第 28 卷第 1 期
2011 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 1
Jan. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)01−0024−07

基于三I算法的模糊系统的响应能力

潘海玉[1], 裴道武[2], 陈仪香[1]

(1. 华东师范大学 上海市高可信计算重点实验室, 上海 200062; 2. 浙江理工大学 理学院, 浙江 杭州 310018)

摘要: 探讨模糊系统的函数逼近能力是模糊系统理论研究的一个重要的课题. 本文首次讨论了在两种推理规则情形下由三I支持度算法和模糊熵三I算法设计的模糊系统的响应能力. 针对三I支持度算法, 分别就正则蕴涵算子和11个具体的模糊蕴涵算子, 考察了相应模糊系统的响应能力, 讨论了基于模糊熵三I算法和三I算法设计的模糊系统的响应函数之间的关系. 此外, 在多规则情形下, 研究了推理过程中推理与聚合的先后次序对控制性能的影响.

关键词: 模糊推理; 模糊系统; 三I算法; 蕴涵算子族; 响应函数

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

Response ability of fuzzy systems based on triple I method

PAN Hai-yu[1], PEI Dao-wu[2], CHEN Yi-xiang[1]

(1. Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing, East China Normal University, Shanghai 200062, China;
2. Faculty of Science, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou Zhejiang 310018, China)

Abstract: The function approximate abilities of fuzzy systems are important topics in the theory of fuzzy systems. In the present paper, we study response abilities of fuzzy systems designed by using the triple I sustaining degree method and the fuzzy entropy triple I method under two different reasoning rules. For the regular implication operators and eleven implication operators, we discuss the response abilities of fuzzy systems designed by using triple I sustaining degree method. We also investigate the relationship between different response functions based on the above two inference methods. Moreover, under the condition of multi-rules, we study the effect of the order of interchange between the inference and the aggregation on the control performance of fuzzy systems.

Key words: fuzzy reasoning; fuzzy system; triple I method; parametric operators; response function

1 引言(Introduction)

众所周知, 模糊控制技术已经成为智能控制方法的重要组成部分, 而常用的模糊控制算法均可归结为某种插值算法, 它是对响应函数的逼近[1]. 一般地, 若模糊系统仅具有阶跃响应能力而不具有函数逼近的泛性, 则几乎不能在实际的模糊控制系统中使用. 于是, 考察模糊系统是否具有函数逼近的泛性就显得尤为重要. 在模糊系统理论中, 模糊推理发挥了重要的作用, 而模糊蕴涵算子对模糊系统的构造必不可少, 选择何种模糊蕴涵算子直接影响到模糊系统函数逼近能力. 李洪兴等分别基于CRI算法和三I算法[2~4], 针对不同的蕴涵算子构造出模糊系统, 探讨了它们的响应函数, 为人们在设计模糊系统时选取合适的算子提供指导[5~9].

三I方法是一种新的模糊推理方法, 有良好的逻辑基础且包含推理优化的思想, 其基本原则(由于模糊系统中推理算法的基本模型是FMP问题, 故仅介绍FMP问题的三I原则)可以表述为: 假设蕴涵算子→关于第二变量不减, 那么FMP问题的解B^*应为论域Y上使得以下公式对于任何$x \in X, y \in Y$恒取最大值的最小模糊集:

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)). \quad (1)$$

进一步, 基于FMP问题的三I支持度方法的优化问题可以表述为: 对于$\alpha \in (0,1]$, 在已知$A, A^* \in F(X), B \in F(Y)$时, 寻求最优的$B^* \in F(Y)$, 使得

$$(A(x) \to B(y)) \to (A^*(x) \to B^*(y)) \geqslant \alpha \quad (2)$$

对一切$x \in X, y \in Y$成立, 其中$F(X)$和$F(Y)$表示X与Y上的模糊集全体.

虽然目前对三I算法构成的模糊系统的响应能力的研究不少, 但忽略了关于三I支持度方法构成的模糊系统的响应能力的研究. 同时, 最近关于蕴涵算子族、三角模族的理论与应用研究成果不断涌现. 如王三民在极端积三角模T_{D}的基础上设计出三角模族T_{RDP}, 然后构造出RDP系统[10]; 吴望名和王国俊等分别研究了带参数的Kleene系统[11]和H_α系

收稿日期: 2008−08−18; 收修改稿日期: 2010−03−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10871229, 60673117); 上海市重点学科基金资助项目(B412); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(78210045).

