

## 基于2阶Renyi熵的自适应主动噪声控制

张兴华, 任雪梅

(北京理工大学 自动化学院, 北京 100081)

**摘要:** 在前馈主动噪声控制中, 基于均方误差准则的传统算法仅考虑了信号的2阶统计量, 忽略了实际存在的非高斯信号, 不能满足对非高斯噪声的控制要求. 提出基于2阶Renyi熵的滤波X自适应有限脉冲响应(finite impulse response, FIR)主动噪声控制算法, 定义2阶Renyi熵作为性能指标, 利用Parzen窗方法估计误差的概率密度函数, 给出基于2阶Renyi熵的信息梯度下降算法, 实现自适应FIR控制, 同时分析了算法的收敛性和计算复杂度. 对单频信号和实测宽带非高斯噪声的仿真结果表明该算法能很好地消除非高斯噪声.

**关键词:** 非高斯噪声; 2阶Renyi熵; 主动噪声控制; Parzen窗估计

**中图分类号:** TP14; TN911.4 **文献标识码:** A

## Adaptive active noise control based on Renyi's quadratic entropy

ZHANG Xing-hua, REN Xue-mei

(School of Automation, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

**Abstract:** The classical feedforward active noise control methods with mean-square error criteria only consider second order statistics of signals, but neglect real existing non-Gaussian signals. Therefore, these methods do not perform well for non-Gaussian noises. An adaptive finite impulse response(FIR) controller with filtered X algorithm based on Renyi's quadratic entropy is proposed to attenuate the noises. Renyi's quadratic entropy is defined as the performance index; and the probability density function of the system error is estimated by Parzen windowing estimation method. Renyi's quadratic entropy information gradient descent algorithm is applied to the adaptive FIR controller. In addition, the computational complexity and convergence of the proposed algorithm are analyzed. The simulations of single frequency signal and real non-Gaussian broadband noises demonstrate that the proposed scheme can improve the non-Gaussian noises reduction performance.

**Key words:** non-Gaussian noises; Renyi's quadratic entropy; active noise control; Parzen windowing estimation

### 1 引言(Introduction)

Leug提出的主动噪声控制(active noise control, ANC)<sup>[1]</sup>相比被动噪声控制具有体积小、重量轻且容易实现的优势, 特别是对1000 Hz以下低频噪声有更好的消除效果<sup>[2]</sup>, 已成为消除低频噪声的主要方法. 目前普遍应用基于均方误差(mean square error, MSE)准则的相关算法, 其中采用FIR滤波器的滤波X最小均方(filtered X-Least mean square, FX-LMS)及其各种改进算法<sup>[1~4]</sup>应用最广泛, 但这些基于MSE准则的算法是在噪声满足高斯分布的假设下进行分析的, 仅考虑了信号的2阶统计量, 忽略了实际应用中大量存在的非高斯噪声影响<sup>[5]</sup>, 故局限于线性高斯噪声控制问题, 不能满足处理包含非高斯噪声情况的要求.

信息熵作为一种不确定性的测度, 相比应用方差(2阶统计量)能提供系统更全面的描述, 即信息熵

在非高斯情况下, 包含随机变量的全部高阶信息. 近年来基于信息熵的相关算法在独立元分析<sup>[6]</sup>、盲源分解<sup>[7]</sup>和非高斯随机系统控制<sup>[8]</sup>等方面得到较好的研究, 但还未在主动噪声控制方面得以应用. 本文充分发挥了信息熵理论的优势, 并将信息熵引入主动噪声控制中, 解决非高斯噪声控制问题.

考虑实际主动噪声控制系统包含非高斯噪声<sup>[5]</sup>, 本文提出了基于滤波X-2阶Renyi熵的信息梯度下降(filtered X-Renyi's quadratic entropy information gradient descent, FX-RQEIGD)算法的自适应FIR主动噪声控制器. 所提算法充分利用信息熵能包含全部信息的优势, 选用2阶Renyi熵作为优化性能指标, 通过Parzen窗方法估计系统误差的概率密度函数, 给出了2阶Renyi熵的表达式, 推导出FX-RQEIGD算法, 并给出了算法的收敛性和计算复杂度分析. 仿真结果表明所提FX-RQEIGD算法对非高

斯噪声具有很好的消噪效果.

