

广义性能指标下T-S模糊系统的鲁棒可靠控制

陶洪峰¹, 胡寿松²

(1. 江南大学 通信与控制工程学院, 江苏 无锡 214122; 2. 南京航空航天大学 自动化学院, 江苏 南京 210016)

摘要: 针对一类具有输入及输出端扰动的T-S模糊系统, 在线性矩阵不等式区域内定义了非线性系统的稳态及动态广义性能指标, 提出了线性矩阵不等式(LMI)方法下可靠输出反馈控制器存在的充分条件, 从而保证闭环系统在传感器或执行器发生结构性故障时的稳态及动态性能, 且始终满足基于 L_2/L_∞ 范数理论的鲁棒性能, 并利用投射引理引入附加阵, 解耦该充分条件中的控制器变量与相关Lyapunov函数变量, 增加设计的自由度. F-16歼击机的纵向通道控制仿真表明了方法的有效性.

关键词: T-S模糊系统; 鲁棒控制; 可靠控制; LMI 广义性能指标;

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust reliable control of T-S fuzzy systems under the generalized performance indexes

TAO Hong-feng¹, HU Shou-song²

(1. School of Communication and Control Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China;

2. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

Abstract: For a class of T-S fuzzy systems with disturbances in the inputs and outputs, the generalized steady and dynamic performance indices of nonlinear systems are defined in the linear matrix inequality region, and the sufficient conditions for the existence of a reliable output feedback controllers are derived in terms of the LMIs, so that the closed-loop systems can maintain steady and dynamic performances even when the sensors or the actuators are failed, and the mixed L-two/L-infinity robust performance can always be held. Under the proposed sufficient conditions, an extra matrix is introduced by the projection lemma, and the variables between the Lyapunov function and the controllers are decoupled for increasing the degrees of the freedom in the design process. The simulation of the longitude control for the F-16 fighter indicates the effectiveness of the proposed method.

Key words: T-S fuzzy systems; robust control; reliable control; generalized performance indexes; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

现代工业系统在控制过程中的动态特性是衡量一控制方案是否优越的重要指标. 线性系统的稳态及动态性能可以从极点所表达的运动模态来描述, 但对于非线性系统, 该如何定义和约束其稳态和动态性能, 目前所涉及文献还较少.

首先, 基于T-S模糊模型的非线性系统控制是当前研究热点^[1~4], 文献[1,2]研究了系统在正常情形下的鲁棒控制, 且多为状态反馈, 但由于系统状态一般不可测且易受扰, 因此, 有扰输出反馈控制的研究更具有应用价值. 文献[3,4]分别研究了系统在传感器或执行器故障时的可靠控制问题, 但仅讨论了系统的稳态和基于 L_2 范数的 H_∞ 鲁棒性能, 忽略了动

态性能, 而且由于基于 L_∞ 范数的鲁棒控制方法并不要求扰动的能量有界, 会更适用于外扰持续存在的工程实际. 其次, 众多基于LMI方法的控制器设计一般都要求相关Lyapunov函数变量具有对称正定的形式, 其相关耦合性限制了控制器的求解范围^[5].

本文针对一类具有扰动的T-S模糊系统, 首先通过Lyapunov函数变换定义了非线性系统状态量和变化量所表征的动态性能, 引入基于混合 L_2/L_∞ 范数的鲁棒性能指标, 提出了基于LMI的鲁棒可靠输出反馈控制器的设计方法, 并利用投射引理引入一般形式的附加阵, 摒弃控制器变量要依赖Lyapunov函数对称正定阵的要求, 增加设计自由度, 保证整个系统在正常、以及传感器或执行器发生故障时仍然能

够满足一定的稳态、动态及鲁棒性能指标. 最后, 通过仿真实例验证方法的有效性.

在本文中: $\Theta(h)$ 表示 $\sum_{i=1}^q h_i(z(t))\Theta_i$ 的缩写, $\otimes$ 表示Kronecker积; 对称阵中, “*”表示对应块的转置阵.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下一类T-S模糊系统:

Rule i : IF $z_1(t)$ is F_1^i AND $\cdots$ $z_v(t)$ is F_v^i THEN

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t) + E_i \mathbf{w}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = C_i(\mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)), i = 1, 2, \cdots, q. \quad (1)$$

式中: q 为模糊规则数, $\mathbf{z}(t) = [z_1(t) \cdots z_v(t)]^T \in \mathbb{R}^v$ 为模糊推理前件, F_j^i 为模糊集合. $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^r$ 分别表示状态和输出向量; $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$ 表示系统正常和考虑执行器或传感器发生结构性故障时的控制输入, 即 $\mathbf{u}(t) \in \{\mathbf{u}_o(t), \mathbf{u}_f(t), \mathbf{u}_s(t)\}$; $\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示系统的输入和输出端扰动. A_i, B_i, C_i 和 E_i 是维数适当的实矩阵, 其中 B_i 列满秩或 C_i 行满秩.

