文章编号: 1000−8152(2009)12−1371−07

基于奇异摄动理论的输入有界机器人轨迹跟踪控制

刘华山, 朱世强, 吴剑波, 闫莎莎

(浙江大学 流体传动及控制国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘要: 针对机器人轨迹跟踪中驱动扭矩有界的问题, 提出一种基于奇异摄动系统稳定性理论的推广算法. 通过在控制律中引入含有误差增益的饱和函数, 保证扭矩输入绝对值的上界在给定限制范围内, 并可通过适当调节误差增益系数改善系统的轨迹跟踪性能. 同时, 算法中采用仅包含位置跟踪误差信息的线性滤波函数产生用来替代真实速度误差的伪速度误差信号, 使得整个系统的闭环控制不需测量转速. 根据提出的推广算法, 设计了一种全新的输入有界控制律, 验证了算法的有效性. 仿真试验对比结果表明, 该算法能够严格保证扭矩控制输入的有界性, 并在相同参数条件下相比于其他算法, 具有更优的轨迹跟踪效果.

关键词: 机器人; 轨迹跟踪; 奇异摄动; 输入有界

中图分类号: TP242　　　**文献标识码**: A

Trajectory tracking control for robot manipulators with bounded inputs based on the singular perturbation theory

LIU Hua-shan, ZHU Shi-qiang, WU Jian-bo, YAN Sha-sha

(State Key Lab of Fluid Power Transmission and Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: To meet the requirement of a bounded driving torque in the robot trajectory tracking, we propose a generalized algorithm based on the stability theory of singularly perturbed systems. A saturation function with error gain is introduced in the control law, which guarantees the absolute value of the input torque to be upper-bounded within any specified range. Besides, a better tracking performance can be achieved by properly adjusting the error gains. In the meantime, a pseudo velocity error signal for substituting the actual one is generated from a linear filter containing only the position tracking error, thus, making the whole closed-loop control free from the velocity measurement. Based on the proposed algorithm, we design a novel control law with a bounded input. Comparison of simulation results show that the proposed algorithm can strictly ensure the specified bound for the inputs to the torque controller, and gives a better tracking result than the other ones under the same parameter conditions.

Key words: robot; trajectory tracking; singular perturbation; bounded input

1 引言(Introduction)

机器人关节驱动器的实际扭矩输出存在饱和限制的问题, 在以往的研究中没有得到重视, 各种控制算法几乎都是建立在驱动器能够输出任意所需扭矩的基础之上[1~4]. 近来, 扭矩受限问题开始受到关注, 但多数研究仍集中于机器人的定点控制[5~8].

针对测速信号容易混入干扰等缺点或某些场合转速不可测的情况, 机器人轨迹跟踪闭环控制中, 通常仅有位置量反馈. 因此, 在仅有位置反馈的情况下, 确保扭矩控制输入的有界性, 成为轨迹跟踪控制领域近来比较关注的问题. Loria和Nijmeijer率先将具有饱和特性的双曲正切函数引入到输入控制律中, 保证了扭矩输入的有界性, 并通过引入非线性滤波函数模拟速度误差信号, 实现了仅有位置输出反馈的闭环控制[9], 这一方法对后续的研究产生了较大影响, 但其系统稳定性证明和约束条件比较复杂. Stantibanez等人在文献[10]中考虑了机器人关节处的粘性摩擦因素, 证明当粘性摩擦系数足够大时可保证系统的全局渐进稳定性, 并在文献[11]中将Loria和Nijmeijer提出的控制律作了改进, 通过引入误差增益系数一定程度改善了初始跟踪误差为零时的跟踪性能, 并首次将奇异摄动理论引入到输入有界的机器人轨迹跟踪控制中, 简化了文献[9]中系统稳定性的证明, 但其仅对初始跟踪误差为零的情

收稿日期: 2008−09−23; 收修改稿日期: 2009−03−09.
基金项目: 浙江省面上科研工业项目(2008C21106).

况作了讨论, 且未给出详尽严格的稳定性证明过程, 更未对算法作进一步的推广. 国内, 黄春庆等人引入一类分段函数保证了控制输入有界, 且针对机器人动力学参数不确定和存在扰动的情况, 提出了一类基于参数域估计的输出反馈控制算法[12,13], 但该分段函数在拐点附近不能保证连续可导, 从而可能导致扭矩变化不平滑而引起柔性冲击.

本文在Stantibanez等人的基础上, 基于奇异摄动稳定性理论, 针对输入有界且仅有位置输出反馈的轨迹跟踪问题, 提出了一种便于控制律设计的推广控制算法, 并给出了任意初始状态下系统仍能保证一致稳定的严格证明. 算法中, 利用一类单调连续函数的饱和特性, 确保了扭矩输入控制律的有界性, 并可通过引入增益系数矩阵, 对该函数的饱和特性进行人工干预优化. 同时，采用包含位置误差信息的线性滤波函数产生用以替代真实速度误差变量的伪速度误差信号, 省去了闭环控制中的转速测量. 最后, 根据该推广算法设计了一种含有反正切饱和函数的控制律, 实现了扭矩控制输入有界的位置输出反馈轨迹跟踪控制, 仿真试验证明了算法的有效性.

