K(y)=\bigwedge_{d\in N}K_d y$, $K_d\in\mathbb{D}^{q\times p}$. K_d是$K(y)$的单极大射影, N是$K(y)$的所有单极大射影的指标集合. 则系统变成闭环系统:

$$\begin{cases}x(k+1)=\bigwedge\limits_{(r,s)\in I\times J}(A_r x(k)\vee B_s(K(y(k)))),\\ y(k)=H(x(k))=\bigwedge\limits_{t\in T}C_t x(k).\end{cases} \tag{4}$$

该系统简记为$S(K)$. 易知$S(K)$是极小极大加函数.

3 输出反馈镇定充分条件(Sufficient condition for output feedback stabilization)

在讨论之前, 先介绍$\odot$运算[8].

定义 4　设$K_{d_i}, 1 \leqslant i \leqslant n$是$K(y)$的任意$n$个单极大射影矩阵, 则矩阵$K_l = [K_{d_1}^{\mathrm{T}}\ K_{d_2}^{\mathrm{T}}\ \cdots K_{d_n}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$, $l \in L$称作$K(y)$的单极大射影直积. L是$K(y)$的单极大射影直积的所有单极大射影指标集, $|L|$等于从N中可重复地任取n个的排列数, 即$|N|^n$.

设$C_{t_i}, 1 \leqslant i \leqslant n$是$H(x)$的任意$n$个单极大射影矩阵, 则矩阵$C_e = [C_{t_1}^{\mathrm{T}}\ C_{t_2}^{\mathrm{T}}\ \cdots C_{t_n}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}, e \in E$ 是$H(x)$的单极大射影直积. E是$H(x)$的单极大射影直积的所有单极大射影指标集, 它等于从T中可重复地任取n个的排列数, 即$|T|^n$.

定义 5　令$B_s = [B_s^{1^{\mathrm{T}}}\ B_s^{2^{\mathrm{T}}} \cdots B_s^{n^{\mathrm{T}}}]^{\mathrm{T}}$, 其中$B_s^i, 1 \leqslant i \leqslant n$是$B_s$的第$i$行. $\odot$运算定义为

$$B_s \odot K_l = [[B_s^1 K_{d_1}]^{\mathrm{T}} [B_s^2 K_{d_2}]^{\mathrm{T}} \cdots [B_s^n K_{d_n}]^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in D^{n\times q}. \quad (5)$$

引理 2　$B_s K(y) = \bigwedge_{l\in L} (B_s \odot K_l) y$, 其中$L$ 是$K(y)$的单极大射影直积的所有单极大射影指标集[13].

记$B_s \odot K_l = Q_{sl}$, 则$(B_s \odot K_l) y = Q_{sl} H(x)$.

引理 3　$B_s K(y) = \bigwedge_{(e,l)\in E\times L} ((B_s \odot K_l) \odot C_e) x$. 其中$L$是$K(y)$的单极大射影直积的所有单极大射影指标集, E是$H(x)$的单极大射影直积的所有单极大射影指标集.

证　由引理2, 有

$$\begin{aligned} B_s K(y) &= \bigwedge_{l\in L} (B_s \odot K_l) y = \bigwedge_{l\in L} Q_{sl} H(x) = \\ & \bigwedge_{l\in L} [\bigwedge_{e\in E} (Q_{sl} \odot C_e) x] = \\ & \bigwedge_{(e,l)\in E\times L} ((B_s \odot K_l) \odot C_e) x. \end{aligned} \quad (6)$$

证毕.

