

一类离散双线性系统可控性研究

铁 林, 蔡开元, 林 岩

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 在工程中, 系统离散化前后可控性是否一致是一个重要问题. 近来, Elliott 就一类双线性系统, 首次构造出了一个连续时不可控、但经离散化后可控的二阶反例. 鉴于离散化后的系统可控性无法利用已有方法进行判断, 本文给出了一个二阶离散双线性系统可控性的充分条件, 从而在更一般情形下得到了一类连续时系统不可控, 离散化后可控的反例, 深化了对双线性系统可控性的认识. 进而, 本文证明了对于该类系统, 当其阶数大于 2 时, 可控性反例不再存在.

关键词: 双线性系统; 离散系统; 可控性

中图分类号: O231 **文献标识码:** A

Study on the controllability of a class of discrete-time bilinear systems

TIE Lin, CAI Kai-yuan, LIN Yan

(School of Automation Science and Electrical Engineering, Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: Whether the controllability of a continuous system keeps the consistency after discretization is an important issue in engineering. Recently, a two-dimensional counterexample was constructed by Elliott for an uncontrollable bilinear system and showed that its discrete-time counterpart is, however, controllable. In this paper, a sufficient condition for controllability of a class of second order discrete-time bilinear systems is proposed, which extends the result given by Elliott to more general cases and therefore, deepens our understanding of controllability of bilinear systems. Furthermore, it is shown that the controllability counterexample does not exist if the dimension of such systems is greater than two.

Key words: bilinear systems; discrete-time systems; controllability

1 引言(Introduction)

双线性系统广泛应用于工程、经济、生物领域中^[1~4], 被认为是最接近于线性系统的非线性系统, 主要可以分为两类: 状态齐次和状态非齐次. 鉴于这类系统的重要性, 对其本质属性之一的可控性研究已取得了一些成果. 对于连续双线性系统可控性, 主要以李群、李代数为工具, 得到了一些充要条件^[5~15]. 但若系统阶数较高, 则可控性判据应用起来非常困难; 对于离散双线性系统可控性的研究则不多见^[16~24]. 文献[17]给出的可控性充分条件过强, 不易应用; 文献[18,19]尽管得到了充要条件, 但仅就一类特殊情形方适用; 文献[22~24]只讨论了零可控性. 因此, 双线性系统可控性的研究仍是一个难点.

在工程中, 一个系统的可控性由连续到离散化前后是否保持一致是一个重要问题, 因为这关系到数值化离散方法是否改变系统的本质属性. 对于线性

时不变系统, 只需计算其可控性矩阵的秩, 便可判断系统离散化后可控性是否发生改变. 而对于非线性系统, 或更特殊的, 双线性系统, 却没有统一的判定准则.

近来, 文献[1]给出了一个双线性系统可控性的二阶反例. 考虑如下不可控的严格双线性系统:

$$\dot{x}(t) = u(t)Bx(t), x(0) = \xi. \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^2$ 为状态向量, $u \in \mathbb{R}$ 是控制输入, $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\xi \in \mathbb{R}_*^2 (\mathbb{R}_*^2 := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ 为初始状态. 文献[1]对一具体给定的 B 证明, 式(1)的欧拉离散化方程:

$$\begin{cases} x(k+1) = (I + v(k)B)x(k), k=0, 1, \dots, \\ v(k) = \tau u(k), v(k) \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2)$$

却是可控的, 其中 τ 为步长.

如文献[1]所指出, 在文献[1]给出二阶反例之前,

连续双线性系统由欧拉法离散化后可控性发生变化的反例仅有一阶的, 二阶或二阶以上的反例鲜为人知. 之所以难于给出这种反例, 是因为双线性系统的可控性问题较难处理^[3,4]. 例如对系统(2), 已有文献尚无法给出其可控性的判据(注意到系统(2)的结构既不满足文献[17]中充分条件的第2项, 亦不满足文献[18]中充要条件的前提, $\text{rank } B = 1$), 即系统(2)的可控性问题仍未解决. 在本文中, 给出了一个易于判断系统(2)可控性的充分条件, 从而在更一般的情形下得到了一类连续时系统不可控, 离散化后可控的反例, 深化了对双线性系统可控性的认识. 进而, 本文证明了, 对于该类系统, 当其阶数大于2时可控性反例将不再存在, 即当且仅当系统阶数小于或等于2时, 可控性反例才存在.