2 动力学模型(Dynamic model)

n自由度旋转关节机器人动力学方程为

$$M(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+G(q)+F_{\mathrm{v}}\dot{q}=\tau. \tag{1}$$

其中: $q\in\mathbb{R}^n$为关节角向量, $M(q)\in\mathbb{R}^{n\times n}$为正定对称惯性矩阵, $C(q,\dot{q})\in\mathbb{R}^{n\times n}$为离心力和哥氏力矩阵, $G(q)\in\mathbb{R}^n$为重力向量, $F_{\mathrm{v}}=\mathrm{diag}\{f_{\mathrm{v}1},\cdots,f_{\mathrm{v}n}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}(f_{\mathrm{v}i}>0)$为粘性摩擦常系数对角矩阵, $\tau\in\mathbb{R}^n$为扭矩控制输入向量.

该动力学系统具有如下特性[9~11]:

P1 $x^{\mathrm{T}}[\dot{M}(q)-2C(q,\dot{q})]x=0$ 或$\dot{M}(q)=C(q,\dot{q})+C(q,\dot{q})^{\mathrm{T}}$;

P2 $\lambda_{\mathrm{m}}\{M(q)\}\|x\|^2\leqslant x^{\mathrm{T}}M(q)x\leqslant\lambda_{\mathrm{M}}\{M(q)\}\|x\|^2$, 其中$\lambda_{\mathrm{M}}\{\cdot\}(\lambda_{\mathrm{m}}\{\cdot\})$表示矩阵最大(最小)特征值;

P3 对于任意 $x,y,z\in\mathbb{R}^n$, 有 $C(x,y)z=C(x,z)y$, $C(x,y+z)=C(x,y)+C(x,z)$, 且有 $\|C(q,\dot{q})\|\leqslant k_{\mathrm{C}}\|\dot{q}\|$, 其中 $k_{\mathrm{C}}>0$;

P4 对于任意 $q\in\mathbb{R}^n$, $\|G(q)\|_{\mathrm{M}}\leqslant k_{\mathrm{G}}$, 其中 $k_{\mathrm{G}}>0$, $\|\cdot\|_{\mathrm{M}}(\|\cdot\|_{\mathrm{m}})$表示$\|\cdot\|$的最大值(最小值).

3 控制算法(Control algorithm)

3.1 控制目标(Objective of control)

在满足控制输入扭矩限制的条件下, 即n维向量τ满足$|\tau_i|<\tau_{i\max}$, $i=1,\cdots,n$, 对于任意初始位置误差$e(0)$, 有$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=0$. 其中: τ_i和$\tau_{i\max}$分别为第i关节的扭矩控制输入和最大限制扭矩; $e(t)=q_{\mathrm{d}}-q$, $q_{\mathrm{d}}\in\mathbb{R}^n$为期望输出轨迹, 且假设其连续2阶可导并有界, 即对于任意 $t\geqslant0$, 有: $\|\dot{q}_{\mathrm{d}}(t)\|\leqslant\|\dot{q}_{\mathrm{d}}(t)\|_{\mathrm{M}}$, $\|\ddot{q}_{\mathrm{d}}(t)\|\leqslant\|\ddot{q}_{\mathrm{d}}(t)\|_{\mathrm{M}}$.

3.2 控制律设计(Design of control law)

针对仅有位置输出反馈的情况, 采用包含位置误差信息e的线性滤波函数获得伪速度误差信号$\xi\in\mathbb{R}^n$. 滤波函数设计为

$$\xi=r+Ue,\dot{r}=-U\xi,$$

即

$$\dot{\xi}=U(\dot{e}-\xi). \tag{2}$$

其中: $U=\mathrm{diag}\{\mu,\cdots,\mu\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, 即对角阵$U$的各对角元素均为$\mu$, 且有$\mu>0$; r为辅助变量, 旨在将滤波函数划分为仅含e和ξ的两个可执行部分.

设计位置输出反馈轨迹跟踪控制律为:

$$\begin{aligned}\tau=&M(q)\ddot{q}_{\mathrm{d}}+C(q,\dot{q}_{\mathrm{d}})\dot{q}_{\mathrm{d}}+G(q)+F_{\mathrm{v}}\dot{q}_{\mathrm{d}}+\\&K_{\mathrm{p}}\phi(K_{\mathrm{e}}e)+K_{\mathrm{d}}\phi(K_{\xi}\xi).\end{aligned} \tag{3}$$

其中:

$$K_{\mathrm{p}}=\mathrm{diag}\{k_{\mathrm{p}1},\cdots,k_{\mathrm{p}n}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}, \text{且}k_{\mathrm{p}i}>0;$$
$$K_{\mathrm{d}}=\mathrm{diag}\{k_{\mathrm{d}1},\cdots,k_{\mathrm{d}n}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}, \text{且}k_{\mathrm{d}i}>0;$$
$$K_{\mathrm{e}}=\mathrm{diag}\{k_{\mathrm{e}1},\cdots,k_{\mathrm{e}n}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}, \text{且}k_{\mathrm{e}i}\geqslant1;$$
$$K_{\xi}=\mathrm{diag}\{k_{\xi1},\cdots,k_{\xi n}\}\in\mathbb{R}^{n\times n}, \text{且}k_{\xi i}\geqslant1.$$

令$\phi(x)=[\phi(x_1)\ \cdots\ \phi(x_n)]^{\mathrm{T}}$, x_i为$x\in\mathbb{R}^n$的各分量, $\Delta=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\cdots,\sigma_n\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$, σ_i为与x_i对应的增益系数, 且有$\sigma_i\geqslant1$, $i=1,\cdots,n$. $\phi(\Delta x)$=$[\phi(\sigma_1x_1)\ \cdots\ \phi(\sigma_nx_n)]^{\mathrm{T}}$.