统[12]; 张兴芳等建立了蕴涵算子族$L-\lambda-R_0$[13]; 文献[14]研究了八类三角模族的性质. 一个自然的问题是: 针对以上提到的蕴涵算子族或由三角模族生成的正则蕴涵算子族, 以及其它的蕴涵算子, 基于三I支持度算法设计的模糊系统, 是否可以归结为某种插值方法以及是否具有函数逼近的泛性?

本文正是要解决以上的3个问题.

2　基本概念(Preliminary concepts)

为了讨论基于三I方法设计的模糊系统, 以单输入单输出为例, 简要叙述一下基于CRI算法的Mamdani控制算法, 以便引出几个概念、记号及本文所涉及的问题[1,5~9].

设X为输入变量论域, Y为输出变量论域, 取语言值$A_i\in F(X), B_i\in F(Y)$. 记$A=\{A_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$, $B=\{B_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$, 视$A,B$为语言变量, 由此形成$n$条推理规则: 由此形成$n$条推理规则: 若$x$是$A_i$, y是$B_i, i=1,2,\cdots,n$, 这里$x\in X, y\in Y$叫做基础变量. 按Mamdani控制算法, $R_i=A_i\times B_i$, 其中$R_i(x,y)=A_i(x)\wedge B_i(y)$. 这$n$条规则之间用“或”来联结, 因此$n$条规则的总真域为$R=\bigcup\limits_{i=1}^{n}R_i$, 即$R(x,y)=\bigvee\limits_{i=1}^{n}(A_i(x)\wedge B_i(y))$. 给定$A^*\in F(X)$, 则推理结果$B^*\in F(Y)$, 它由CRI算法来确定: $B^*=A^*\circ R$, 即

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}(A^*(x)\wedge R(x,y)). \tag{3}$$

对于一个模糊系统, 输入量为确切量, 设为$x'\in X$, 为了能使用式(3), 需将x'模糊化, 即规定单点模糊集:

$$A'(x)=\begin{cases}1, x=x',\\ 0, x\neq x'.\end{cases}$$

将之代入式(3), 则推理结果B':

$$B'(y)=R(x',y)=\bigvee_{i=1}^{n}(A_i(x')\wedge B_i(y)), \tag{4}$$

因B'是个模糊集, 故需经清晰化得到确切数作为对实际控制对象的操作量. 常用的方法为“重心法”:

$$y'=\frac{\int_{y\in Y}yB'(y)\mathrm{d}y}{\int_{y\in Y}B'(y)\mathrm{d}y}. \tag{5}$$

为讨论方便, 还需明确以下概念.

定义 1[1]　给定某个论域X, $A=\{A_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$为$X$上一族正规模糊集, 峰点为$x_i$, (即满足$A(x_i)=1$的点, 称$A$为$X$上的一个模糊划分, 如果满足条件$i\neq j\Rightarrow x_i\neq x_j, 1\leqslant i,j\leqslant n$ 且$\sum\limits_{i=1}^{n}A_i(x)=1, \forall x\in X$的一个基元, 从而$A$可称为$X$的一个基元组.

注 1　在本文中, 用R表示蕴涵算子. 通常将由左连续的三角模[18]生成的蕴涵算子称为正则蕴涵算子.

注 2　为了便于叙述, 今后, 将三I算法、三I支持度算法、模糊熵三I算法、单输入单输出、双输入单输出分别简记为TI算法、TIS算法、FETI算法、SISO、MISO.

3　基于正则蕴涵算子TIS算法的模糊系统及其响应函数(Fuzzy systems and their response functions based on triple I sustaining degrees method about regular implicational operators)

设 X,Y 分别为输入和输出变量论域, $A=\{A_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}, B=\{B_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$分别为$X$和$Y$的模糊划分. 不妨规定$X$和$Y$均为实数区间, 即$X=[a,b]$, $Y=[c,d]$, 其中$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b, c<y_1<y_2<\cdots<y_n<d$, 这里$x_i, y_i$分别为$A_i, B_i$的峰点. 此外恒假定$A_i, B_i$为可积函数. 实际上, 这些规定在实际应用上几乎都能满足.

定理 1　在上面假设下, 关于任意的正则蕴涵算子R, SISO的R型TIS 算法模糊系统均可近似为一个阶跃响应函数, 即$F(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{h_i}{y_n-c}y_i=$常数.