在采用相同规则前件的情形下, 当系统(1)正常时, 设计并行分布补偿(PDC)输出反馈控制器, 清晰化后可得整体控制器

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_o(t) &= \sum_{i=1}^q h_i(\mathbf{z}(t)) K_i \mathbf{y}(t) = \\ &\sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^q h_i(\mathbf{z}(t)) h_j(\mathbf{z}(t)) [K_i C_j \mathbf{x}(t) + K_i C_j \mathbf{v}(t)]. \end{aligned} \quad (2)$$

其中 K_i 表示待定的局部增益矩阵. 而

$$\begin{aligned} h_i(\mathbf{z}(t)) &= \omega_i(\mathbf{z}(t)) / \sum_{i=1}^q \omega_i(\mathbf{z}(t)), \\ \omega_i(\mathbf{z}(t)) &= \prod_{j=1}^v F_j^i(z_j(t)). \end{aligned}$$

其中 $F_j^i(z_j(t))$ 表示 $z_j(t)$ 属于模糊集合 F_j^i 的隶属度, 而 $\omega_i(\mathbf{z}(t))$ 表示第 i 条规则的权重. 显然

$$\omega_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^q \omega_i(\mathbf{z}(t)) > 0, i = 1, 2, \cdots, q,$$

并且 $h_i(\mathbf{z}(t)) \geq 0, \sum_{i=1}^q h_i(\mathbf{z}(t)) = 1, i = 1, 2, \cdots, q$.

设执行器或传感器的故障模型为

$$\begin{cases} \mathbf{u}_f(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\mathbf{z}(t)) M_f K_i \mathbf{y}(t), \\ \mathbf{u}_s(t) = \sum_{i=1}^q h_i(\mathbf{z}(t)) K_i M_s \mathbf{y}(t). \end{cases} \quad (3)$$

其中 M_f 和 M_s 分别为执行器和传感器故障阵. 定义为

$$M_f = \text{diag}\{m_{f1}, m_{f2}, \cdots, m_{fp}\},$$

$$M_s = \text{diag}\{m_{s1}, m_{s2}, \cdots, m_{sr}\},$$

$$0 \leq \underline{m}_{fj} \leq m_{fj} \leq \bar{m}_{fj}, 0 \leq \underline{m}_{sl} \leq m_{sl} \leq \bar{m}_{sl},$$

$$j = 1, 2, \cdots, p, l = 1, 2, \cdots, r.$$

显然, 当 $m_{fj} = 0$ (或 $m_{sl} = 0$)时, 表示执行器(或传感器)的第 j (或 l)条通道完全失效; 当 $m_{fj} = 1$ (或 $m_{sl} = 1$)时, 表示执行器(或传感器)的第 j (或 l)条通道正常工作; 当 $\underline{m}_{fj} \leq m_{fj} \leq \bar{m}_{fj}$ (或 $\underline{m}_{sl} \leq m_{sl} \leq \bar{m}_{sl}$)时, 表示执行器(或传感器)的第 j (或 l)条通道部分失效. 引入下列阵对故障描述进行标准化处理^[6]. 令

$$M_{f0} = \text{diag}\{m_{f01}, m_{f02}, \cdots, m_{f0p}\},$$

$$J_f = \text{diag}\{j_{f1}, j_{f2}, \cdots, j_{fp}\},$$

$$L_f = \text{diag}\{l_{f1}, l_{f2}, \cdots, l_{fp}\},$$

$$|L_f| = \text{diag}\{|l_{f1}|, |l_{f2}|, \cdots, |l_{fp}|\},$$

$$M_{s0} = \text{diag}\{m_{s01}, m_{s02}, \cdots, m_{s0r}\},$$

$$J_s = \text{diag}\{j_{s1}, j_{s2}, \cdots, j_{sr}\},$$

$$L_s = \text{diag}\{l_{s1}, l_{s2}, \cdots, l_{sr}\},$$

$$|L_s| = \text{diag}\{|l_{s1}|, |l_{s2}|, \cdots, |l_{sr}|\},$$

其中:

$$m_{f0j} = (\bar{m}_{fj} + \underline{m}_{fj})/2,$$

$$j_{fj} = (\bar{m}_{fj} - \underline{m}_{fj})/(\bar{m}_{fj} + \underline{m}_{fj}),$$

$$l_{0j} = (m_{fj} - m_{f0j})/m_{f0j},$$

$$m_{s0j} = (\bar{m}_{sj} + \underline{m}_{sj})/2,$$

$$j_{sj} = (\bar{m}_{sj} - \underline{m}_{sj})/(\bar{m}_{sj} + \underline{m}_{sj}),$$

$$l_{sj} = (m_{sj} - m_{s0j})/m_{s0j},$$

而 $|\cdot|$ 表示对对角矩阵各元素取绝对值的运算, 则

$$\begin{cases} M_f = M_{f0}(I + L_f), |L_f| \leq J_f \leq I, \\ M_s = M_{s0}(I + L_s), |L_s| \leq J_s \leq I. \end{cases} \quad (4)$$

将 $\mathbf{u}(t) \in \{\mathbf{u}_o(t), \mathbf{u}_f(t), \mathbf{u}_s(t)\}$ 代入式(1)后可得

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \{A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h)\}\mathbf{x}(t) + \\ &[B(h)\bar{K}(h)C(h) \quad E(h)]\mathbf{d}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

其中:

$$\mathbf{d}(t) = [\mathbf{v}^T(t) \quad \mathbf{w}^T(t)]^T,$$

$$\bar{K}_j \in \{K_j, M_f K_j, K_j M_s\}.$$

定义 1^[7] 在复平面内, 若存在对称阵 L 和矩阵 M , 使得 $D = \{s \in \mathbb{C} : f_{D(s)} = L + sM + \bar{s}M^T < 0\}$, $f_{D(s)}$ 为特征函数, 则称 D 为线性矩阵不等式区域.