因此, 闭环系统可写成

$$\begin{aligned} x(k+1) = & \bigwedge_{(r,s,e,l)\in I\times J\times E\times L} (A_r \vee ((B_s \odot K_l) \odot C_e)) x = \\ & \bigwedge_{(r,z)\in I\times Z} (A_r \vee W_z) x. \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} W_z &= (B_s \odot K_l) \odot C_e = \\ & [[B_s^1 K_{d_1} C_{t_1}]^{\mathrm{T}}\ [B_s^2 K_{d_2} C_{t_2}]^{\mathrm{T}} \cdots [B_s^n K_{d_n} C_{t_n}]^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \quad (8)$$

Z是所有W_z的指标集, 它等于$J \times L \times E$. $(W_z)_{ij} = \bigvee_{1\leqslant m\leqslant p} (\bigvee_{1\leqslant v\leqslant q} (b_{iv}(s) + k_{vm}(d_i)) + c_{mj}(t_i))$.　W_z的第i行由$B_s^i K_{d_i} C_{t_i}$构成, B_s^i与K_{d_i}和C_{t_i}之间有指标匹配要求, 即d_i、t_i由B_s的行标决定. 所以, z对应一个(s,l,e)的组合集, 其中的l决定一组$(K_{d_1}, \cdots, K_{d_n})$, e决定了一组$(C_{t_1}, \cdots, C_{t_n})$.

$(A_r \vee W_z)$称为$S(K)$的单极大射影, 相应的系统$x(k+1) = (A_r \vee W_z) x$称作$S(K)$的闭环单极大射影子系统, 记为$S_{(r,z)}(K)$.

由引理1、引理2和引理3可得到:

定理 1　$\chi(S(K)) = \bigwedge_{(r,z)\in I\times Z} \mu(A_r \vee W_z)$.

由式(8)知, 系统(F,G,H)闭环单极大射影子系统有严格的颜色匹配关系. 下面根据颜色匹配要求, 提出新的闭环系统单极大射影图.

为构造闭环系统单极大射影图, 先提出复杂有色路的简化方法:

当$b_{iv}(s) \neq -\infty$时, 点u_v到点x_i有权为$b_{iv}(s)$且着有第s种颜色的弧; 当$b_{iv}(s) = -\infty$, 点u_v到点x_i没有着第s种颜色的弧; 当$c_{mj}(t_i) \neq -\infty$, 点x_j到点y_m有权为$c_{mj}(t_i)$且着有第t_i种颜色的弧; 当$c_{mj}(t_i) = -\infty$, 点x_j到点y_m没有第t_i种颜色的弧; 当$k_{vm}(d_i) \neq -\infty$, 点y_m到点u_v有权为$k_{vm}(d_i)$且着有第d_i种颜色的弧; 当$k_{vm}(d_i) = -\infty$, 点y_m到点u_v没有第d_i种颜色的弧. 若上述$b_{iv}(s) \neq -\infty$, $c_{mj}(t_i) \neq -\infty$, $k_{vm}(d_i) \neq -\infty$, $1 \leqslant v \leqslant q$, $1 \leqslant m \leqslant p$ 同时存在(其中颜色t_i, d_i由$b_{iv}(s)$下标i决定), 则构成一条从点x_j到点x_i的长度为3的有色路. 这些路中最大的权记为$(W_z)_{ij}$. 由于每条有色路的长度均为3, 为简便起见, 将这些路简化为从点x_j到点x_i的一条权为$(W_z)_{ij}$着有z种颜色的弧(颜色z对应一个(s,l,e)组合集, 该处的(s,t_i,d_i)属于颜色z的(s,l,e)组合集). 值得注意:构成点x_j到点x_i的路中只包含$b_{i\cdot}(s)$, $c_{\cdot j}(t_i)$构成的弧, 而并非B_s, C_{t_i}中所有的弧.

由以上简化方法, 系统的闭环单极大射影图构造如下: 若$(W_z)_{ij} = \bigvee_{1\leqslant m\leqslant p} (\bigvee_{1\leqslant v\leqslant q} (b_{iv}(s) + k_{vm}(d_i)) + c_{mj}(t_i)) \neq -\infty$, 则画出点$x_j$到点$x_i$权为$(W_z)_{ij}$且着有第$z$种颜色的弧. 该图记为$g(W_z)$.

在$g(A_r)$图基础上叠加$g(W_z)$便得到图$g(A_r \vee W_z)$, 定义该图中的颜色为(r,z)色, $g(A_r \vee W_z)$也记作$g(S_{(r,z)}(K_l))$. 注意到, 图$g(A_r \vee W_z)$中只含有结点x_1, $x_2, \cdots, x_n$, 当$(A_r)_{ij} \neq -\infty$时, 有x_j到x_i的(r,z)色弧; 或者当$(W_z)_{ij} \neq -\infty$时, 有x_j到x_i的(r,z)色弧.