## 2 基于2阶Renyi熵的自适应主动噪声控制(Adaptive active noise control based on Renyi's quadratic entropy)

### 2.1 主动噪声控制系统(ANC systems)

在如图1所示的前馈主动噪声控制系统中, 主动噪声控制器选用线性自适应FIR滤波器, 主通道模型 $P(z)$ 是初级噪声从噪声源到误差传声器的传播路径, 是输入 $x(k)$ 到 $d(k)$ 的线性传递函数;  $d(k)$ 是误差传声器测量值中的主噪声分量,  $d(k) = p(k) * x(k)$ ,  $p(k)$ 为主通道 $P(z)$ 的脉冲响应,  $*$ 表示线性卷积;  $S(z)$ 为线性次级通道模型, 是控制器输出 $u(k)$ 到 $y(k)$ 的传递函数;  $y(k)$ 是控制器输出 $u(k)$ 在误差传声器处产生的次级噪声信号, 即误差传声器测量值中的次级噪声分量.

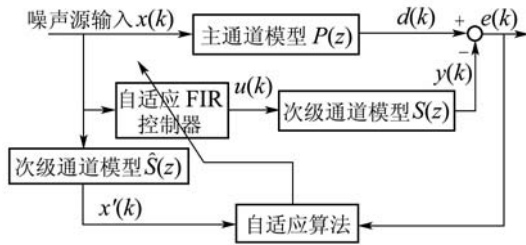


图1 前馈主动噪声控制系统框图

Fig. 1 The feedforward active noise control systems

由于实际系统受到非高斯噪声的影响, 采用基于MSE准则的FX-LMS及其改进算法<sup>[1~4]</sup>已不能满足处理包含非高斯噪声情况的要求. 因此, 本文目的在于如何设计自适应算法, 以达到消除非高斯噪声的目的. ANC系统的误差信号 $e(k)$ 为误差传声器检测信号, 其定义为

$$e(k) = d(k) - y(k) = d(k) - s(k) * u(k), \quad (1)$$

其中 $s(k)$ 为次级通道模型 $S(z)$ 的脉冲响应. 自适应控制器的输出 $u(k) = \mathbf{W}^T(k)\mathbf{X}(k)$ , 其中 $\mathbf{X}(k) = [x(k) \ x(k-1) \ \cdots \ x(k-n+1)]^T$ 为自适应控制器的输入信号,  $n$ 为线性自适应FIR控制器的阶数,  $\mathbf{W}(k)$ 为线性自适应控制器的权系数向量.

### 2.2 基于FX-RQEIGD算法的FIR控制(FIR control based on FX-RQEIGD algorithm)

下面研究基于2阶Renyi熵的FX-RQEIGD算法的自适应FIR控制器, 设FIR控制器权系数向量 $\mathbf{W}(k) = [w_{0,k} \ w_{1,k} \ \cdots \ w_{n-1,k}]^T$ , 输入向量 $\mathbf{X}(k) = [x(k) \ x(k-1) \ \cdots \ x(k-n+1)]^T$ ,  $n$ 为自适应FIR控制器的阶数. 控制器输出 $u(k) = \mathbf{W}^T(k)\mathbf{X}(k)$ . 定义系统误差的2阶Renyi熵为

$$H_{R2}(e) = -\log\left(\int f(e)^2 de\right), \quad (2)$$

其中 $f(e)$ 为随机变量 $e$ 的概率密度函数. 从不同熵定义的结构中可知, 2阶Renyi熵较之其他熵定义有计算效率上的优势<sup>[7]</sup>.  $k$ 时刻误差 $e(k)$ 的2阶Renyi熵为

$$H_{R2}(e(k)) = -\log\left(\int f(e(k))^2 de\right) = -\log(E(f(e(k)))) \quad (3)$$

其中 $E$ 为数学期望算子. 利用概率密度函数(probability density function, PDF)的瞬时值 $f(e(k))$ 来代替PDF的数学期望, 则式(3)中的2阶Renyi熵可写为

$$H_{R2}(e(k)) = -\log(f(e(k))). \quad (4)$$

为使式(4)的误差熵最小, 采用梯度下降算法调整自适应控制器的权系数, 有

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) - \mu \frac{\partial(-\log(f(e(k))))}{\partial \mathbf{W}}, \quad (5)$$

其中 $\mu$ 为学习速率.