定义 2 对于二次稳定的系统(5), 当 $\mathbf{d}(t) = 0$ 时, 令 $z_1(t) = \|P_1^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(t)\|^2$, 其中 P_1 为对称正定阵,

若满足 $\dot{z}_1(t) < -\gamma z_1(t)$, $\alpha > 0$, 则系统至少以收敛率 γ 到达稳态值, 其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数.

定义 3 对于系统(5), 当 $\mathbf{d}(t) = 0$ 时, 令 $z_2(t) = \|P_2^{\frac{1}{2}} \dot{\mathbf{x}}(t)\|$, 其中 P_2 为对称正定阵, 若满足 $\zeta \int_0^{t_f} z_2(t) dt \leq \beta$, 其中 t_f 表示运行时间, ζ 和 β 均为正常数, 则 ζ 称为系统的动态变化率约束量.

定义 4 对于受外扰影响的系统(5), 若满足

$$\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty} \leq \mu \|\mathbf{x}(0)\| + \rho \|\mathbf{d}(t)\|_{\infty}, \forall \mathbf{d}(t) \in L_{\infty}, \quad (6)$$

则称该系统具有混合 L_2/L_{∞} 范数的鲁棒性能, 其中 $\|\mathbf{x}(t)\|_{\infty} \triangleq \sup_t \|\mathbf{x}(t)\|$, $t \in [0, \infty)$.

引理 1^[8] 对于定义1中中心在 $(-q, 0)$, 半径为 r 的 D 区域, 若存在对称正定阵 P 使得

$$L \otimes P + M \otimes (PA(h) + PB(h)\bar{K}(h)C(h)) + M^T \otimes (PA(h) + PB(h)\bar{K}(h)C(h))^T < 0, \quad (7)$$

则模糊系统(5)在外扰为零时渐近稳定.

引理 2^[9](投射引理) 对于对称阵 H , 当且仅当 $N_P^T H N_P < 0$, $N_Q^T H N_Q < 0$ 时, 存在矩阵 X , 使得 $H + P^T X^T Q + Q^T X P < 0$, 其中 P 和 Q 是给定的适维矩阵, N_P 和 N_Q 分别是由核空间 $\ker P$ 和 $\ker Q$ 的任意一组基向量作为列向量而构成的矩阵. 若 $\ker P$ 和 $\ker Q$ 中有一个是零空间, 则可忽略相应的矩阵不等式条件.

3 性能分析(Analysis of the performance)

定理 1 在中心为 $(-q, 0)$, 半径为 r 的区域 D 内, $q > r$, 若存在对称正定阵 P 和矩阵 $\bar{K}(h)$ 使得式(7)成立, 则系统(5)在外扰为零时渐近稳定, 且 $\gamma \in (2q - 2r, 2q + 2r)$, $\zeta = \sqrt{q^2 - r^2}/q$.

证 定义 Lyapunov 函数 $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)P\mathbf{x}(t)$, 其中 $P > 0$, 则在 $\mathbf{w}(t) = 0$, $\mathbf{v}(t) = 0$ 时, 有

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t)\{P[A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h)] + [A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h)]^T P\}\mathbf{x}(t). \quad (8)$$

根据引理1可知

$$[I \otimes \mathbf{x}^T(t)][L \otimes P + M \otimes (P(A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h))) + M^T \otimes (P(A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h)))^T][I \otimes \mathbf{x}(t)] < 0. \quad (9)$$

则当任意 $\mathbf{x}(t) \neq 0$ 时, 有

$$L \otimes 1 + M \otimes \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(\mathbf{x}(t))}{V(\mathbf{x}(t))} + M^T \otimes \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(\mathbf{x}(t))}{V(\mathbf{x}(t))} < 0. \quad (10)$$

在中心为 $(-q, 0)$, 半径为 r 的 LMI 区域 D 内, 若选

定矩阵 L 和 M , 并根据 Kronecker 积运算, 可得

$$\begin{bmatrix} -r & q + \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(\mathbf{x}(t))}{V(\mathbf{x}(t))} \\ q + \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(\mathbf{x}(t))}{V(\mathbf{x}(t))} & -r \end{bmatrix} < 0. \quad (11)$$

而式(11)进一步经 Schur 变换后可得

$$-r^2 + (q + \frac{1}{2} \frac{\dot{V}(\mathbf{x}(t))}{V(\mathbf{x}(t))})^2 < 0. \quad (12)$$

则根据定义2可知 $\dot{z}_1(t) < -\gamma z_1(t)$, 其中 $\gamma \in (2q - 2r, 2q + 2r)$. 因此当 $q > r$ 时, 系统必然稳定.