定义 6　如果在$g(A_r \vee W_z)$中, x_i到x_j有路, 则x_j称为从$x_i - (r,z)$能达; 如果对所有$(r,z) \in I \times Z$, x_j是从$x_i - (r,z)$能达, 则x_j是从x_i能达. 如果x_i是从x_j能达, x_j是从x_i能达, 则称x_j与x_i是$S(K)$中的强连通状态分量. 根据强连通关系可以将系统$S(K)$划分为若干个强连通块.

为讨论方便, 本文后续讨论都采用所有元素均等于k的单极大输出反馈阵K(单极大输出反馈是极小极大加输出反馈的一种特殊形式).

系统加入反馈K后, 可能增加以下圈:

1) 若$(W_z)_{ii} \neq -\infty$, 则增加$x_i \to x_i$的圈, 该圈周期

时间与一个k有关;

2) 由θ个$(W_z)_{j_\alpha j_\beta} \neq -\infty (1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n)$, 且在$g(A_r)$中存在的若干个$x_{j_\eta} \to x_{j_\omega}$ $(1 \leqslant \eta, \omega \leqslant n)$的路, 共同构成经过$x_i$的圈, 该圈包含$\theta$个反馈弧，其周期时间由$\theta$个$k$决定.

在复杂异步数字电路设计过程中, 添两根线可能相当于系统(F, G, H)中引入两条反馈弧, 从而构成一个新增的含多条反馈弧的圈, 起到影响$\chi(S(K))$的作用, 这点被以前的文献忽视.

引理 4 $\chi(S(K))$是关于k的单调递增连续函数, 且以$\chi(F)$为下界.

证 显然, $\chi(S(K))$与新增圈周期时间有关. 如前所述, 系统加入反馈后, 可能增加的圈都经过x_i, 即是x_i的上游圈. 这些圈的周期时间形如: $f(k) = (\theta k + b)/l$. 其中θ是圈中反馈弧的个数, b是一个常数, l是圈的长度. 由于$\theta \geqslant 1, l \geqslant 1$, 所以$f'(k) = \theta/l > 0$,即$f(k)$关于$k$单调递增.显然,$f(k)$是$k$的连续函数. 因此, $\chi(S(K))$是关于k单调递增连续函数. 取$k = -\infty$, 即K不增加任何圈, 则$\chi(S(K)) = \chi(F)$. 由$\chi(S(K))$关于k的单调性, 可知$\chi(S(K)) \geqslant \chi(F), \forall k$.

引理 5 令$\chi_i(S(K)), 1 \leqslant i \leqslant n$是$\chi(S(K))$的第$i$个分量, 如果$x_i$和$x_j$属于$S(K)$的同一个强连通块, 则$\chi_i(S(K)) = \chi_j(S(K))$.

证 令$(A_r \vee W_z)$是$S(K)$的一个单极大射影, 假设$C_{(r,z)}$是$g(S_{(r,z)}(K))$中x_i的上游圈, 即在$g(S_{(r,z)}(K))$中从圈$C_{(r,z)}$中有结点到x_i有路. 由于x_i和x_j属于$S(K)$的同一个强连通块, 所以在$g(S_{(r,z)}(K))$中x_i到x_j有路, 因此$C_{(r,z)}$也是x_j的上游圈. 对于K的任何非零元素, 由定义3, 显然$\mu_i(A_r \vee W_z) \leqslant \mu_j(A_r \vee W_z)$. 同理, 也能证明$\mu_j(A_r \vee W_z) \leqslant \mu_i(A_r \vee W_z)$. 所以, $\mu_j(A_r \vee W_z) = \mu_i(A_r \vee W_z)$.

引理 6 若$S(K)$有ω个强连通块, 则$\chi(S(K))$也分为ω个块.