2 主要结果(Main results)

定义 1^[16,17] 系统(2)是可控的等价于对任意的 $\xi, \eta \in \mathbb{R}_*^n (\mathbb{R}_*^n := \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$, 存在一个有界的控制序列 $u(k) (k = 0, 1, \dots, l, l \text{ 为一正整数})$, 使得 ξ 可以被转移到 η .

引理 1^[1] 系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ 在一个连通的子流形 $S \subset \mathbb{R}^n$ 上是可控的, 当且仅当对任意的初值 $\xi \in S$, 存在一邻域 $N(\xi) \subset S$, 使得对任意的 $\eta \in N(\xi)$ 是可控的.

引理 2 对于如下 n 阶系统:

$$\begin{cases} x(k+1) = (I + av(k)J_B)x(k), k=0, 1, \dots, \\ v(k) = \tau u(k), v(k) \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (3)$$

其中: a 为任意非零实数, J_B 是系统(2)中 B 在实域下的若当标准型, 即 $B = PJ_BP^{-1}$. 则系统(3)可控当且仅当系统(2)可控.

证 因 P 非奇异, 故对任意 $\xi, \eta \in \mathbb{R}_*^n$, 有 $\bar{\xi} = P\xi$, $\bar{\eta} = P\eta \in \mathbb{R}_*^n$. 若系统(2)可控, 则存在有界控制序列 $\bar{v}(k), k = 0, 1, \dots, l$, 使得 $\bar{\xi}$ 可被转移到 $\bar{\eta}$, 即

$$[\prod_{k=0}^l (I + \bar{v}(k)B)]\bar{\xi} = \bar{\eta}, \quad (4)$$

那么, 若用控制输入 $v(k) = \frac{\bar{v}(k)}{a}, k = 0, 1, \dots, l$, 则有

$$[\prod_{k=0}^l (I + av(k)J_B)]\xi = \eta, \quad (5)$$

即系统(3)可控.

引理 3 对于二阶离散双线性系统(2), 若 B 具如下形式:

$$B = \begin{bmatrix} -1 + \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & -1 + \cos \theta \end{bmatrix},$$

其中 $\theta = \frac{2m}{n}\pi \in (0, \pi), m, n \in \mathbb{N}^+$. 则系统(2)可控.

证 证明的关键是构造出一个初值的邻域, 使得系统(2)在这个邻域内是可控的; 进而, 用所有初值的可达邻域覆盖 $\mathbb{R}_*^2$, 便可得可控性. 由 B 的结构, 有

$$\begin{aligned} (I + B)^n &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \cos(2m\pi) & \sin(2m\pi) \\ -\sin(2m\pi) & \cos(2m\pi) \end{bmatrix} = I. \end{aligned} \quad (6)$$

考虑控制序列 $v(k) = \tau u(k) = \bar{v} = 1, k = 0, 1, \dots, n-1$, 有

$$[\prod_{k=0}^{n-1} (I + v(k)B)]\xi = \xi, \quad (7)$$

即 ξ 可以被控制到自身.