另外, 由于式(7)亦等价于

$$\begin{bmatrix} -rP & qP + (A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h))^T P \\ * & -rP \end{bmatrix} < 0. \quad (13)$$

经 Schur 变换后可得

$$(q^2 - r^2)P + q\{P(A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h)) + (A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h))^T P\} + (A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h))^T P(A(h) + B(h)\bar{K}(h)C(h)) < 0. \quad (14)$$

在式(14)左右两边分别乘以 $\mathbf{x}^T(t)$ 和 $\mathbf{x}(t)$ 后可知

$$q\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < -\dot{\mathbf{x}}^T(t)P\dot{\mathbf{x}}(t) - (q^2 - r^2)V(\mathbf{x}(t)). \quad (15)$$

进一步可得

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -2\zeta \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^T(t)P\dot{\mathbf{x}}(t)} \sqrt{V(\mathbf{x}(t))}. \quad (16)$$

其中 $\zeta = \sqrt{q^2 - r^2}/q$. 则

$$\frac{1}{\sqrt{V(\mathbf{x}(t))}} dV(\mathbf{x}(t)) \leq -2\zeta \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^T(t)P\dot{\mathbf{x}}(t)} dt. \quad (17)$$

对上式两端积分并由于 $\sqrt{V(\mathbf{x}(t_f))} \geq 0$, 因此

$$\zeta \int_0^{t_f} \sqrt{\dot{\mathbf{x}}^T(t)P\dot{\mathbf{x}}(t)} dt \leq \sqrt{V(\mathbf{x}(0))}. \quad (18)$$

根据定义3可知 $\zeta \int_0^{t_f} z_2(t) dt \leq \sqrt{V(\mathbf{x}(0))} = \beta$, 因此系统在系统稳定时, $\zeta = \sqrt{q^2 - r^2}/q$. 证毕.

接下来考虑构造控制器(2)使得系统(5)稳定, 同时满足如式(6)形式的鲁棒性能指标.

定理 2 对于给定的正常数 α 和 β , 如果存在对称正定阵 P 和非奇异矩阵 M 和矩阵 $N_j (j = 1, 2, \dots, q)$, 使得以下不等式成立:

$$\Omega_{ijl} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_1 & B_i N_j C_l & P E_i \\ * & -\beta I & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \quad i, j, l = 1, 2, \dots, q. \quad (19)$$

其中: $\bar{\Delta}_1 = A_i^T P + P A_i + B_i N_j C_l + C_l^T N_j^T B_i + \alpha P$,

$B_i M = P B_i$, 则存在控制器 $\bar{K}_j = M^{-1} N_j$, 使得系统(5)稳定, 同时满足鲁棒性能指标(6).

证 定义Lyapunov函数 $V(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t)$, 同时考虑 $\mathbf{w}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ 的影响, 可得

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \Omega \tilde{\mathbf{x}}(t) - \alpha \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t) + \beta \mathbf{d}^T(t) \mathbf{d}(t),$$

其中

$$\Omega = \begin{bmatrix} \Delta_1 & P B(h) K(h) C(h) & P E(h) \\ * & -\beta I & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix}, \quad (20)$$

且

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}^T(t) &= [\mathbf{x}^T(t) \quad \mathbf{d}^T(t)]^T, \\ \Delta_1 &= (A(h) + B(h) K(h) C(h))^T P + P(A(h) + B(h) K(h) C(h)) + \alpha P, \end{aligned}$$

则当 $\Omega < 0$ 成立时, 有

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\alpha \mathbf{x}^T(t) P \mathbf{x}(t) + \beta \mathbf{d}^T(t) \mathbf{d}(t). \quad (21)$$

根据文献[1]可得

$$\begin{aligned} \|P^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(t)\|^2 &\leq \\ e^{-\alpha t} \|P^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(0)\|^2 &+ \beta \int_0^t e^{-\alpha \tau} \|\mathbf{d}(t-\tau)\|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (22)$$

则由式(21)(22)和 L_∞ 范数性质即可得到

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [0, \infty)} \{ \lambda_{\min}(P) \|\mathbf{x}(t)\|^2 \} &\leq \\ \sup_{t \in [0, \infty)} \{ \sup_{\tau \in [0, t)} [e^{-\alpha t} \|P^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}(0)\|^2 &+ \\ \frac{\beta}{\alpha} \|\mathbf{d}(t-\tau)\|^2 (1 - e^{-\alpha t})] \}. \end{aligned} \quad (23)$$

因此

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_\infty &\leq \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \lambda_{\max}(P)} \|\mathbf{x}(0)\| + \\ &\sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \alpha^{-1} \beta} \|\mathbf{d}(t)\|_\infty. \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $\lambda_{\max}(P)$ 和 $\lambda_{\min}(P)$ 分别表示矩阵 P 的最大和最小特征值. 则

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \lambda_{\max}(P)}, \\ \rho_1 &= \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \alpha^{-1} \beta}. \end{aligned}$$

由于 B_i 满足列满秩条件, 则必存在非奇异矩阵 M 使得 $B_i M = P B_i$ 成立^[10], 令 $\bar{K}_j = M^{-1} N_j$, 代入式(20)后即可得式(19). 证毕.