在实际应用中, 得到系统输出变量的概率密度函数通常是很困难的. 为此本文利用Parzen窗非参数估计方法<sup>[9]</sup>来估计系统误差的概率密度函数, 有

$$\hat{f}(e(k+1)) = \frac{1}{L} \sum_{i=k-L}^{k-1} \kappa_{\sigma}(e(k) - e(i)), \quad (6)$$

其中:  $L$ 为Parzen窗的窗口宽度,  $\kappa_{\sigma}(\cdot)$ 为核窗口函数, 为方便2阶Renyi熵的积分运算, 选取核窗口函数

$$\kappa_{\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right), \quad (7)$$

其中 $\sigma > 0$ 为核大小, 通常根据经验选取核大小, 且式(7)满足

$$\kappa'_{\sigma}(x) = -x\sigma^{-2}\kappa_{\sigma}(x). \quad (8)$$

将式(6)和(8)代入式(5)中, 得到权系数调节规律

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(k+1) = & \mathbf{W}(k) + \mu \frac{\sum_{i=k-L}^{k-1} \kappa'_{\sigma}(e(k) - e(i))(\nabla e(k) - \nabla e(i))}{\sum_{i=k-L}^{k-1} \kappa_{\sigma}(e(k) - e(i))} = \\ & \mathbf{W}(k) - \mu \frac{\sum_{i=k-L}^{k-1} \kappa'_{\sigma}(e(k) - e(i))(\mathbf{X}'(k) - \mathbf{X}'(i))}{\sum_{i=k-L}^{k-1} \kappa_{\sigma}(e(k) - e(i))}, \end{aligned} \quad (9)$$

其中:  $\nabla e(k)$ 为误差 $e(k)$ 的瞬时梯度,  $\nabla e(k) = -s(k) * \mathbf{X}(k) = -\mathbf{X}'(k)$ ,  $\mathbf{X}'(k)$ 为滤波 $\mathbf{X}(k)$ 信号, 由噪声源输入 $\mathbf{X}(k)$ 经过次级通道模型 $S(z)$ 滤波得到,  $\mathbf{X}'(k) = [x'(k) \ x'(k-1) \ \cdots \ x'(k-n+1)]^T$ ,  $x'(k) = s(k) * x(k)$ ,  $*$ 表示线性卷积. 在实际主动

噪声控制中, 由于次级通道模型 $S(z)$ 是未知的<sup>[1]</sup>, 需要用FIR滤波器 $\hat{S}(z)$ 估计次级通道模型 $S(z)$ . 因此滤波信号 $\mathbf{X}'(k)$ 将由噪声信号辨识模型滤波得到, 即 $\mathbf{X}'(k) = \hat{s}(k) * \mathbf{X}(k)$ ,  $\hat{s}(k)$ 为次级通道辨识模型 $\hat{S}(z)$ 的脉冲响应.

### 3 FX-RQEIGD算法的收敛性及计算复杂度分析(Convergence and computational complexity of FX-RQEIGD algorithm)

#### 3.1 收敛性分析(Convergence analysis)

**定理 1** 在基于2阶Renyi熵的自适应前馈主动噪声控制中, 当自适应主动噪声FIR控制器的学习速率 $\mu$ 满足 $0 < \mu \leq -2\omega^T(k)\Delta\mathbf{W}(k)/\|\Delta\mathbf{W}(k)\|^2$ 时, 则FX-RQEIGD算法收敛.