下面构造出 ξ 的一个可达邻域. 这可通过改变最后一个控制 $v(n-1)$, 并增加一个新的控制 $v(n)$ 做到. 取初值 $\xi = [1 \ 0]^T$, 先证明 ξ 的某个邻域是可达的. 构造方程

$$(I + t_2B)(I + t_1B)\xi = (I + \bar{v}B)(\xi + x), \quad (8)$$

其中 $x = [x_1 \ x_2]^T$, $(\xi + x)$ 表示 ξ 邻域中的一点. 对于方程(8), 易见 $(t_1, t_2, x_1, x_2) = (\bar{v}, 0, 0, 0)$ 是满足方程的一组解. 注意到根据隐函数定理, 存在 $(\bar{v}, 0, 0, 0)$ 的一个邻域唯一确定一组向量值隐函数, 并使其满足方程(8)的充分条件是如下的雅可比矩阵

$$\frac{\partial((I + t_2B)(I + t_1B)\xi)}{\partial(t_1, t_2)} = [B(I + t_2B)\xi \ B(I + t_1B)\xi] \quad (9)$$

非奇异. 又

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial((I + t_2B)(I + t_1B)\xi)}{\partial(t_1, t_2)} \right| = \\ &= |B|(I + t_2B)\xi \ (I + t_1B)\xi| = \\ &= (t_2 - t_1)(2 \sin \theta - \sin(2\theta)) \end{aligned} \quad (10)$$

在 $(\bar{v}, 0, 0, 0)$ 点处恒不为0. 因此, 由方程(8), 有

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 - t_2 + t_2 \cos \theta & t_2 \sin \theta \\ -t_2 \sin \theta & 1 - t_2 + t_2 \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \\ &\begin{bmatrix} 1 - t_1 + t_1 \cos \theta \\ -t_1 \sin \theta \end{bmatrix} = \\ &\begin{bmatrix} (1 + x_1) \cos \theta + x_2 \sin \theta \\ -(1 + x_1) \sin \theta + x_2 \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

而由式(11), 有

$$\begin{cases} 1 + (\cos \theta - 1)(t_1 + t_2) + 2 \cos \theta (\cos \theta - 1)t_1 t_2 = \\ (1 + x_1) \cos \theta + x_2 \sin \theta, \\ -\sin \theta (t_1 + t_2) + 2 \sin \theta (1 - \cos \theta)t_1 t_2 = \\ -(1 + x_1) \sin \theta + x_2 \cos \theta. \end{cases} \quad (12)$$

进一步可推出

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 1 - \frac{x_2}{\sin \theta}, \\ t_1 t_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{x_1}{1 - \cos \theta} + \frac{x_2}{\sin \theta} \right), \end{cases} \quad (13)$$

从而得到

$$\begin{cases} t_1 = -\frac{x_2 - \sin \theta}{2 \sin \theta} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_2^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2x_1}{1 - \cos \theta} + 1}, \\ t_2 = -\frac{x_2 - \sin \theta}{2 \sin \theta} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x_2^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2x_1}{1 - \cos \theta} + 1}, \end{cases} \quad (14)$$

其中

$$\frac{x_2^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2x_1}{1 - \cos \theta} + 1 > 0. \quad (15)$$

若令

$$\begin{cases} v(0) = v(1) = \cdots = v(n-2) = \bar{v}, \\ v(n-1) = t_1, v(n) = t_2, \end{cases} \quad (16)$$

有

$$\left[\prod_{k=0}^n (I + v(k)B) \right] \xi = \xi + x. \quad (17)$$

即 $\xi = [1 \ 0]^T$ 可以被控制到其邻域中任意一点 $(\xi + x)$, 等价于 ξ 的一个可达邻域构造出来了. 且由图1易得, 邻域半径 $r \in (0 \ \sin^2 \frac{\theta}{2}]$. 下面证明对任意的初值 $\eta = [\eta_1 \ \eta_2]^T \in \mathbb{R}_*^2$, 亦存在其一邻域是可达的. 因为

$$P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \eta_1 & -\eta_2 \\ \eta_2 & \eta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \eta, \quad PB = BP, \quad (18)$$

有

$$\begin{aligned} (I + t_2 B)(I + t_1 B)\eta &= \\ P(I + t_2 B)(I + t_1 B)\xi &= \\ P(I + \bar{v}B)(\xi + x) &= \\ (I + \bar{v}B)(\eta + Px), \end{aligned} \quad (19)$$

即 η 也可以被控制到其邻域中的任意一点 $(\eta + Px)$, 等价于 η 的一个可达邻域构造出来了. 最后, 利用引理1, 得到可控性.