对于定理2所述问题, 其存在如下等价定理.

定理3 对于给定的正常数 α 和 β , 如果存在对称正定阵 $X = P^{-1}$, 非奇异矩阵 M 和矩阵 $N_j (j = 1, 2, \dots, q)$, 使得以下不等式成立:

$$\bar{\Omega}_{ijl} = \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_2 & B_i N_j C_l & E_i X \\ * & -\beta I & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} < 0, \quad i, j, l = 1, 2, \dots, q. \quad (25)$$

其中:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_2 &= X A_i^T + A_i X + B_i N_j C_l + C_l^T N_j^T B_i^T, \\ C_l X &= M C_l, \end{aligned}$$

则存在输出反馈控制器 $\bar{K}_j = N_j M^{-1}$ 使得闭环系统(5)稳定, 同时满足混合 L_2/L_∞ 范数鲁棒性能指标(6), 其中:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \lambda_{\max}(P)}, \\ \rho_2 &= \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P) \lambda_{\max}(P^2) \alpha^{-1} \beta}. \end{aligned}$$

4 鲁棒可靠控制器设计(Design of robust reliable controller)

当传感器发生故障时, 存在以下结论.

定理4 对于给定的正常数 α 和 β , 如果存在对称正定阵 P 和非奇异矩阵 M , 矩阵 $N_j (j = 1, 2, \dots, q)$ 和正实变量 $\varepsilon_i (i = 1, 2, 3)$ 使得式(26)~(31)成立:

$$\Theta_1 = \begin{bmatrix} -rP + \varepsilon_3 C_i^T C_i & qG^T + A_i^T G^T + C_i^T N_i^T B_i^T & B_i N_i \\ * & -r(G^T + G - P) & 0 \\ * & * & -\varepsilon_3 J_s^{-1} \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, q, \quad (26)$$

$$\Theta_2 = \begin{bmatrix} -3rP + \varepsilon_3 (2C_i^T C_i + C_j^T C_j) & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{13} \\ * & -3r(G^T + G - P) & 0 \\ * & * & -3\varepsilon_3 J_s^{-1} \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, q, j \neq i, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \Theta_3 &= \begin{bmatrix} -6rP + 2\varepsilon_3 (C_i^T C_i + C_j^T C_j + C_l^T C_l) & \tilde{S}_{12} & \tilde{S}_{13} \\ * & -6r(G^T + G - P) & 0 \\ * & * & -6\varepsilon_3 J_s^{-1} \end{bmatrix} < 0, \\ i &= 1, \dots, q-2, j = i+1, \dots, q-1, l = j+1, \dots, q, \end{aligned} \quad (28)$$

$$F_1 = \begin{bmatrix} -G^T - G & \bar{Q}_{12} & B_i N_i C_i & G^T E_i & B_i N_i & B_i N_i \\ * & -2\tau P + \varepsilon_1 C_i^T C_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\beta I + \varepsilon_2 C_i^T C_i & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\beta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_1 J_s^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -\varepsilon_2 J_s^{-1} \end{bmatrix} < 0, i = 1, 2, \dots, q, \quad (29)$$

$$F_2 = \begin{bmatrix} -3G^T - 3G & \tilde{Q}_{12} & \tilde{Q}_{13} & \tilde{Q}_{14} & \tilde{Q}_{15} & \tilde{Q}_{16} \\ * & \tilde{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \tilde{Q}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -3\beta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -3\varepsilon_1 J_s^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -3\varepsilon_2 J_s^{-1} \end{bmatrix} < 0, i, j = 1, 2, \dots, q, j \neq i, \quad (30)$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -6G^T - 6G & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{13} & \hat{Q}_{14} & \hat{Q}_{15} & \hat{Q}_{16} \\ * & \hat{Q}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \hat{Q}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -6\beta I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -6\varepsilon_1 J_s^{-1} & 0 \\ * & * & * & * & * & -6\varepsilon_2 J_s^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (31)$$

$$i = 1, \dots, q-2, j = i+1, \dots, q-1, l = j+1, \dots, q.$$

其中:

$$\bar{S}_{12} = 3qG^T + 2A_i^T G^T + A_j^T G^T + C_j^T N_i^T B_i^T + C_i^T N_j^T B_i^T + C_i^T N_i^T B_j^T,$$

$$\bar{S}_{13} = B_i N_i + B_i N_j + B_j N_i,$$

$$\tilde{S}_{12} = 6qG^T + 2(A_i^T + A_j^T + A_l^T)G^T + C_l^T N_j^T B_i^T + C_j^T N_l^T B_i^T + C_l^T N_i^T B_j^T + C_i^T N_l^T B_j^T + C_j^T N_i^T B_l^T + C_i^T N_j^T B_l^T,$$