证　基于正则蕴涵算子的三I支持度算法的一般计算公式为[17]

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}(T(T(\alpha,R(A(x),B(y))),A^*(x))),\quad y\in Y, \tag{6}$$

对于给定的确切输入x', 如同得到式(4), 根据左连续三角模的性质, 有

$$B'(y)=T(\alpha,\bigvee_{i=1}^{n}(R(A_i(x'),B_i(y)))),$$

再根据式(5), 得到确切响应量y'. 令

$$h_1=y_1-c, h_i=y_i-y_{i-1}, i=2,3,\cdots,n,$$

且$h=\max\{h_i|1\leqslant i\leqslant n\}$, 因为$A,B$为模糊划分, 所以它们具有Kronecker性质:

$$A_i(x_j)=B_i(y_j)=\begin{cases}1, i=j,\\ 0, i\neq j.\end{cases}$$

由定积分的定义, 有

$$y'=\frac{\int_{y\in Y}yB'(y)\mathrm{d}y}{\int_{y\in Y}B'(y)\mathrm{d}y}\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_iB'(y_i)h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}B'(y_i)h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_iT(\alpha,\bigvee\limits_{k=1}^{n}R(A_k(x'),B_k(y_i))))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}T(\alpha,\bigvee\limits_{k=1}^{n}R(A_k(x'),B_k(y_i))))h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i T(\alpha, \bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} R(A_k(x'),0)\vee R(A_i(x'),1))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} T(\alpha, \bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} R(A_k(x'),0)\vee R(A_i(x'),1))h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha y_i h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i=\text{常数}.$$

证毕.

现在讨论MISO情形下的模糊系统的响应性能.

设X,Y为输入变量论域, Z为输出变量论域, $A=\{A_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}, B=\{B_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}, C=\{C_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$分别为$Z$的模糊划分. 记$Z=[e,f]$, 再设$z_i$为$C_i$的峰点, 满足$e<z_1<z_2<\cdots<z_n<f$, 假定$C_i$也为可积函数.

定理 2 在上面假设下, 关于任意的正则蕴涵算子R, MISO的R型TIS算法模糊系统均近似为一个阶跃响应函数, 即$F(x,y)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{h_i}{z_n-e}z_i=$常数.

证 视A,B,C为语言变量, 由此形成n条推理规则: 若x是A_i且y是B_i, 则z是$C_i, i=1,2,\cdots,n$, 按Mamdani控制算法得到n条规则聚合后总的真域为$R=\bigcup\limits_{i=1}^{n}((A_i\times B_i)\times C_i)$. 给定$A^*\in F(X), B^*\in F(Y)$时, 寻求最优的$C^*\in F(Z)$, 使得

$$(A(x)\wedge B(y)\to C(z))\to$$
$$(A^*(X)\wedge B^*(Y)\to C^*(z))\geqslant\alpha,$$

对一切$x\in X, y\in Y, z\in Z$成立.

由正则蕴涵算子的三I支持度算法的一般计算公式, 有

$$C^*(z)=\bigvee_{x\in X,y\in Y}(T(T(\alpha,R(A(x)\wedge B(y),C(z)))\\ A^*(x)\wedge B^*(y))), z\in Z, \tag{7}$$

对于给定的确切输入$(x',y')\in X\times Y$, 将之模糊化

$$A'(x)=\begin{cases}1, x=x',\\0, x\neq x',\end{cases} B'(y)=\begin{cases}1, y=y',\\0, y\neq y',\end{cases}$$

代入式(7)得到

$$C'(z)=T(\alpha,\bigvee_{i=1}^{n}(R(A_i(x')\wedge B_i(y')),C_i(z))).$$

令$h_1=z_1-e, h_i=z_i-z_{i-1}(i=2,3,\cdots,n)$且$h=\max\{h_i|1\leqslant i\leqslant n\}$, 按重心法有

$$z'=\frac{\int_{z\in Z} zC'(z)dz}{\int_{z\in Z} C'(z)dz}\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_iC'(z_i)h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} C'(z_i)h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_iT(\alpha,\bigvee\limits_{k=1}^{n} R(A_k(x')\wedge B_k(y'),C_k(z_i))))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} T(\alpha,\bigvee\limits_{k=1}^{n} R(A_k(x')\wedge B_k(y'),C_k(z_i))))h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_iT(\alpha,\bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} R(A_k(x')\wedge B_k(y'),0)\vee R(A_i(x')\wedge B_i(y'),1))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} T(\alpha,\bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} R(A_k(x')\wedge B_k(y'),0)\vee R(A_i(x')\wedge B_i(y'),1))h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha z_ih_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_ih_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{z_n-e}z_i=\text{常数}.$$

证毕.