**证** 设最优权值向量为 $\mathbf{W}^*$ , 定义自适应控制器权系数的修正向量为 $\Delta\mathbf{W}(k)$ , 有

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) - \mu\Delta\mathbf{W}(k). \quad (10)$$

定义权系数误差向量 $\omega(k) = \mathbf{W}^* - \mathbf{W}(k)$ , 式(10)两边同减 $\mathbf{W}^*$ , 有

$$\omega(k+1) = \omega(k) + \mu\Delta\mathbf{W}(k). \quad (11)$$

式(11)的两边同乘各自的转置, 得

$$\|\omega(k+1)\|^2 = \|\omega(k)\|^2 + \mu^2\|\Delta\mathbf{W}(k)\|^2 + 2\mu\omega^T(k)\Delta\mathbf{W}(k). \quad (12)$$

为保证自适应算法收敛, 需要 $\|\omega(k+1)\|^2 \leq \|\omega(k)\|^2$ , 可得到

$$0 < \mu \leq -2\omega^T(k)\Delta\mathbf{W}(k)/\|\Delta\mathbf{W}(k)\|^2. \quad (13)$$

将式(10)中 $\Delta\mathbf{W}(k)$ 代入式(13), 有

$$0 < \mu \leq M, \quad (14)$$

其中

$$M = \left\{ -2 \sum_{i=k-L}^{k-1} \kappa'_\sigma(e(k) - e(i))(e(k) - e(i)) \right\} / \left\{ \|\Delta\mathbf{W}(k)\|^2 \sum_{i=k-L}^{k-1} \kappa_\sigma(e(k) - e(i)) \right\},$$

$$e(k) = \omega^T(k)\mathbf{X}'(k), e(i) = \omega^T(i)\mathbf{X}'(i).$$

由核函数的非负性可知,  $M$ 的分母大于零; 由式(8)可知 $M$ 的分子大于零, 即满足

$$\kappa'_\sigma(e(k) - e(i))(e(k) - e(i)) < 0,$$

因此 $M$ 为大于零的常数. 证毕.

#### 3.2 计算复杂度(Computational complexity)

基于FX-RQEIGD算法的ANC系统的计算复杂度分析包括以下3个过程: 计算FIR控制器输出 $u(k)$ ; 计算滤波信号 $\mathbf{X}'(k)$ ; 计算权值更新公式(9). 表1总结了FX-LMS算法和当Parzen窗宽度变化时FX-

RQEIGD算法在ANC系统运算的计算复杂度, 其中 $m$ 为次级通道的FIR辨识模型 $S(z)$ 的阶次,  $n$ 为所采用自适应FIR控制器的阶数,  $L$ 为Parzen窗宽度大小,  $L \in \mathbb{Z}^+$ , 表中FX-RQEIGD简写为F-R.

表 1 计算复杂度比较表

Table 1 Comparison of computational cost

| 算法<br>类型     | 乘法<br>运算数      | 加法<br>运算数     | 核函数<br>运算数 |
|--------------|----------------|---------------|------------|
| FX-LMS       | $2n + m + 1$   | $2n + m - 2$  | 0          |
| F-R $L = 1$  | $2n + m + 3$   | $3n + m + 1$  | 0          |
| F-R $L = 2$  | $4n + m + 5$   | $5n + m$      | 2          |
| F-R $L = 10$ | $12n + m + 13$ | $21n + m + 8$ | 10         |

由表1可知, 由于FX-RQEIGD(F-R)算法需要利用Parzen窗估计方法间接获得系统误差的PDF, 因此增大了计算复杂度. 应特别指出的是当取 $L = 1$ 时, 简化FX-RQEIGD算法的计算复杂度与FX-LMS算法相近, 且式(9)可简化为

$$\mathbf{W}(k+1) = \mathbf{W}(k) + \mu\sigma^{-2}\Delta e(k)\Delta\mathbf{X}'(k), \quad (15)$$

其中:  $\Delta e(k) = e(k) - e(k-1)$ ,

$$\Delta\mathbf{X}'(k) = \mathbf{X}'(k) - \mathbf{X}'(k-1).$$

由式(15)可知, 简化的FX-RQEIGD算法公式具有与FX-LMS算法相似的结构<sup>[1]</sup>. 不同的是用瞬时增量 $\Delta e(k)$ 和 $\Delta\mathbf{X}'(k)$ 代替瞬时 $e(k)$ 和 $\mathbf{X}'(k)$ . 因此, 当 $L = 1$ 时, FX-RQEIGD算法具有与FX-LMS算法相似的结构和相当的计算量.