对于任意$x\in\mathbb{R}^n$, $\phi(\cdot)$有如下性质:

Q1 $\phi(x_i)$为$\mathbb{R}$域内的单调递增函数, 即$\dfrac{\partial\phi(x_i)}{\partial x_i}>0$;

Q2 $\phi(x_i)x_i\geqslant0$, 当且仅当$x_i=\phi(x_i)=0$时取等号;

Q3 $|\phi(x_i)|\leqslant p$, $\|\phi(x)\|\leqslant\sqrt{n}p$;

Q4 $\|x\|\geqslant\alpha_1\|\phi(x)\|$, 常数$\alpha_1>0$且足够小, 相应亦有: $\sigma_{\mathrm{M}}\|x\|\geqslant\alpha_1\|\phi(\Delta x)\|$, 其中$\sigma_{\mathrm{M}}(\sigma_{\mathrm{m}})$表示对角阵$\Delta$中的最大(最小)对角元素, 以下同;

Q5 $\phi(x)$1阶连续可导, 且有$\lambda_{\mathrm{M}}\{\dfrac{\partial\phi(x)}{\partial x}\}\leqslant\beta$, 相应亦有: $\lambda_{\mathrm{M}}\{\dfrac{\partial\phi(\Delta x)}{\Delta\partial x}\}\leqslant\beta$常数$\beta>0$;

注 1 由性质Q1~Q3, 任意$x\in\mathbb{R}^n$, 亦有$\dfrac{\partial\phi(\sigma_ix_i)}{\sigma_i\partial x_i}>0$; $\phi(\sigma_ix_i)x_i\geqslant0$; $|\phi(\sigma_ix_i)|\leqslant p$, $\|\phi(\Delta x)\|\leqslant\sqrt{n}p$.

对任意$x\in\Omega_\eta$, $\Omega_\eta=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|\leqslant\eta\}$, 其

中, 常数$\eta>0$且任意大. 此时$\phi(\cdot)$有如下性质:

Q6 总存在常数$\alpha_2>0$, 满足不等式: $\|x\|\leqslant\alpha_2\|\phi(x)\|$, 相应亦有$\sigma_{\rm m}\|x\|\leqslant\alpha_2\|\phi(\varDelta x)\|$;

Q7 总存在常数$\gamma_1,\gamma_2>0$, 满足不等式:

$$\gamma_1\|\phi(x)\|^2\leqslant\sum_{i=1}^n\int_0^{x_i}\phi(x_i){\rm d}x_i\leqslant\gamma_2\|\phi(x)\|^2,$$

相应亦有

$$\gamma_1\|\phi(\varDelta x)\|^2\leqslant \sum_{i=1}^n\sigma_i\int_0^{x_i}\phi(\sigma_i x_i){\rm d}x_i\leqslant\gamma_2\|\phi(\varDelta x)\|^2.$$

由式(3)及性质P2, P3和Q3不难得出:

只需保证

$$\begin{aligned}&\tau_{i\max}>\\&\|M_i(q)\|_{\rm M}\|\ddot q_{\rm d}\|_{\rm M}+\|C_i(q,\dot q_{\rm d})\|_{\rm M}\|\dot q_{\rm d}\|_{\rm M}+\\&|G_i(q)|_{\rm M}+f_{{\rm v}i}|\dot q_{{\rm d}i}|_{\rm M}+(k_{{\rm p}i}+k_{{\rm d}i})p,\end{aligned}\tag{4}$$

即可满足各关节驱动扭矩约束: $|\tau_i|<\tau_{i\max}$. 其中, $M_i(q)$和$C_i(q,\dot q_{\rm d})$分别表示$M(q)$和$C(q,\dot q_{\rm d})$的第i行分向量, $G_i(q)$和$\dot q_{{\rm d}i}$分别表示$G(q)$和$\dot q_{\rm d}$的第i个分量.

4 系统稳定性(System stability)

4.1 奇异摄动系统稳定性理论(Stability theory of singularly perturbed systems)

定理 1 考虑奇异摄动系统

$$\dot x=f(t,x,z,\varepsilon),\tag{5}$$

$$\varepsilon\dot z=g(t,x,z,\varepsilon).\tag{6}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^{n1}$, $z\in\mathbb{R}^{n2}$, $\varepsilon>0$. 假设其对于所有$(t,x,\varepsilon)\in[0,+\infty)\times B_\eta\times[0,\varepsilon_0]$ ($B_\eta=\{x\in\mathbb{R}^{n1}:\|x\|\leqslant\eta\}$, $\varepsilon_0\geqslant\varepsilon$)均满足以下条件:

1) $f(t,0,0,\varepsilon)=0$, $g(t,0,0,\varepsilon)=0$;

2) $g(t,x,z,0)=0$有一个孤立根$z=h(t,x)$, 使得$h(t,0)=0$;

3) 对$z-h(t,x)\in B_\rho$($B_\rho=\{x\in\mathbb{R}^{n2}:\|x\|\leqslant\rho\}$), $h(t,x)$, $f(t,x,z,\varepsilon)$和$g(t,x,z,\varepsilon)$及它们的1阶、2阶偏导数均有界;

4) 降阶系统$\dot x=f(t,x,h(t,x),0)$在原点指数稳定;

5) 边界层系统$\dfrac{{\rm d}y}{{\rm d}\delta}=g(t,x,y+h(t,x),0)$在原点指数稳定, 且关于$(t,x)$一致. 其中$\delta=t/\varepsilon$, $y=z-h(t,x)$.