在文献[14]中提到8个三角模族, 其中三角模族Schweizer-Sklar, Hamacher, Yager, Dombi, Sugeno-Weber, Aczel-Alsina中除了极端积三角模T_{D}外都是连续的, 三角模族Frank, Mayor-Torrens是连续的三角模族. 根据以上两个结论, 易得到$R_{\mathrm{p}}, R_{\mathrm{RDP}}$型算子族[10,12]及文献[14]中8个三角模族生成的正则蕴涵算子族TIS算法模糊系统的响应函数.

4 基于11种蕴涵算子TIS算法的模糊系统及其响应函数(Fuzzy systems and their response functions based on triple I sustaining degrees method about eleven implicational operators)

为了便于分析, 先引入一个结论:

引理 1[18] 设$R,T:[0,1]^2\to[0,1]$, R满足$R(y,\bigwedge\limits_{i\in I} z_i)=\bigwedge\limits_{i\in I} R(y,z_i)$和$\forall x\in[0,1]$, 则有

$T(x,y)\leqslant z$当且仅当$x\leqslant R(y,z), z\in[0,1]$.

用以上的引理来讨论下面的蕴涵算子$(x,y\in[0,1])$:

1) Reichenbach蕴涵算子:$R_1(x,y)=(1-x)+xy$.

2) $R_2(x,y)=\begin{cases}1, x<1,\\y, x=1.\end{cases}$

3) Yager蕴涵算子: $R_3(x,y)=y^x(0^0=1)$.

4) $R_4(x,y)=\begin{cases}1, x=0,\\y, x>0.\end{cases}$

5) $R_5(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\1-x+xy, & x>y.\end{cases}$

6) $R_6(x,y)=1\wedge(1-x^p+y^p)^{\frac{1}{p}}(p>0)$.

7) Kleene-Dienes蕴涵算子:$R_7(x,y)=(1-x)\vee y$.

8) $R_8(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ 1-x, & x>y.\end{cases}$

9) Gaines-Rescher蕴涵算子:

$$R_9(x,y)=\begin{cases}1, x\leqslant y,\\ 0, x>y.\end{cases}$$

10) $R_{10}(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ \dfrac{1-x}{1-y}, & x>y.\end{cases}$

11)

$R_{11}(x,y)=$

$$\begin{cases}1, & x\leqslant y,\\ 1-x+(2\lambda-1)y, & x+y<1, x>y,\\ (1-2\lambda)x+y+2\lambda-1, & x>y, x+y\geqslant 1,\end{cases}$$

其中$\lambda\in[\frac{1}{2},1]$.

注 3　R_{11}是$L-\lambda-R_0$蕴涵算子族.

很容易验证$R_1\sim R_{11}$能生成伴随算子. 不难理解FMP问题的基于$R_1\sim R_{11}$的三I支持度算法的一般计算公式也可用式(6)表示. 基于三I支持度算法关于$R_1\sim R_{11}$的模糊系统的响应性能的证明类似于定理1, 2的证明, 所以可以直接给出下面的结论:

定理 3　在定理1(定理2)假设下, 关于算子$R_1\sim R_{11}$, SISO(MISO)的TIS算法模糊系统均近似为一个阶跃响应函数.

5 基于Kleene蕴涵算子族TI算法模糊系统及其响应函数(Fuzzy systems and their response functions based on triple I method about Kleene implicational operator classes)

参数 Kleene 系统的引入, 建立了最基本的Kleene系统和修正的Kleene系统[3]之间的联系. 本节讨论基于Kleene蕴涵算子族TI算法模糊系统及其响应函数. Kleene蕴涵算子族的定义为

$$R_{12}(x,y)=\begin{cases}1, & x\leqslant y-p,\\ (1-x)\vee y, & x>y-p.\end{cases}$$

定理 4　在定理1的条件下, 关于Kleene蕴涵算子族, SISO的TI算法模糊系统具有与定理1相同的结论.

证　FMP问题的关于Kleene蕴涵算子族三I算法解:

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in E_{\rm y}}(A^*(x)\wedge R_{12}(A(x),B(y))), y\in Y,$$

其中$E_{\rm y}=\{x|A^*(x)+R_{12}(A(x),B(y))>1-p\}$.