定义 7 对于极小极大加系统, 如果存在一个输出反馈函数$K(y)$使得闭环系统$S(k): \chi_i(S(K)) = \chi_j(S(K)), 1 \leqslant i, j \leqslant n$, 则称该系统可用输出反馈镇定.

引理 7 对能达系统, 若输出反馈矩阵K中各元素都不为$-\infty$, 则在图$g(S_{(r,z)}(K))$中系统能观状态结点到其他任意结点必有路, 能观状态结点的上游圈亦是其他结点的上游圈.

证 设x_i是能观状态结点. 由于x_i能观, 对于$\forall C_{t_j \neq t_i}$, $t_j \in e$, 应在$g(A_r)$中有$x_i \to x_{j'(t_j)}$, 且$c_{m(t_j)j'(t_j)}(t_j) \neq -\infty$. 由于系统能达, 所以, 对任意$x_j$必至少存在一个$u_v, 1 \leqslant v \leqslant q$, 使得$b_{jv}(s) \neq -\infty$; 再由$K$的结构, $k_{vm} = k \neq -\infty$, 有: $(b_{jv}(s) + k_{vm} + c_{m(t_j)j'(t_j)}(t_j)) \neq -\infty$. 于是, $(W_z)_{jj'(t_j)} \neq -\infty$, 即必然存在$x_{j'(t_j)} \to x_j, j \neq i$. 另, $x_i \to x_{j'(t_j)}$, 因此存在$x_i \to x_{j'(t_j)} \to x_j$. 也就是说, 从能观状态结点到其他任意结点都必有路. 所以, 能观结点x_i的上游圈, 亦是其他结点的上游圈.

引理 8 所有能观状态结点具有相同的周期时间.

证 若x_i能观, 由引理7, 有$x_i \to x_j, j \neq i$. 同理, 若x_j能观, 有$x_j \to x_i, i \neq j$, 即所有的能观状态结点通过输出反馈K强连通. 因此, 所有能观状态结点具有相同的周期时间.

定理 2 如果系统S满足:

1) 能达;

2) 至少存在一个能观状态结点;

3) 不能观状态结点为全色不能观.

则系统S可用输出反馈镇定, 并且对于给定的λ, $\chi_0 \leqslant \lambda < +\infty$, 存在$K_0$使$\chi_i(S(K_0)) = \lambda, 1 \leqslant i \leqslant n$. 其中$\chi_0 = \min\limits_{r \in I} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r)$.

证 设x_i是其中一个能观状态结点. 为讨论方便, 采用极小极大加输出反馈的特例单极大输出反馈$u(k) = Ky(k)$, 并设K中所有元素均等于k, 即

$$K_{d_i} = K = \begin{bmatrix} k \cdots k \\ \cdots \\ k \cdots k \end{bmatrix}, \ \forall d_i \in \mathbb{N}, \ i = 1, 2, \cdots$$

于是, $W_z = [(B_s^1 K C_{t_1})^{\mathrm{T}} \ (B_s^2 K C_{t_2})^{\mathrm{T}} \ \cdots (B_s^n K C_{t_n})^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}$. 设闭环单极大射影子系统$S_{(r,z)}(K)$满足$\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r) \leqslant \lambda$. (此子系统必存在, 否则, 对所有$r \in I$, $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r) > \lambda$, 即和$\chi_0 = \min\limits_{r \in I} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r) \leqslant \lambda$矛盾!)

由系统能达、x_i能观, 可知在图$g(S_{(r,z)}(K))$中必存在$b_{jv}(s) \neq -\infty$, $c_{m(t)j'(t)}(t) \neq -\infty, \forall t \in T$, $m(t)$、$j'(t)$是由颜色t决定的状态结点的下标$(1 \leqslant m(t) \leqslant p, 1 \leqslant j'(t) \leqslant n)$, 且在$g(A_r)$中存在$x_j$到$x_i$的路、$x_i$到$x_{j'(t)}$的路(当然, j'和j都可退化为i). 由于$k_{vm(t)} = k \neq -\infty$, 所以必然会增加$x_i$的上游圈$u_v x_j x_i x_{j'(t)} y_{m(t)} u_v$, 即前述第一种圈. 由引理7, 能观结点$x_i$的上游圈, 亦是其他结点的上游圈.