则存在$\varepsilon^*>0$, 使得对于所有$\varepsilon^*>\varepsilon$, 式(5)和(6)所描述的奇异摄动系统在原点指数稳定[14].

为表述方便, $M(q)$, $C(q,\dot q)$, $C(q,\dot q_{\rm d})$和$G(q)$分别简写为M, C, $C_{\rm d}$和G. 将式(2)和(3)代入式(1), 并依据定理1, 令

$$x=\left[e^{\rm T}\ \dot e^{\rm T}\right]^{\rm T},\ z=\xi,\ \varepsilon=1/\mu,$$

有

$$\dot x_1=\dot e,\tag{7}$$

$$\begin{aligned}\dot x_2=\ddot e=-M^{-1}[(C+C_{\rm d}+F_{\rm v})\dot e+\\K_{\rm p}\phi(K_{\rm e}e)+K_{\rm d}\phi(K_\xi\xi)],\end{aligned}\tag{8}$$

$$\varepsilon\dot z=\varepsilon\frac{{\rm d}\xi}{{\rm d}t}=\dot e-\xi.\tag{9}$$

显然, 式(7)～(9)所描述的系统在形式上和定理1中的时变奇异摄动系统完全吻合.

注 2 对条件1), 上述系统满足当$[e^{\rm T}\ \dot e^{\rm T}\ \xi^{\rm T}]^{\rm T}=[0\ \ 0\ \ 0]^{\rm T}$时, 有$[\dot e^{\rm T}\ \ddot e^{\rm T}\ \dot\xi^{\rm T}]^{\rm T}=[0\ \ 0\ \ 0]^{\rm T}$, 即有$\dot x=0$, $\dot z=0$.

注 3 对条件3), 当$\xi-\dot e\in B_\rho$时, 不难证明式(7)～(9)的右边以及其分别对x_1,x_2,z的1阶和2阶偏导数均有界.

4.2 系统稳定性证明(Proof of system stability)

定理 2 对于任意初始状态

$$[e(0)^{\rm T}\ \dot e(0)^{\rm T}\ \xi(0)^{\rm T}]^{\rm T}\in\varPhi_\eta,$$
$$\varPhi_\eta=\{x\in\mathbb{R}^{3n}:\|x\|\leqslant\eta\},$$

其中$\eta>0$且任意大. 如果满足

$$\frac{k_{\rm dm}}{k_{\xi{\rm M}}}\alpha_1+f_{\rm vm}(\frac{\alpha_1}{k_{\xi{\rm M}}})^2-k_{\rm C}\|\dot q_{\rm d}\|_{\rm M}(\frac{\alpha_2}{k_{\xi{\rm m}}})^2>0,\tag{10}$$

则总存在$\varepsilon^*>0$, 使得对于所有$\varepsilon^*>\varepsilon$, 能够保证系统(7)～(9)在状态原点指数稳定.

令式(9)中$\varepsilon=0$, 即可得到条件2)中所述的孤立根$\xi=\dot e$, 且有$\dot e(0)=0$. 将其代入式(8)得

$$\begin{aligned}\dot x_2=\ddot e=-M^{-1}[(C+C_{\rm d}+F_{\rm v})\dot e+\\K_{\rm p}\phi(K_{\rm e}e)+K_{\rm d}\phi(K_\xi\dot e)].\end{aligned}\tag{11}$$

式(7)和(11)构成定理1中条件4)所述的降阶系统. 现证明其满足条件4), 构造Lyapunov函数$V(t,e,\dot e)$, 简写为V[11]:

$$V=\sum_{i=1}^n k_{{\rm p}i}\int_0^{e_i}\phi(k_{{\rm e}i}e_i){\rm d}e_i+\frac12\dot e^{\rm T}M\dot e+\upsilon\dot e^{\rm T}M\phi(K_{\rm e}e).\tag{12}$$

其中常数$\upsilon>0$且足够小. 由性质P2和Q7, 可得

$$\begin{aligned}V\geqslant&\gamma_1(\frac{k_{{\rm p}i}}{k_{{\rm e}i}})_{\rm m}\|\phi(K_{\rm e}e)\|^2+\\&\frac12\lambda_{\rm m}\{M\}\|\dot e\|^2-\upsilon\lambda_{\rm M}\{M\}\|\dot e\|\|\phi(K_{\rm e}e)\|.\end{aligned}\tag{13}$$

对式(13)右边配方, 可得

当

$$\upsilon < \upsilon_1 = \sqrt{2\gamma_1\lambda_{\mathrm{m}}\{M\}(\frac{k_{\mathrm{p}i}}{k_{\mathrm{e}i}})_{\mathrm{m}}}/\lambda_{\mathrm{M}}\{M\}$$

时, 对所有$[e^{\mathrm{T}}\ \ \dot{e}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in B_\eta, V$正定.