对于给定的输入$x'\in X$, 进行模糊化操作, 当$x'\in E_{\rm y}$时, 则$E_{\rm y}=\{x'\}$, 故其推理结果

$$B'(y)=R_{12}(x',y)=\bigvee_{i=1}^{n}(A_i(x'),B_i(y)).$$

再由重心法得到输出确切响应值:

$$y'=\frac{\int_{y\in Y}yB'(y)\mathrm{d}y}{\int_{y\in Y}B'(y)\mathrm{d}y}\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_iB'(y_i)h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}B'(y_i)h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i(\bigvee\limits_{k=1}^{n}R_{12}(A_k(x'),B_k(y_i)))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\bigvee\limits_{k=1}^{n}R_{12}(A_k(x'),B_k(y_i)))h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i(\bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}R_{12}(A_k(x'),0)\vee R_{12}(A_i(x'),1))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}R_{12}(A_k(x'),0)\vee R_{12}(A_i(x'),1))h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha y_ih_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_ih_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i.$$

当$x'\notin E_{\rm y}$时, 则$E_{\rm y}$为空集, 此时$B'(y)\equiv 0$. 综合以上两个情况, 便得到要证的结论.　　证毕.

同理可证以下结论:

定理 5　在定理2的条件下, 关于Kleene蕴涵算子族, MISO的TI算法模糊系统具有与定理2相同的结论.

6 基于模糊熵三I算法模糊系统及其响应函数(Fuzzy systems and their response functions based on fuzzy entropy triple I method)

在具体讨论基于模糊熵三I算法的模糊系统的响应性能之前, 先回顾与模糊熵三I算法有关的一些知识.

定义 2[15]　FMP问题的模糊熵三I算法的基本思路是: 已知$A, A^*\in F(X), B\in F(Y)$, 寻求$F(Y)$中所有使得式(1)取得最大值的模糊集中模糊熵最大$B^*$.

引理 2[16]　对于任何关于第二变量不减的蕴涵算子R, 若FMP问题的R-型三I解存在且为$\bar{B}^*$, 则$B^*(y)=\frac{1}{2}\vee\bar{B}^*(y)$为FMP问题的$R$-型模糊熵三I解. 若$R$是正则蕴涵算子, 则

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}(T(T(\alpha,R(A(x),B(y))),A^*(x)))\vee\frac{1}{2},\quad y\in Y.\tag{8}$$

由于$R_1 \sim R_{12}$关于第二变量不减, 式(1)中的蕴涵算子为$R_1 \sim R_{12}$时, 最大值都为1, 基于以上的结论, 不难理解FMP问题的基于算子$R_1 \sim R_{12}$的模糊熵三I解都存在, 并得到以下一个有用的结论.

引理 3 FMP问题的基于$R_1 \sim R_{12}$的模糊熵三I解为:

$$B^*(y)=\bigvee_{x\in X}(T(T(1,R(A(x),B(y))),A^*(x)))\vee\frac{1}{2},\quad y\in Y. \tag{9}$$

参照定理1, 2的证明, 有以下的结论:

定理 6 在定理1(或定理2)的条件下, 关于正则蕴涵算子和$R_1 \sim R_{12}$, SISO(MISO)的FETI算法模糊系统均近似为一个阶跃响应函数.

根据以上的讨论, 知道FMP问题的基于Zadeh算子($R_{\mathrm{z}}(x,y)=(1-x)\vee(x\wedge y)$)的模糊熵三I算法的解是存在的, 且为

$$B^*(y)=\bigvee_{\substack{x\in E_{\mathrm{y}}\\ R_{\mathrm{z}}(A(x),B(y))\geqslant\frac{1}{2}}}(A^*(x)\wedge R_{\mathrm{z}}(A(x),B(y)))\vee\frac{1}{2},$$

其中$E_{\mathrm{y}}=\{x\in X|1-A^*(x)<R_{\mathrm{z}}(x,y)\}$. 参照证明基于Zadeh算子TI算法模糊系统响应性能的证明过程[8], 注意到$\bigvee\limits_{k=1}^{n}(1-A_k(x'))\vee A_i(x')\geqslant 1-A_i(x')\geqslant\frac{1}{2}$, 由此得到以下结论:

定理 7 在定理1(或定理2)的条件下, 对于Zadeh算子而言, SISO(或MISO)的FETI算法模糊系统与SISO(或MISO)的TI算法模糊系统的响应性能是一样的.

7 模糊系统中推理与聚合次序的关系(Relation of inference and aggregation order of fuzzy systems)

在前面几节中, 采用的推理方式是先聚合后推理, 下面讨论当采用先推理后聚合时模糊系统的响应能力. 根据左连续三角模的定义, 结合前面的讨论过程, 下面的结论明显成立.

定理 8 在定理1(定理2)的条件下, 关于正则蕴涵算子, TIS算法、FETI算法模糊系统的插值表示与推理和聚合的次序交换无关.