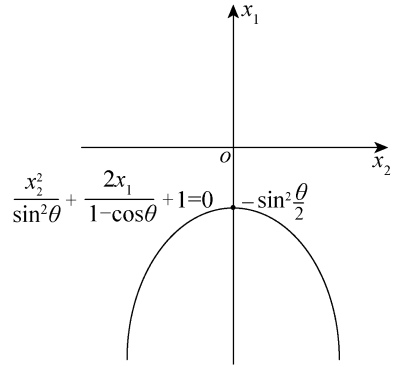


图1 邻域区域

Fig. 1 Region of the neighborhood

注1 事实上, 引理3中的 θ 可取 $(i\pi + \frac{2m}{n}\pi)$, i 为任意整数.

注2 文献[1]中的可控性反例是在引理3中取 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时的特例.

下面, 将讨论系统(2)在更一般形式下的可控性条件.

定理1 对于二阶离散双线性系统(2), 若 B 的特征根是一对共轭复根, 辐角主值满足

$$\alpha = \frac{p}{q}\pi \in (0 \ \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2} \ \pi), \quad p, q \in \mathbb{N}^+, \quad (20)$$

则系统(2)是可控的.

证 显然, 此时 B 具如下若当标准型,

$$B = P \begin{bmatrix} \rho \cos \alpha & \rho \sin \alpha \\ -\rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha \end{bmatrix} P^{-1}. \quad (21)$$

又

$$\begin{bmatrix} \rho \cos \alpha & \rho \sin \alpha \\ -\rho \sin \alpha & \rho \cos \alpha \end{bmatrix} = \frac{-\rho}{2 \cos \alpha} \begin{bmatrix} -1 + \cos(2\alpha - \pi) & \sin(2\alpha - \pi) \\ -\sin(2\alpha - \pi) & -1 + \cos(2\alpha - \pi) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

因式(20)蕴涵 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$, 利用引理3, 可得如下系统:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (I + \tilde{v}(k)\tilde{B})x(k), \quad k = 0, 1, \cdots, \\ \tilde{B} &= \begin{bmatrix} -1 + \cos(2\alpha - \pi) & \sin(2\alpha - \pi) \\ -\sin(2\alpha - \pi) & -1 + \cos(2\alpha - \pi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

是可控的. 最后再利用引理2, 便可得到定理1.

注3 对于系统(2), 若 B 的特征根为两实数, 则由引理2易得(2)不可控. 因为此时, 只需考虑 B 为如下形式:

$$B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

其中若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 $\mu = 0$; 若 $\lambda_1 = \lambda_2$, μ 可为0或1; 即上式包含了实根形式下的若当标准型. 此时, 再考虑初

值 $\xi = [\xi_1 \ 0]^T$, 并代入系统

$$x(k+1) = (I + v(k)B)x(k), k = 0, 1, \dots \quad (23)$$

中, 则得到的状态序列将恒为形式 $[* \ 0]^T$, 即 $[\xi_1 \ 0]^T$, 亦即系统不可控. 而当 B 的特征根为一对纯虚根时, 即 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 系统(2)亦是不可控的, 因为此时有

$$\|I + v(k) \begin{bmatrix} 0 & \rho \\ -\rho & 0 \end{bmatrix}\|_2 = \sqrt{1 + \rho^2 v(k)^2} \geq 1, \quad (24)$$

即对于任意的初值都不可能控制到欧氏范数比它小的状态.

由文献[3,11]知, 对任意的 $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, 系统(1)均不可控. 而以上分析表明, 若系统(1)中的 B 满足定理1的条件, 则其离散化后的系统(2)将是可控的, 由此在更一般的情形下得出了一类双线性系统可控性反例.

推论 1 对于如下二阶离散双线性系统:

$$x(k+1) = (A + v(k)B)x(k), k = 0, 1, \dots, \quad (25)$$

若 $A = I + cB$, 且 B 满足定理1中的条件, c 为任意实数, 则系统(25)是可控的.