将Lyapunov函数V对时间t求导, 利用前述性质P1～P3, Q3～Q7及不等式$\|\dot{q}\| \leqslant \|\dot{e}\| + \|\dot{q}_{\mathrm{d}}\|$, 得

$$\begin{aligned}&\dot{V} = \\ &-\dot{e}^{\mathrm{T}}[(C_{\mathrm{d}} + F_{\mathrm{v}})\dot{e} + K_{\mathrm{d}}\phi(K_\xi\dot{e})] + \\ &\upsilon[\ddot{e}^{\mathrm{T}}M\phi(K_{\mathrm{e}}e)+\dot{e}^{\mathrm{T}}\dot{M}\phi(K_{\mathrm{e}}e)+e^{\mathrm{T}}M\dot{\phi}(K_{\mathrm{e}}e)] \leqslant \\ &-s_{11}\|\phi(K_{\mathrm{e}}e)\|^2 - s_{22}\|\phi(K_\xi\dot{e})\|^2 - \\ &(s_{12}+s_{21})\|\phi(K_{\mathrm{e}}e)\|\|\phi(K_\xi\dot{e})\|.\end{aligned} \tag{14}$$

其中:

$$\begin{aligned}&s_{11} = \upsilon k_{\mathrm{pm}}, s_{22} = T_1 - \upsilon T_2,\\ &s_{12} = s_{21} = -\upsilon T_3,\\ &T_1 = \frac{k_{\mathrm{dm}}\alpha_1}{k_{\xi\mathrm{M}}} + f_{\mathrm{vm}}(\frac{\alpha_1}{k_{\xi\mathrm{M}}})^2 - k_{\mathrm{C}}\|\dot{q}_{\mathrm{d}}\|_{\mathrm{M}}(\frac{\alpha_2}{k_{\xi\mathrm{m}}})^2,\\ &T_2 = (\sqrt{n}pk_{\mathrm{C}} + \beta k_{\mathrm{eM}}\lambda_{\mathrm{M}}\{M\})(\frac{\alpha_2}{k_{\xi\mathrm{m}}})^2,\\ &T_3 = (k_{\mathrm{C}}\|\dot{q}_{\mathrm{d}}\|_{\mathrm{M}} + \frac{1}{2}f_{\mathrm{vM}})(\frac{\alpha_2}{k_{\xi\mathrm{m}}}) + \frac{1}{2}k_{\mathrm{dM}}.\end{aligned}$$

由式(14)进一步可得

$$\dot{V} \leqslant -\begin{bmatrix}\|\phi(K_{\mathrm{e}}e)\|\\ \|\phi(K_\xi\dot{e})\|\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} S \begin{bmatrix}\|\phi(K_{\mathrm{e}}e)\|\\ \|\phi(K_\xi\dot{e})\|\end{bmatrix}. \tag{15}$$

其中$S = \begin{bmatrix}s_{11}\ s_{12}\\ s_{21}\ s_{22}\end{bmatrix}$, 此时如果$S$为正定阵, 则$\dot{V}$对所有$[e^{\mathrm{T}}\ \dot{e}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in B_\eta$负定.

根据Sylvester判据, 已有$s_{11} = \upsilon k_{\mathrm{pm}} > 0$, 只需满足$|S| > 0$, 即$s_{11}s_{22} - s_{12}^2 > 0$, 即可得$S$正定.

将上述$s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}$等式代入, 可得

$$\upsilon[k_{\mathrm{pm}}T_1 - \upsilon(k_{\mathrm{pm}}T_2 + T_3^2)] > 0. \tag{16}$$

其中$k_{\mathrm{pm}}T_2 + T_3^2 > 0, \upsilon > 0$, 故只需$T_1 > 0$即满足式(10), 且满足$\upsilon < \upsilon_2 = k_{\mathrm{pm}}T_1/(k_{\mathrm{pm}}T_2 + T_3^2)$即可.

因此, 对于所有$[e^{\mathrm{T}}\ \dot{e}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in B_\eta$, 只需满足式(10)以及$0 < \upsilon < \min\{\upsilon_1, \upsilon_2\}$, 即可保证降阶系统原点渐进稳定.

同时, 利用性质P2和Q7亦可得到如下形式:

$$V \leqslant \upsilon^* \left\| [\|\phi(K_{\mathrm{e}}e)\|\ \ \|\phi(K_\xi\dot{e})\|]^{\mathrm{T}} \right\|^2. \tag{17}$$

其中常数$\upsilon^* > 0$且足够大.

由式(15)和(17)可得: 对于所有$[e^{\mathrm{T}}\ \dot{e}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \in B_\eta$, 始终有$\dot{V} \leqslant -\frac{\lambda_{\mathrm{m}}\{S\}}{\upsilon^*}V$, 条件4)即得证.

关于条件5), 将$\frac{t}{\varepsilon} = \delta$代入式(9)得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\delta} = \frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\delta} = \dot{e} - \xi. \tag{18}$$

其中$y = \xi - \dot{e}, \dot{e}$可视作边界层系统(18)中的常数.

构造Lyapunov函数$W(\delta, \xi)$, 简写为W:

$$W = \omega(\dot{e} - \xi)^2. \tag{19}$$

其中常数$\omega > 0$. 此时

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\delta} = -2\omega\,(\dot{e} - \xi)^2 = -2W,$$

ξ可不受任何限制的满足定理1中的条件5).

注 4 由式(18)和(19)可得: 当δ增大即ε减小时, $\dot{e} - \xi \to 0$的指数收敛速度变快, 即ξ趋近$\dot{e}$的速度将变快.