接下来探讨在采用先推理后聚合时, 由$R_1 \sim R_{12}$算子的FETI算法、TIS算法设计的模糊系统的响应性能. 因篇幅有限, 这里只以基于R_1算子SISO的TIS算法模糊系统的证明为例, 其余可类似验证.

对于基于R_1算子SISO的TIS算法模糊系统, 在定理1的条件下, 对于给定的确切输入x', 有

$$B'(y)=\bigvee_{i=1}^{n}(T_1(\alpha,R_1(A_i(x'),B_i(y))),$$

再根据式(5), 得到确切响应量y', 令:

$$h_1=y_1-c, h_i=y_i-y_{i-1}, i=2,3,\cdots,n,$$

且$h=\max\{h_i|1\leqslant i\leqslant n\}$, 由定积分的定义, 得到

$$y'=\frac{\int_{y\in Y}yB'(y)\mathrm{d}y}{\int_{y\in Y}B'(y)\mathrm{d}y}\approx\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_iB'(y_i)h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}B'(y_i)h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i(\bigvee\limits_{k=1}^{n}T_1(\alpha,R_1(A_k(x'),B_k(y_i))))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\bigvee\limits_{k=1}^{n}T_1(\alpha,R_1(A_k(x'),B_k(y_i)))h_i}=$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_i(\bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}T_1(\alpha,R_1(A_k(x'),0))\bigvee T_1(\alpha,R_1(A_i(x'),1)))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\bigvee\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}T_1(\alpha,R_1(A_k(x'),0))\bigvee T_1(\alpha,R_1(A_i(x'),1)))h_i}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}y_ih_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}h_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{y_n-c}y_i.$$

所以可总结成以下的结论:

定理 9 在定理1(定理2)的条件下, 关于$R_1 \sim R_{11}$, TIS算法模糊系统的插值表示与推理和聚合的次序交换无关.

同理可得下面的结论:

定理 10 在定理1(定理2)的条件下, 关于R_{z}, R_{12}, FETI算法模糊系统的插值表示与推理和聚合的次序交换无关.

8 规则合成方法采用交情形时TI算法模糊系统及其响应函数(Fuzzy systems generated by inference rules of combination of intersection and their response function)

前面在分析模糊系统的响应性能时, 规则组聚合采用"或", 实际上, 有许多学者采用"与"作为聚合, 如著名的Zadeh算法和Dubois-Prade算法. 由于R_{11}算子族的任一算子是线性算子, 计算简便, 便于应用, 给实际应用提供了一些选择的模型, 选

取带参数的算子族会使结论更加明朗化, 决策尽量减少盲动性. 同时, 由于正则蕴涵算子具有优良的性质[20], 所以这里以R_{11}算子族和正则蕴涵算子为例, 来讨论当规则组聚合采用"与"时模糊系统的响应性能, 将会得到两个有趣的结论.

定理 11　在定理1的条件下, 当规则组聚合被理解为"与"的时候, 存在一组基函数$A' = \{A'_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$, 使得关于SISO的基于$R_{11}$算子族的TI算法和任意的正则蕴涵算子的TIS算法模糊系统近似为以A'_i 为基函数的一元分段插值函数$F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} A'_i(x)y_i$.

证　结合定理1, 2的证明过程, 会很容易理解本定理中关于正则蕴涵算子的结论. 以下给出关于基于R_{11}算子族的结论的证明过程. 根据T_{11}的表达式[13], FMP 问题的关于R_{11}算子族三I算法解:

$$B^*(y) = \bigvee_{x\in X}(T_{11}((R_{11}(A(x), B(y))), A^*(x))),\quad y\in Y.$$

当聚合采用"与"时, 有

$$B'(y) = R_{11}(x', y) = \bigwedge_{i=1}^{n} R_{11}(A_i(x'), B_i(y)),$$

所以

$$y' = \frac{\int_{y\in Y} yB'(y)\mathrm{d}y}{\int_{y\in Y} B'(y)\mathrm{d}y} \approx \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_iB'(y_i)h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} B'(y_i)h_i} =$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i(\bigwedge\limits_{k=1}^{n} R_{11}(A_k(x'), B_k(y_i)))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\bigwedge\limits_{k=1}^{n} R_{11}(A_k(x'), B_k(y_i)))h_i} =$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i(\bigwedge\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} R_{11}(A_k(x'), 0)\bigwedge R_{11}(A_i(x'), 1))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\bigwedge\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} R_{11}(A_k(x'), 0)\bigwedge R_{11}(A_i(x'), 1))h_i} =$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i(\bigwedge\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (1 - A_k(x'))h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}(\bigwedge\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (1 - A_k(x'))h_i} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x')(\bigwedge_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (1 - A_k(x')))y_i =$$

$$\sum_{i=1}^{n} A'_i(x')y_i,$$

其中:

$$\alpha_i(x') = \frac{h_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}\bigwedge\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (1 - A_k(x'))h_i},$$

$$A'_i(x') = \alpha_i(x')(\bigwedge_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} (1 - A_k(x'))).$$