### 4 仿真(Simulation)

下面分别对窄带单频和实测宽带非高斯噪声两种低频噪声进行仿真, 验证所提算法的降噪效果. 在下面的仿真中次级通道选用非最小相位系统<sup>[1]</sup>, 自适应主动噪声控制器选用FIR滤波器, 阶次为40.

**仿真 1** 仿真系统中主通道传递函数采用文献[2]中的参数, 且为符合实际系统增大了延迟阶数:  $P(z) = z^{-4} - 0.3z^{-5} + 0.2z^{-6}$ , 次级通道模型为非最小相位系统:  $S(z) = z^{-2} + 1.2z^{-3} - 0.45z^{-4}$ . 输入噪声信号为150 Hz单频非高斯信号(典型窄带周期噪声):  $\sin(2\pi * f_1 * t)$ ,  $f_1 = 150$  Hz, 采样频率 $f_s = 11025$  Hz. 选用FX-LMS算法时, 学习速率为0.002; 应用FX-RQEIGD算法时, 参数分别选取 $L = 1$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0.3$ 和 $L = 10$ ,  $\sigma = 1$ ,  $\mu = 0.015$ 两种情况. 图2为基于两种算法的ANC对150 Hz噪声信号降噪前后的效果图(噪声功率谱), 仿真结果表明FX-RQEIGD算法较FX-LMS算法在单频非高斯噪声方面的降噪优势, 当采用FX-RQEIGD算法时, 选择 $L = 10$ 时的消噪效果比选取 $L = 1$ 时有更好的消噪效果.

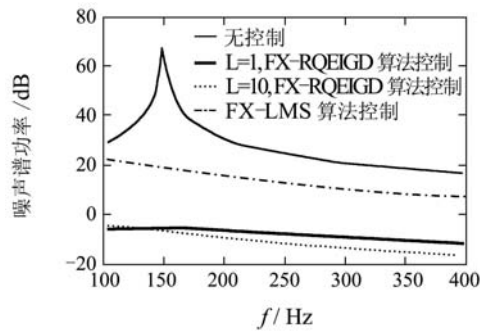


图2 对150 Hz单频噪声信号降噪前后的效果图

Fig. 2 Control performance of 150 Hz pure noise cancelled

**仿真 2** 主通道和次级通道传递函数使用仿真1中的传递函数. 输入噪声信号为机动车发动过程中实际采集的宽带非高斯噪声, 经过截止频率为1000 Hz的低通滤波器, 得到宽带非高斯低频噪声, 采样频率 $f_s = 11025$  Hz.

在选用FX-LMS算法时, 学习速率为0.007; 应用FX-RQEGD算法时, 参数分别选取 $L = 1$ ,  $\sigma = 0.08$ ,  $\mu = 0.06$ 和 $L = 10$ ,  $\sigma = 0.05$ ,  $\mu = 0.003$ .

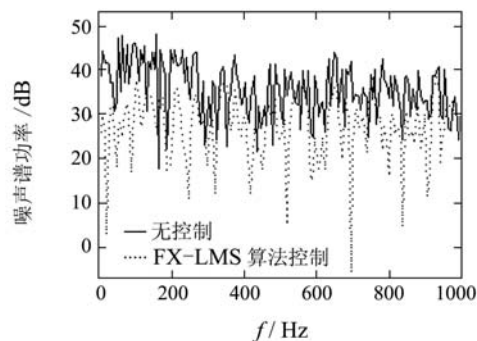


图3 降噪效果图(FX-LMS)

Fig. 3 The noise cancellation effect for FX-LMS

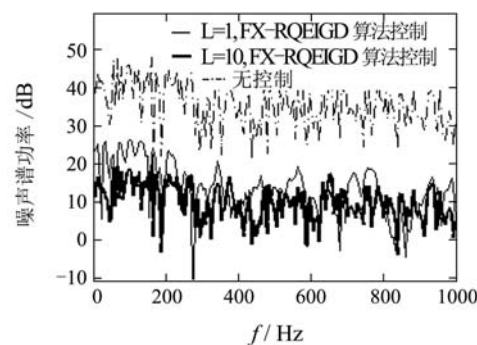


图4 降噪效果图(FX-RQEGD)