至此, 定理1中的所有假设条件均已满足, 定理2即得证[14].

5 控制律实现(Implementation of control law)

依据所提出的推广控制算法可以方便的设计各种输入有界的控制律, 即将控制系统划分为2个子系统(降阶系统和边界层系统)分别进行设计, 且能根据需要设计满足条件Q1～Q7的任意饱和函数, 从而具有很强的灵活性. 不难看出, 文献[11]和文献[10]中所提出的算法均为本文所提出推广算法中的两个特例: 前者令饱和函数$\phi(\varDelta x) = \tanh(\varDelta x)$, 后者则是该饱和函数中增益对称阵$\varDelta$为$n \times n$维单位矩阵时的特例. 以下基于上述方法设计一种全新的控制律.

取饱和函数$\phi(\sigma_i x_i)$为反正切函数$\mathrm{atan}(\sigma_i x_i)$, σ_i分别为1,3,10时, 函数$y_i = \mathrm{atan}(\sigma_i x_i)$如图1所示.

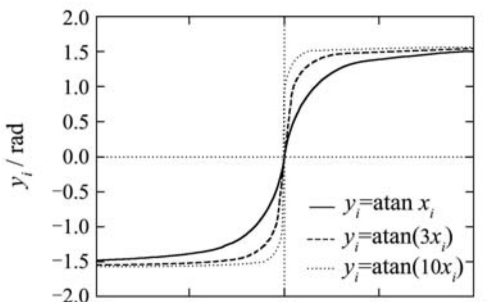

图 1 atan函数曲线

Fig. 1 Function curve of atan

σ_i的取值直接影响$\phi(\sigma_i x_i)$曲线过零点的斜率及函数趋近饱和的速度: σ_i越大, 函数$\phi(\sigma_i x_i)$过零点的斜率越大, 趋近饱和的速度也越快.

注 5 显然, $\mathrm{atan}(\sigma_i x_i)$满足性质Q1和Q2; 且由性质Q3～Q5可分别得到: $p = \frac{\pi}{2}, \alpha_1 = 1, \beta = 1$;

注 6 性质Q6中, $\forall\,|x_i| \leqslant \eta$, 有

$$\frac{\sigma_{\mathrm{m}}|x_i|}{|\mathrm{atan}(\sigma_i x_i)|} \leqslant \alpha_{2i},$$

应有$\alpha_2 \geqslant \max\{\alpha_{21}, \cdots, \alpha_{2n}\}$, 取$\alpha_2 = \dfrac{\sigma_{\rm m}\eta}{{\rm atan}(\sigma_{\rm m}\eta)}$;

注 7　性质Q7中, 对于任意$|x_i| \leqslant \eta$, 有

$$\sigma_i \int_0^{x_i} {\rm atan}(\sigma_i x_i){\rm d}x_i = \sigma_i x_i {\rm atan}(\sigma_i x_i) - \frac{1}{2}\ln[1+(\sigma_i x_i)^2],$$

令

$$\gamma_{1i} \leqslant \lim_{\sigma_i x_i \to 0} \frac{\sigma_i \eta {\rm atan}(\sigma_i x_i) - \frac{1}{2}\ln[1+(\sigma_i x_i)^2]}{[{\rm atan}(\sigma_i x_i)]^2} = \frac{1}{2},$$

取

$$\gamma_1 = \frac{1}{2},$$

$$\gamma_{2i} \geqslant \frac{\sigma_i \eta {\rm atan}(\sigma_i \eta) - \frac{1}{2}\ln[1+(\sigma_i \eta)^2]}{[{\rm atan}(\sigma_i \eta)]^2},$$

取

$$\gamma_2 = \max\{\gamma_{21}, \cdots, \gamma_{2n}\} = \frac{\sigma_{\rm M} \eta {\rm atan}(\sigma_{\rm M} \eta) - \frac{1}{2}\ln[1+(\sigma_{\rm M} \eta)^2]}{[{\rm atan}(\sigma_{\rm M} \eta)]^2}.$$

设计轨迹跟踪控制律为

$$\tau = M\ddot{q}_{\rm d} + C_{\rm d}\dot{q}_{\rm d} + G + F_{\rm v}\dot{q}_{\rm d} + K_{\rm p}{\rm atan}(K_{\rm e}e) + K_{\rm d}{\rm atan}(K_\xi \xi), \tag{20}$$

其中e和ξ满足式(2).

6　实例仿真(Simulation of instance)

以二连杆机器人为仿真试验对象, 其动力学模型参数为

$$M = \begin{bmatrix} 3.3 + 0.24\cos q_2 & 0.11 + 0.12\cos q_2 \\ 0.11 + 0.12\cos q_2 & 0.11 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.12\dot{q}_2 \sin q_2 & -0.12(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin q_2 \\ 0.12\dot{q}_1 \sin q_2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G = \begin{bmatrix} 48.02\sin q_1 + 1.96\sin(q_1 + q_2), \\ 1.96\sin(q_1 + q_2) \end{bmatrix},$$

$$F_{\rm v} = {\rm diag}\{2.5, 0.2\}, U = {\rm diag}\{500, 500\}.$$

第1,2关节的最大限制扭矩分别为

$$\tau_{1\max} = 120\ {\rm Nm},\quad \tau_{2\max} = 20\ {\rm Nm}.$$

第1,2关节期望轨迹分别设定为

$$q_{\rm d1}(t) = [60(1-{\rm e}^{-3t^3}) + 20(1-{\rm e}^{-3t^3})\sin(6t) + 5]^\circ,$$

$$q_{\rm d2}(t) = [75(1-{\rm e}^{-2t^3}) + 105(1-{\rm e}^{-2t^3})\sin(1.5t) + 10]^\circ.$$

注 8　实际场合初始轨迹误差不总为零, 通常会导致未考虑扭矩限制的传统算法中初始扭矩控制输入值过大, 甚至超出扭矩最大允许值. 不失一般性, 第1,2关节的初始误差分别设置为$5^\circ, 10^\circ$, 并与其他算法作对比, 以证明本文算法在抑制过大扭矩控制输入值方面的有效性.