取$F(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} A'_i(x)y_i$, 显然这是以$A'_i$为基函数的一元分段插值函数.　　证毕.

定理 12　在定理2的条件下, 当规则组聚合被理解为"与"的时候, 存在一组基函数$\phi' = \{\phi'_i\}_{(1\leqslant i\leqslant n)}$, 使得关于MISO的基于$R_{11}$算子族的TI算法和任意的正则蕴涵算子的TIS算法模糊系统近似为以ϕ'_i为基函数的二元分段插值函数:

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \phi'_i(x, y)z_i.$$

9　结论(Conclusions)

本文在已有文献[8, 9]的基础上, 首次讨论了在两种推理规则情形下由三I支持度方法和模糊熵三I算法设计的模糊系统的响应能力, 所得结果进一步丰富与完善了对三I方法的研究. 采用的是根据这两种方法的一般计算公式来讨论本文的结果, 而已有的工作主要是根据每个蕴涵算子的三I算法的计算公式来解决模糊系统的响应能力这一问题, 所以解决问题的思路更加广泛、结果更有代表性. 已有文献的许多结果都可以作为本文的特例. 主要结果如下:

1) 基于三I支持度算法和模糊熵三I算法的正则蕴涵算子和$R_1\sim R_{11}$所构成的模糊系统仅具有阶跃输出能力, 不适宜在实际模糊控制系统中使用.

2) 基于Zadeh算子的模糊熵三I算法的模糊系统的输出函数为拟合函数, 其有可能在实际模糊控制系统中使用.

3) 对于正则蕴涵算子和$R_1\sim R_{12}$, 基于三I支持度算法及模糊熵三I算法模糊系统的插值表示与推理和聚合的先后次序无关.

4) 基于算子族R_{11}的三I算法和正则蕴涵算子的三I支持度算法的模糊系统, 如果将规则组的"或"聚合改为"与"聚合, 则这时的模糊系统近似为一个一元分段(或分片)插值函数, 由于其具有函数逼近的泛性, 可考虑在实际模糊控制系统中使用. 只不过, 在实际应用中, "与"聚合情形并不常见.

以上的结果不难推广到多输入多输出的复杂

系统, 因为这将是多元向量值的插值问题.

参考文献(References):

[1] 李洪兴. 模糊控制的插值机理[J]. 中国科学(E辑), 1998, 28(3): 259 – 267.
(LI Hongxing. Interpolation mechanism of fuzzy control[J]. *Science of China, Series E*, 998, 28(3): 259 – 267.)

[2] 王国俊. 模糊推理的全蕴涵三I算法[J]. 中国科学, E辑, 1999, 29(1): 43 – 53.
(WANG Guojun. Full implicational triple I method for fuzzy reasoning[J]. *Science in China, Series E*, 1999, 29(1): 43 – 53.)

[3] 王国俊. 非经典数理逻辑与近似推理[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
(WANG Guojun. *Non-classical Mathematical Logic and Approximate Reasoning*[M]. Beijing: Science Press, 2000.)

[4] 王国俊, 刘华文, 宋建社. 三I方法综述——它的提出、发展、应用和逻辑版本[J]. 模糊系统与数学, 2006, 20(6): 1 – 14.
(WANG Guojun, LIU Huawen, SONG Jianshe. A survey of triple I method—its origin, development, application and logical versions[J]. *Fuzzy systems and mathematics,* 2006, 20(6): 1 – 14.)

[5] 李洪兴, 彭家寅, 王加银. 常见模糊蕴涵算子的模糊系统及其响应函数[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(3): 341 – 347.
(LI Hongxing, PENG Jiayin, WANG Jiayin. Fuzzy systems and their response functions based on commonly used fuzzy implication operators[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(3): 341 – 347.)

[6] 侯健, 李洪兴, 王加银. 两类模糊系统具有插值性的充要条件[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 287 – 291.
(HOU Jian, LI Hongxing, WANG Jiayin. Sufficient and necessary conditions for fuzzy systems possessing interpolation property[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 287 – 291.)