$$\tilde{S}_{13} = B_i N_j + B_i N_l + B_j N_i + B_j N_l + B_l N_j + B_l N_i;$$

$$\bar{Q}_{12} = G^T A_i + B_i N_i C_i + P_{s1} + (0.5\alpha + \tau)G^T,$$

$$\tilde{Q}_{12} = 2G^T A_i + G^T A_j + B_i N_i C_j + B_i N_j C_i + B_j N_i C_i + 3P + 3(0.5\alpha + \tau)G^T,$$

$$\tilde{Q}_{13} = B_i N_i C_j + B_i N_j C_i + B_j N_i C_i,$$

$$\tilde{Q}_{14} = 2G^T E_i + G^T E_j,$$

$$\tilde{Q}_{15} = \tilde{Q}_{16} = B_i N_i + B_i N_j + B_j N_i,$$

$$\tilde{Q}_{22} = -6\tau P + \varepsilon_1 (2C_i^T C_i + C_j^T C_j),$$

$$\tilde{Q}_{33} = -3\beta I + \varepsilon_2 (2C_i^T C_i + C_j^T C_j);$$

$$\hat{Q}_{12} = 2G^T (A_i + A_j + A_l) + B_i N_j C_l + B_i N_l C_j + B_j N_l C_i + B_l N_i C_j + B_l N_j C_i + 6P + (3\alpha + 6\tau)G^T,$$

$$\hat{Q}_{13} = B_i N_j C_l + B_i N_l C_j + B_j N_l C_i + B_j N_i C_l + B_l N_i C_j + B_l N_j C_i,$$

$$\hat{Q}_{14} = 2G^T (E_i + E_j + E_l),$$

$$\hat{Q}_{15} = \hat{Q}_{16} = B_i N_j + B_i N_l + B_j N_l + B_j N_i + B_l N_i + B_l N_j,$$

$$\hat{Q}_{22} = -6\tau P + 2\varepsilon_1 (C_i^T C_i + C_j^T C_j + C_l^T C_l),$$

$$\hat{Q}_{33} = -3\beta I + 2\varepsilon_2 (C_i^T C_i + C_j^T C_j + C_l^T C_l);$$

$$GB_i = B_i M, q > r,$$

τ 为可调参数, 则在中心为 $(-q, 0)$, 半径为 r 的线性矩阵不等式区域 D 内, 存在控制器 $K_j = M^{-1}N_j M_{s0}^{-1}$ 使得系统(5)在传感器发生结构性故障时仍然保持稳定, 且在运行过程中 $\gamma \in (2q - 2r, 2q + 2r)$, $\zeta = \sqrt{q^2 - r^2}/q$, 同时基于混合 L_2/L_∞ 范数的鲁棒性能指标参数:

$$\mu_1 = \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\lambda_{\max}(P)},$$

$$\rho_1 = \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\alpha^{-1}\beta}.$$

证 从定理1可知

$$-r^3 P + r((A(h) + B(h)K(h)C(h)) + qI)^T \times P((A(h) + B(h)K(h)C(h)) + qI) < 0 \quad (32)$$

成立,即

$$\begin{aligned} & [rI \ (A(h)+B(h)K(h)C(h))^T+qI] \begin{bmatrix} -rP & 0 \\ 0 & rP \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} rI \\ (A(h)+B(h)K(h)C(h))+qI \end{bmatrix} < 0. \\ & \text{在核空间内} \\ & [((A(h)+B(h)K(h)C(h))+qI) \ -rI] \times \\ & \begin{bmatrix} rI \\ (A(h)+B(h)K(h)C(h))+qI \end{bmatrix} = 0. \quad (33) \end{aligned}$$

由引理2(投射引理)可得

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -rP & 0 \\ 0 & rP \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} G[(A(h)+B(h)K(h)C(h))+qI \ -rI] + \\ & \begin{bmatrix} (A(h)+B(h)K(h)C(h))^T+qI \\ -rI \end{bmatrix} G^T \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} < 0. \quad (34) \end{aligned}$$

整理式(34),且当传感器发生结构性故障时,将控制器 $\bar{K}(h) = K(h)M_s = K(h)M_{s0}(I+L_s)$ 代入式(34),由于 $GB_i = B_iM$ 和 $K_j = M^{-1}N_jM_{s0}^{-1}$,则根据矩阵变换,并利用代数性质减少LMI个数,可得式(26)~(28)成立.

接下来,根据定理2中的式(25)和投射引理可知,由于 $\theta(h) \cdot \Phi(h) = 0$,其中:

$$\begin{aligned} & \theta(h) = \\ & [-I \ (A(h)+0.5\alpha+\tau I) \ B(h)K(h)C(h) \ E(h)], \\ & \Phi(h) = \\ & \begin{bmatrix} A(h)+0.5\alpha+\tau I & B(h)K(h)C(h) & E(h) \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} & \Phi^T(h) \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & -2\tau P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} \Phi(h) = \\ & \begin{bmatrix} \Xi_1(h) & PB(h)K(h)C(h) & PE(h) \\ * & -\beta I & 0 \\ * & * & -\beta I \end{bmatrix} < 0. \quad (35) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi_1(h) = & (A(h)+B(h)K(h)C(h))^T P + \\ & P(A(h)+B(h)K(h)C(h)) + \alpha P, \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & P & 0 & 0 \\ P & -2\tau P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} G\theta(h) + \\ & \theta^T(h)G^T \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < 0. \quad (36) \end{aligned}$$

整理式(36),并类似于式(26)~(28)的证明,可得式(29)~(31)成立. 证毕.