将本文算法与文献[3]和文献[10]算法作对比, 如表1所示.

表 1　3种算法比较

Table 1　Comparison of 3 algorithms

	饱和函数	误差增益对角阵
文献[3]算法	无	无
文献[10]算法	有	无
本文算法	有	有

文献[3]算法中考虑摩擦因素, 其控制律可写为:

$$\tau = M\ddot{q}_{\rm d} + C_{\rm d}\dot{q}_{\rm d} + G + F_{\rm v}\dot{q}_{\rm d} + K_{\rm p}e + K_{\rm d}\xi. \tag{21}$$

文献[10]中输入控制律:

$$\tau = M\ddot{q}_{\rm d} + C_{\rm d}\dot{q}_{\rm d} + G + F_{\rm v}\dot{q}_{\rm d} + K_{\rm p}\tanh\ e + K_{\rm d}\tanh\ \xi. \tag{22}$$

为公平起见, 3种算法中e和ξ均满足式(2), 且在满足式(4)和(10)的前提下, 经反复试验择优选取相同增益: $K_{\rm p} = {\rm diag}\{4.5, 4\}, K_{\rm d} = {\rm diag}\{1.5, 0.5\}$.

本文算法中, 取$K_{\rm e} = K_\xi = {\rm diag}\{3, 2\}$, 各关节轨迹跟踪效果如图2和3. 3种算法的比较如图4～7所示.