记所有新增圈的周期时间为$\upsilon^{\delta(r,z)}(k)$其中$\delta(r,z) \in N(r,z)$, $N(r,z)$是所有新增圈组成的集合.

对于给定的λ, $\chi_0 \leqslant \lambda \leqslant +\infty$由引理4, 可以求出$\upsilon^{\delta(r,z)}(k) = \lambda$, $\delta(r,z) \in N(r,z)$的解, 解记为$k^{\delta(r,z)}$. 令$k^{(r,z)} = \min\limits_{\delta(r,z) \in N(r,z)} k^{\delta(r,z)}$, 用$k^{(r,z)}$代替$K$中所有元素, 即

$$k_{vm}^{(r,z)} = k^{(r,z)}, \ 1 \leqslant v \leqslant q, \ 1 \leqslant m \leqslant q. \tag{9}$$

此单极大输出反馈记为$K_{(r,z)}$. 在$g(S_{(r,z)}(K_{(r,z)}))$中, 易

知所有含反馈弧的圈周期时间小于等于λ, 且至少存在一个圈周期时间等于λ. 由引理7, 上述具有反馈弧的圈是x_i的上游圈, 亦是$x_j, j \neq i$的上游圈. 相同的论断适用于任何满足$\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r) \leqslant \lambda$的闭环单极大射影子系统.

设系统的单极大输出反馈矩阵$K_0 = K_{(r_0,z_0)}$, 它的所有元素

$$k^{(r_0,z_0)} = \max_{(r,z) \in I' \times Z} k^{(r,z)}. \tag{10}$$

其中$I' = \{r | \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r) \leqslant \lambda\}$. 在图$g(S_{(r_0,z_0)}(K_0))$中, 所有含反馈弧的圈的周期时间小于等于$\lambda$, 且至少存在一个圈的周期时间等于$\lambda$. 所以, $\mu_i(S_{(r_0,z_0)}(K_0)) = \lambda$. 由引理8, 所有能观状态结点的周期时间也等于$\lambda$. 对于不能观状态结点, 由于它们都是全色不能观的, 不能观状态结点到任意输出结点都没有路, 因此输出反馈K不会增加经过不能观状态结点的圈; 另一方面, 由于$\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r) \leqslant \lambda$及引理7, 不能观状态结点的周期时间由能观状态结点的周期时间决定. 于是, $\mu_i(S_{(r_0,z_0)}(K_0)) = \lambda, 1 \leqslant i \leqslant n$.

由定义1, 得: $\mu(S_{(r_0,z_0)}(K_0)) = [\lambda, \lambda, \cdots, \lambda]^{\mathrm{T}}$. 对所有$(r, z) \in I' \times Z$, 且$(r, z) \neq (r_0, z_0)$, 由周期时间定义和式(10), 有$\mu_i(S_{(r,z)}(K_0)) \geqslant \lambda, 1 \leqslant i \leqslant n$.

对所有$(r, z) \in (I \times Z) \backslash (I' \times Z)$, 显然, $\mu_i(S_{(r,z)}(K_0)) > \lambda, 1 \leqslant i \leqslant n$. 所以由定理1, $\chi_i(S(K_0)) = \lambda, 1 \leqslant i \leqslant n$. 即$S$可用$K_0$镇定.

推论 1　如果系统S能达能观, 则系统S可用输出反馈镇定, 并且对于给定的$\lambda, \chi_0 \leqslant \lambda < +\infty$, 存在$K_0$使$\chi(S(K_0)) = \lambda$. 其中$\chi_0 = \min\limits_{r \in I} \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \mu_i(A_r)$.

证　由引理8知, 所有状态结点具有相同的周期时间, 即系统S能够镇定. 按定理2中反馈阵的构造方法即可得到K_0.

当系统退化为(F, G, C), 即$H(x)$为单极大函数时, 定理2就退化为文献[9]的定理2.