Fig. 4 The noise cancellation effect for FX-RQEGD

图3为基于FX-LMS算法的ANC对宽带非高斯噪声的降噪效果图(噪声功率谱), 由此可看出传统的基于MSE准则的FX-LMS算法对宽带非高斯低频噪声消噪效果不理想. 图4为基于FX-RQEGD算法的ANC分别在不同窗口宽度时对宽带非高斯噪声的降噪效果图, 仿真结果表明FX-RQEGD算法对低

频非高斯噪声有较好的降噪效果, 降噪平均幅值为20 dB, 而且FX-RQEGD算法的Parzen窗宽度在选取 $L = 10$ 时有更好的消噪效果.

以上仿真结果表明, 基于2阶Renyi熵的主动噪声控制对单频窄带和宽带非高斯噪声均有较好的消噪效果.

## 5 结论(Conclusion)

本文将信息熵应用于主动噪声控制系统设计中, 提出基于2次Renyi熵的自适应主动噪声控制算法, 利用Parzen窗估计方法得到系统误差的概率密度函数, 给出基于2阶Renyi熵的FX-RQEGD算法, 并对该算法的收敛性和计算复杂度进行分析. 该算法充分利用2阶Renyi熵能包含随机变量全部高阶信息的优势, 能有效地解决非高斯噪声控制问题. 当Parzen窗宽度 $L$ 取1时, 虽然基于2阶Renyi熵的算法与基于均方差准则的FX-LMS算法具有相似的结构和相当的低计算复杂度, 但具有更好的降噪效果. 仿真结果表明相比基于MSE准则的FX-LMS算法, FX-RQEGD算法对非高斯低频噪声有更好的降噪效果.

## 参考文献(References):

- [1] KUO S M, MORGAN D R. Active noise control: a tutorial review[J]. *Proceedings of the IEEE*, 1999, 87(6): 943 – 973.
- [2] KIM I S, NA H S, KIN K J, et al. Constraint filtered-x and filtered-u least-mean-square algorithms for the active noise control in ducts[J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1994, 95(3): 379 – 389.
- [3] CHANG C Y. The compensated filtered-X algorithm for active noise control systems in duct[C] // *SCIE 2003 Annual Conference*. Tokyo, Japan: The Society of Instrument and Control Engineers, 2003, 3: 2498 – 2503.
- [4] DAS D P, PANDA G, KUO S M. New block filtered-X LMS algorithms for active noise control systems[J]. *IET Signal Processing*, 2007, 1(2): 73 – 81.
- [5] STRAUCH P, MULGREW B. Active control of nonlinear noise processes in a linear duct[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(9): 2404 – 2412.
- [6] ERDOGMUS D. *Information theoretic learning: Renyi's entropy and its applications to adaptive system training*[D]. Florida: University of Florida, 2002.
- [7] ERDOGMUS D, HAYKIN S, HILD K E, et al. Blind source separation using Renyi's  $\alpha$ -marginal entropy[J]. *Neurocomputing*, 2002, 49(1-4): 25 – 38.
- [8] 姚利娜, 王宏. 基于有理平方根逼近的非高斯随机分布系统的故障诊断和容错控制[J]. *控制理论与应用*, 2006, 24(4): 562 – 568. (YAO Li'na, WANG Hong. Fault diagnosis of tolerant control of non-gaussian stochastic distribution control systems based on the rational square-root approximation model[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(4): 562 – 568.)
- [9] PARZEN E. On the estimation of a probability density function and mode[J]. *Annals of Mathematical Statistics*, 1962, 33(3): 1065 – 1076.

## 作者简介:

**张兴华** (1982—), 男, 博士研究生, 研究方向为智能信息处理、优化算法及噪声控制, E-mail: xinghuabit@163.com;

**任雪梅** (1967—), 女, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能信号处理、模式识别及智能控制, E-mail: xmren@bit.edu.cn.