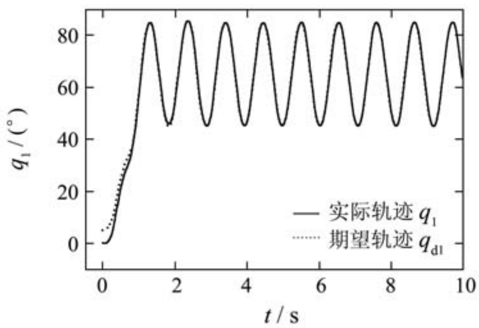

图 2　第1关节轨迹跟踪

Fig. 2　Trajectory tracking of the 1st joint

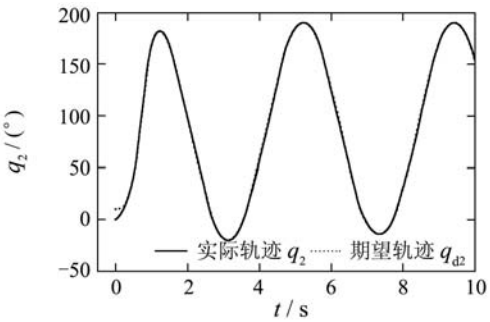

图 3　第2关节轨迹跟踪

Fig. 3　Trajectory tracking of the 2nd joint

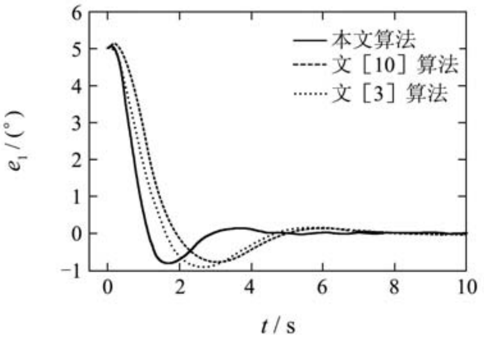

图 4 第1关节轨迹跟踪误差比较

Fig. 4 Tracking-error comparison of the 1st joints

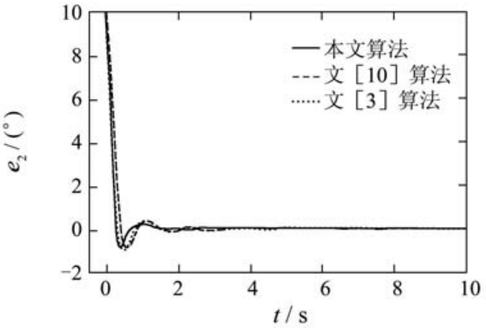

图 5 第2关节轨迹跟踪误差比较

Fig. 5 Tracking-error comparison of the 2nd joints

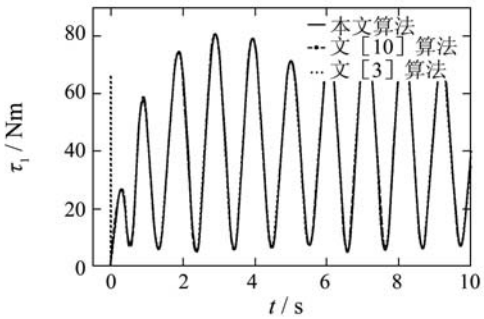

图 6 第1关节控制输入比较

Fig. 6 Control-input comparison of the 1st joints

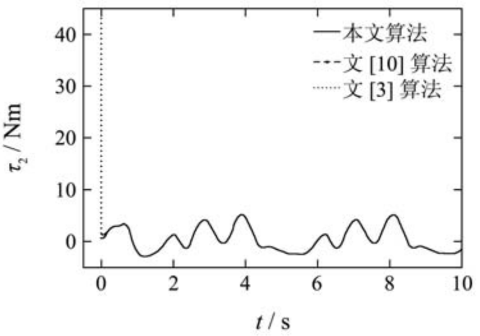

图 7 第2关节控制输入比较

Fig. 7 Control-input comparison of the 2nd joints

由图4和5所示, 本文算法控制律式(20)中由于引入了误差增益对角阵, 在相同参数条件下, 相对于文献[3]和文献[10]所提出的算法, 缩短了系统调节时间, 减小了超调量, 其中大惯量关节(第1关节)尤为明显.

由图 6 和 7 则可以明显地看出, 本文算法和文献[10]算法由于在控制律中引入了饱和函数, 有效抑制了初始扭矩的骤增, 而文献[3]算法由于没有饱和抑制作用, 在初始轨迹跟踪误差不为零的情况下, 使得对驱动器的初始扭矩控制输入值过大, 其中第1关节约为66 Nm, 第2关节约为45 Nm, 并超出最大允许扭矩. 值得注意的是, 实际工况中, 初始扭矩控制输入的骤增将导致关节的强烈震颤, 从而影响控制精度甚至缩短驱动器的使用寿命, 因此应尽量避免.

7 结论(Conclusion)

针对轨迹跟踪实际控制中, 机器人关节扭矩存在最大输出限制问题, 本文提出一种基于奇异摄动系统稳定性理论的输入有界轨迹跟踪控制推广算法, 通过在控制律中引入一类具有共性的饱和函数, 有效确保了扭矩控制输入在给定限制范围内, 并在该饱和函数中引入误差增益对角阵, 为进一步改善系统的轨迹跟踪性能创造了条件. 同时, 通过线性滤波函数产生伪速度误差信号, 实现了仅有位置测量反馈的闭环控制. 理论分析和具体实例仿真均验证了算法的有效性.

参考文献(References):

[1] SLOTINE J J E, LI W P. On the adaptive control of robot manipulators[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1987, 6(3): 49 – 59.

[2] SPONG M W. On the robust control of robot manipulators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(11): 1782 – 1786.

[3] LORIA A, ORTEGA R. On tracking control of rigids and flexible joint robots[J]. *Applied Mathematics and Computer Science, special issue on Mathematical Methods in Robotics*, 1995, 5(2): 101 – 113.

[4] REYES F, KELLY R. Experimental evaluation of model-based controllers on a direct-drive robot arm[J]. *Mechatronics*, 2001, 11(3): 267 – 282.

[5] SANTIBANEZ V, KELLY R, REYS F. A new set-point controller with bounded torques for robot manipulators[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1998, 45(1): 126 – 133.

[6] LAIB A. Adaptive output regulation of robot manipulators under actuator constrains [J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 2000, 6(1): 29 – 35.

[7] ZAVALA RIO A, SANTIBANEZ V. Simple extensions of the PD-with-gravity-compensation control law for robot manipulators with bounded inputs[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 14(5): 958 – 965.

[8] ZAVALA RIO A, SANTIBANEZ V. A natural saturating extension of the PD-with-desired-gravity-compensation control law for robot ma-

nipulators with bounded inputs[J]. *IEEE Transactions on Robotics*, 2007, 23(2): 386 – 391.

[9] LORIA A, NIJMEIJER H. Bounded output feedback tracking control of full actuated Euler-Lagrange systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1998, 33(3): 151 – 161.

[10] SANTIBANEZ V, KELLY R. Global asymptotic stability of bounded output feedback tracking control for robot manipulators[C] //*Proceedings of 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orland, USA: IEEE Press, 2001: 1378 – 1379.

[11] MORENO VALENZUELA J, SANTIBANEZ V, CAMPA R. On output feedback tracking control of robot manipulators with bounded torque input[J]. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, 2008, 6(1): 76 – 85.

[12] HUANG C Q, PENG X F, JIA C Z, et al. Guaranteed robustness/performance adaptive control with limited torque for robot manipulators[J]. *Mechatronics*, 2008, 18(10): 641 – 652.

[13] 黄春庆, 王兴贵, 王祖光. 输入力矩受限的机器人鲁棒自适应跟踪控制[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(3): 338 – 344.
(HUANG Chunqing, WANG Xinggui, WANG Zuguang. Robust-adaptive tracking control of robot manipulators with bounded torque inputs.Learning algorithm for tracking control of nonlinear distributed parameter systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(3): 338 – 344.)

[14] KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. 3rd edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2007: 456 – 459.

作者简介:

刘华山　(1984—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为工业机器人运动控制、多轴控制系统设计, E-mail: watson683@163.com;

朱世强　(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为工业和民用智能机器人、机电控制, E-mail: sqzhu@zju.edu.cn;

吴剑波　(1986—), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为工业机器人多轴运动控制, E-mail: wujbclzw@126.com;

闫莎莎　(1986—), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为机器人运动控制, E-mail: shashayan2007@yahoo.com.cn.