执行器故障时的可靠控制器设计不再赘述.

从定理4可知,证明过程中要求 B_i 列满秩的条件在工程中往往可通过近似建模方法来满足.而且类似于文献[11]的处理,可将 $GB_i = B_iM$ 严格相等的要求转换成 $(B_iM - GB_i)^T(B_iM - GB_i) < \delta_1 H_i$,其中 δ_1 为充分小的正常数, H_i 为满足 $H_i^T H_i < I$ 要求的正定矩阵,转换成线性矩阵不等式后有

$$\begin{bmatrix} \delta_1 H_i & * \\ B_iM - GB_i & I \end{bmatrix} > 0, \quad \begin{bmatrix} I & H_i \\ H_i & I \end{bmatrix} > 0. \quad (37)$$

将式(37)结合定理4中的式(26)~(31)就可一并求出 G 与 M ,放宽相关定理的使用范围.

为检验定理4中的鲁棒性能指标是否满足,由于

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\lambda_{\max}(P)}, \\ \rho_1 &= \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\alpha^{-1}\beta}, \end{aligned}$$

则

$$\mu_1^* > 1, \rho_1 = \sqrt{\lambda_{\min}^{-1}(P)\alpha^{-1}\beta} < \rho_1^*.$$

其中 μ_1^* 和 ρ_1^* 均为期望指标,根据矩阵性质可知 $\alpha^{-1}\beta I < (\rho_1^*)^2 \lambda_{\min}(P)I < (\rho_1^*)^2 P$ 成立,经Schur补变换后有

$$\begin{bmatrix} -(\rho_1^*)^2 P & * \\ I & -\alpha^{-1}\beta I \end{bmatrix} < 0. \quad (38)$$

将式(38)结合定理4中的式(26)~(31),通过迭代优化算法,可得满意的鲁棒性能.

5 仿真结果(Simulation results)

考虑F-16歼击机的纵向通道,基于刚体飞机运动的假设,只考虑纵向运动方程,滚转和偏航角都假设为零,得如下标准短周期运动方程^[12]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}_f(t) \\ \dot{\alpha}_f(t) \\ \dot{q}_f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & Z_a(t) & 1 \\ 0 & M_a(t) & M_q(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_f(t) \\ \alpha_f(t) \\ q_f(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ Z_{\delta_e}(t) \\ M_{\delta_e}(t) \end{bmatrix} \delta_e(t). \quad (39)$$

其中: $\theta_f(t)$ 为俯仰角(pitch angle), $q_f(t)$ 为俯仰角速度(pitching angular velocity), $\alpha_f(t)$ 为迎角(angle of attack), $\delta_e(t)$ 为升降舵(elevator), 由左右升降舵($\delta_{el}(t)$, $\delta_{er}(t)$)组成, 在该模型中为联动装置. 而 $Z_a(t)$, $M_a(t)$, $M_q(t)$, $Z_{\delta_e}(t)$, $M_{\delta_e}(t)$ 是时变系数. 通常, 俯仰角和速度可由陀螺仪测得为输出量.

假设飞机在15000英尺高飞行, 取马赫数为模糊变量, 按照马赫数0.4和0.8划分得到各飞行点处的局部模型如式(1)所示, 具体参数如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.5172 & 1 \\ 0 & -0.5210 & -0.6785 \end{bmatrix}, E_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1.2481 & 1 \\ 0 & -2.0690 & -1.2349 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.3 \\ 0.4 \end{bmatrix}, \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0441 & -0.0451 \\ -2.3905 & -2.4002 \end{bmatrix}, C_1 = C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.0882 & -0.0872 \\ -12.0785 & -12.0885 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

设计时取 $q = 2$, $r = 1$, 则收敛率 $\gamma \in (2, 6)$, 变化率约束量 $\zeta = 0.866$. 若传感器发生故障, 即输出信号的第2个通道失效70%, 根据定理4可得增益矩阵 K_{s1} 和 K_{s2} , L_2/L_∞ 鲁棒性能指标 $\rho_1 = 0.926 < \rho^* = 0.95$, $\mu_1 = 1.334$, 其中 ρ^* 为期望值.

$$K_{s1} = \begin{bmatrix} 2.1061 & 1.5012 \\ 2.1061 & 1.5012 \end{bmatrix}, K_{s2} = \begin{bmatrix} 2.4570 & 1.7765 \\ 2.4570 & 1.7765 \end{bmatrix}.$$