4　结论(Conclusion)

本文研究了一般化极小极大加系统的输出反馈镇定问题. 给出了闭环系统单极大射影子系统表达式, 指出闭环单极大射影子系统存在严格的颜色匹配关系. 针对颜色匹配的复杂情况, 提出了新的着色图构造; 同时, 也指出以往研究忽视了闭环单极大射影子系统中出现的新增圈可能包含由多条反馈弧. 最后, 根据新的着色图和新增圈特点, 给出了该系统输出反馈镇定的一个充分条件.

文中仅得出系统(F, G, H)输出反馈镇定的一个充分条件, 系统(F, G, H)输出反馈镇定的充分条件可以进一步加以研究. 本文为研究系统(F, G, H)的输出反馈提供了一个思路.

参考文献(References):

[1] CHEN W. Cycle time assignment of nonlinear discrete event dynamic systems[J]. *Systems Science and Mathematical Sciences*, 2000, 13(2): 213 – 218.

[2] DE SCHUTTER B, VAN DEN BOOM T. Model predictive control for max-min-plus systems, discrete event systems: analysis and control[C] //*The Kluwer Int Series in Engineering and Computer Science*. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2000, 569: 201 – 208.

[3] TAO Y, CHEN W. Cycle time assignment of min-max systems[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(18): 1790 – 1799.

[4] ZHAO Q, ZHENG D. On stabilization of min-max systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(4): 751 – 756.

[5] COHEN G, DUBIOS D, QUARDRAT J P, et al. A linear-system-theoretic view of discrete–event processes and its use for performance evaluation in manufacturing[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(3): 210 – 220.

[6] 陶跃钢, 陈文德．非线性DEDS的周期时间部分合并配置与能稳性[J]．系统科学与数学, 2003, 23(10): 536 – 541.
(TAO Yuegang, CHEN Wende. Partial combination cycle time assignment and stabilization of nonlinear DEDS[J]. *Systems Scinence and Complexity*, 2003, 23(10): 536 – 541.)

[7] 陶跃钢, 陈文德, 刘国平．非线性极大极小系统的镇定[C] //第二十三届中国控制会议论文集. 上海: 华东理工大学出版社, 2004: 655 – 658.
(TAO Yuegang, CHEN Wende, LIU Guoping. Stabilization for nonlinear max- min systems[C] // *Proceedings of the 23rd Chinese Control Conference*. Shanghai: East China University of Science and Technology Press, 2004: 655 – 658.)

[8] TAO Y, LIU G. State feedback stabilization and majorizing achievement of min-max-plus systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(12): 2027 – 2033.

[9] ZHU Y, TAO Y, LIU G. Output feedback stabilization for a class of nonlinear time–evolution systems[EB/OL]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2008[2008.4]. http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V0Y–4S62RJ3–6/2/67d634ead429fc57a3c6f4bbc2fbd081.

[10] GUNAWARDENA J. Min-max functions[J]. *Discrete Event Dynamic Systems*, 1994, 4: 377 – 406.

[11] 邦迪J.A., 默蒂U.S.R. 图论及其应用[M]. 吴望名, 等译. 北京: 科学出版社, 1994.
(BONDY J A, MURTY U S R. *Graph Theory with Applications*[M]. WU Wangmin, et al transl. Beijing: Science Press, 1994.)

[12] GAUBERTM S, GUNAWARDENA J. A non-linear hierarchy for discrete event dynamical systems[C] //*Proceedings of 4th Workshop on Discrete Event Systems*. Cagliari: IEEE, 1998.

[13] TAO Y, LIU G. Cycle Time assignability and feedback design for min-max-plus systems[C] //*Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC – ECC '05. 44th IEEE Conference*. Seville, Spain: [s.n.], 2005: 7810 – 7815.

作者简介:

魏红昀　(1976—), 女, 博士研究生, 研究方向为复杂系统建模、智能控制, E-mail: hywei2005@163.com;

陈文德　(1941—), 男, 博士生导师, 研究方向为离散事件动态系统、编码, E-mail: wdchen@iss.ac.cn;

王永骥　(1955—), 男, 博士生导师, 研究方向为非线性系统神经网络建模与控制、智能控制等.