[7] 李洪兴, 尤飞, 彭家寅, 等. 基于某些模糊蕴涵算子的模糊控制器及其响应函数[J]. 自然科学进展, 2003, 13(10): 1073 – 1077.
(LI Hongxing, YOU Fei, PENG Jiayin, et al. Fuzzy controllers based on some fuzzy implication operators and their response functions[J]. *Progress in Natural Science*, 2003, 13(10): 1073 – 1077.)

[8] 李洪兴, 彭家寅, 王加银, 等. 基于三I算法的模糊系统及其响应性能[J]. 系统科学与数学, 2005, 25(5): 578 – 590.
(LI Hongxing, PENG Jiayin, WANG Jiayin, et al. Fuzzy systems based on triple I algorithm and their response ability[J]. *Journal of Systems Sciences and Mathematical Sciences,* 2005, 25(5): 578 – 590.)

[9] 侯健, 尤飞, 李洪兴. 由三I算法构造的一些模糊控制器及其响应能力[J]. 自然科学进展, 2005, 15(1): 29 – 37.
(HOU Jian, YOU Fei, LI Hongxing. Fuzzy controllers constructed by triple I method based on some fuzzy implication operators and their response functions[J]. *Progress in Natural Science*, 2005, 15(1): 29 – 37.)

[10] WANG S M. A fuzzy logic for the revised drastic product t-norm[J]. *Soft Computing*, 2007, 11(6): 585 – 590.

[11] 吴望名. 参数Kleene系统中的广义重言式[J]. 模糊系统与数学, 2000, 14(1): 1 – 7.
(WU Wangming. Generalized tautologies in parametric Kleene's systems[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2000, 14(1): 1 – 7.)

[12] 王国俊, 兰蓉. 系统H_α中的广义重言式理论[J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2003, 31(2): 1 – 11.
(WANG Guojun, LAN Rong. Generalized tautologies of systems H_α[J]. *Journal of Shanxi Normal University(Natural Science Edition)*, 2003, 31(2): 1 – 11.)

[13] 张兴芳, 孟广武, 张安英. 蕴涵算子族及其应用[J]. 计算机学报, 2007, 30(3): 448 – 453.
(ZHANG Xingfang, MENG Guangwu, ZHANG Anying. Families of implication operators and their applications[J]. *Chinese Journal of Computer*, 2007, 30(3): 448 – 453.)

[14] KLEMENT E P, MESIAR R , RAP E. *Triangular Norms*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

[15] 郭方芳, 陈图云, 夏尊铨. 基于极大模糊熵原理的模糊推理三I算法[J]. 模糊系统与数学, 2003, 17(4): 55 – 59.
(GUO Fangfang, CHEN Tuyun, XIA Zunquan. Triple I methods for fuzzy reasoning based on maximum fuzzy entropy principle[J]. *Fuzzy Systems and Mathematics*, 2003, 17(4): 55 – 59.)

[16] 彭家寅. FMP与FMT问题的模糊熵三I算法及其还原性[J]. 系统工程理论与实践, 2005, 25(4): 76 – 82.
(PENG Jiayin. Fuzzy entropy triple I methods for FMP and FMT problems and their reductivity[J]. *Systems Engineering-theory & Practice*, 2005, 25(4): 76 – 82.)

[17] PEI D W. Unified full implication algorithms of fuzzy reasoning[J]. *Information Sciences,* 2008, 178(2): 520 – 530 .

[18] LIU H W, WANG G J. Triple I method based on pointwise sustaining degrees[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2008, 55(11): 2680 – 2688.

[19] LI Y M, SHI Z K, LI Z H. Approximation theory of fuzzy systems based upon genuine many-valued implications-SISO cases[J]. *Fuzzy sets and systems*, 2002, 130(2): 147 – 157.

[20] 王国俊. 数理逻辑引论与归结原理[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
(WANG Guojun. *Introduction to Mathematical Logic and Resolution Principle*[M]. Beijing: Science Press, 2006.)

作者简介:

潘海玉 (1976—), 男, 博士研究生, 研究方向为模糊逻辑与模糊推理、嵌入式软件, E-mail: phyu76@sohu.com;

裴道武 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 长期从事模糊逻辑与模糊推理、粗糙集理论等方面的研究, E-mail: peidw@163.com;

陈仪香 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 长期从事软件形式化理论、嵌入式系统、知识科学与知识发现等方面的研究, E-mail: yxchen@sei.ecnu.edu.cn.