将定理4和定理2比较后可知, 由于其中矩阵 G 并不要求是对称正定的形式, 且摒弃了控制器 K_{si} ($i = 1, 2$) 要依赖于对称正定阵 P 的强制性要求, 因此根据定理4计算得到的控制器矩阵在选择范围上会得以扩大, 从而降低求解结论的保守性^[5]. 仿真时, 初始状态 $\mathbf{x}^T(0) = [-5 \ 10 \ 15]^T$, $w(t)$ 是幅值为0.8的方波信号, $v(t)$ 是均值为0的噪声信号. 图1(a)和(b)分别表示传感器故障时的俯仰姿态角

和角速度响应曲线. 实线和虚线部分分别表示系统动态性能受约束和无约束时的情形. 从仿真结果可以看出, 在考虑动态性能和混合 L_2/L_∞ 鲁棒性能等指标的控制方案作用下, F-16歼击机纵向俯仰角的振荡减少且运行平稳, 更符合飞行的实际要求.

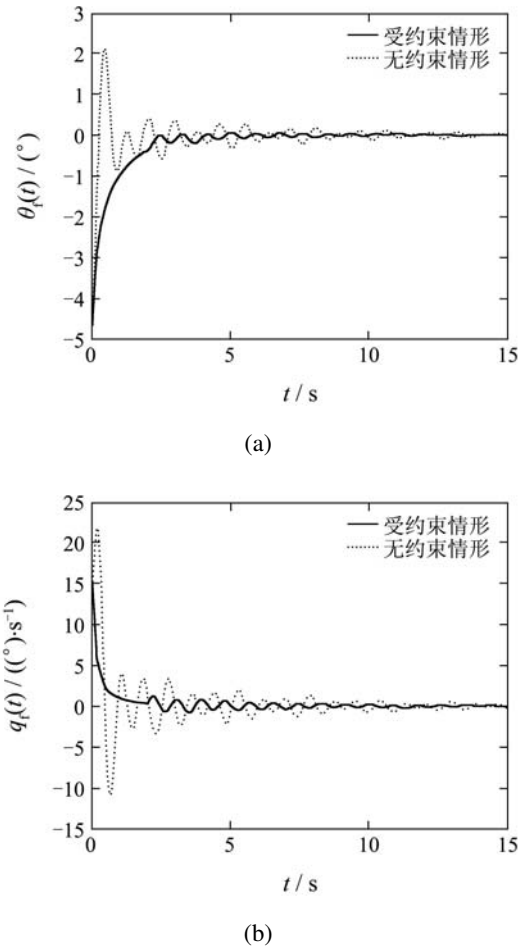


图1 传感器故障时闭环系统的状态响应
Fig. 1 Responses of the closed-loop system when the sensor failures occur

6 结语(Conclusion)

本文研究了一类T-S模糊系统在一定稳态及动态性能指标下的鲁棒可靠输出反馈控制问题, 提出了传感器或执行器在正常及发生结构性故障情形下的控制器设计方法, 并利用投射引理降低设计的保守性. 仿真结果表明了本方法的可行性.

参考文献(References):

- [1] TSENG C S, HWANG C K. Fuzzy observer-based fuzzy control design for nonlinear systems with persistent bounded disturbances[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(2): 164 – 179.
- [2] ASSAWINCHAICHOTE W, NGUANG S K, SHI P, et al. H_∞ fuzzy state-feedback control design for nonlinear systems with D-stability

- constraints: An LMI approach[J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2008, 78(4): 514 – 531.
- [3] WU H N, ZHANG H Y. Reliable mixed L_2/H_∞ fuzzy static output feedback control for nonlinear systems with sensor faults[J]. *Automatica*, 2005, 41(11): 1925 – 1932.
- [4] WU H N, ZHANG H Y. Reliable H_∞ fuzzy control for continuous-time nonlinear systems with actuator failures[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 14(5): 609 – 618.
- [5] OLIVEIRA M C, BERNUSSOU J, GEROMEL J C. A new discrete-time robust stability condition[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 37(4): 261 – 265.
- [6] 王福忠, 姚波, 张嗣瀛. 线性系统区域稳定的可靠控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 835 – 839.
(WANG Fuzhong, YAO Bo, ZHANG Siying. Reliable control of regional stabilizability for linear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 835 – 839.)
- [7] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control-Linear Matrix Inequality Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [8] CHILALI M, GAHINET. H_∞ design with pole-placement constraints: an LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(3): 358 – 367.
- [9] BOYED S P, GHAOUI L E, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequality in System and Control Theory*[M]. Philadelphia: SIAM, 1994.
- [10] CESAR A R, ALEXANDRE T. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(5): 1053 – 1057.
- [11] CHANG W, PARK J B, JOO Y H, et al. Static output-feedback fuzzy controller for Chen's chaotic system with uncertainties[J]. *Information Sciences*, 2003, 151: 227 – 244.
- [12] BLAKELOCK J H. *Automatic Control of Aircraft and Missiles*[M]. New York: John Wiley and Sons, 1991.

作者简介:

陶洪峰 (1979—), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为鲁棒控制与模糊控制等, E-mail: floodpeaker@sina.com;

胡寿松 (1937—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制与故障诊断等, E-mail: hushousong@nuaa.edu.cn.