证 将 $A = I + cB$ 代入(25)并利用定理1即得.

通过以上分析, 可以给出系统(1)的二阶可控性反例, 那么, 三阶或三阶以上的反例是否存在? 即系统(2)在三阶或三阶以上时是否能可控? 下面, 将证明系统(1)的离散形式, 即系统(2)在高阶时是不可控的, 即关于系统(1)的可控性反例在高阶时不存在.

定理 2 对于离散双线性系统(2), 若其阶数大于2, 则系统(2)不可控.

证 令系统(2)的阶数为 $n \geq 3$, 由引理2, 只需考虑 B 为如下若当标准型:

$$B = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ & & & J_m \end{bmatrix}, \quad (26)$$

其中

$$J_i = \begin{bmatrix} B_i & I & & \\ & B_i & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & B_i \end{bmatrix}, \quad (27)$$

B_i 为一阶实矩阵 λ_i , 或为如下形式的二阶实矩阵:

$$B_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & \mu_i \\ -\mu_i & \lambda_i \end{bmatrix}, i = 1, \dots, m. \quad (28)$$

类似于注3中的分析, 考虑初值 $\xi = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_{n-2} \ 0 \ 0]^T$, 代入系统(2)中, 并注意到矩阵 $(I + v(k)B)$ 的最右下角二阶子块只可能为如下4种情形之一:

$$\begin{bmatrix} \lambda_m & \mu_m \\ -\mu_m & \lambda_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_m & 0 \\ 0 & \lambda_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_m & 1 \\ 0 & \lambda_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_{m-1} & 0 \\ 0 & \lambda_m \end{bmatrix}. \quad (29)$$

则得到的状态序列将恒为形式 $[* \ 0]^T$, 其中 “*” 表示状态的前 $(n-1)$ 个坐标, 即初值 ξ 的最后一个坐标0无法控制, 即系统(2)不可控.

事实上, 系统(1)对于任意阶数都是不可控的(参见文献[3,11]), 而由定理2, 系统(2)在阶数大于2时亦不可控. 因此, 对于系统(1), 三阶或三阶以上的可控性反例是不存在的, 而仅有一阶或二阶反例.

3 结论(Conclusion)

本文研究了一类二阶离散双线性系统可控性问题, 得到了一个易于应用的可控性充分条件, 从而在更一般的情形下得到了一类连续时系统不可控、离散化后可控的反例, 深化了对双线性系统可控性的认识. 进而, 本文证明了对于该类系统, 当其阶数大于2时可控性反例不再存在.

参考文献(References):

- [1] ELLIOTT D L. A controllability counterexample[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 840 – 841.
- [2] MOHLER R R. *Bilinear Control Processes*[M]. New York: Academic, 1973.
- [3] BRUNI C, PILLO G D, KOCH G. Bilinear systems: an appealing class of “nearly linear” systems in theory and applications[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1974, 19(4): 334 – 348.
- [4] MOHLER R R, KOLODZIEJ W J. An overview of bilinear system theory and applications[J]. *IEEE Transactions on System, Man, and Cybernetics*, 1980, 10(10): 683 – 688.
- [5] RINK R E, MOHLER R R. Completely controllable bilinear systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1968, 6(3): 477 – 486.
- [6] HAYNES G, HERMES H. Nonlinear controllability via Lie theory[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1970, 8(4): 450 – 460.
- [7] ELLIOTT D L. A consequence of controllability[J]. *Journal of Differential Equations*, 1971, 10(2): 364 – 370.
- [8] MOHLER R R, RINK R E. Reachable zones for equicontinuous bilinear control processes[J]. *International Journal of Control*, 1971, 14(2): 331 – 339.
- [9] BOOTHBY W M, WILSON E N. Determination of the transitivity of bilinear systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1979, 17(2): 212 – 221.
- [10] KODITSCHKE D E, NARENDRA K S. The controllability of planar bilinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(1): 87 – 89.
- [11] PIECHOTKA U, FRANK P M. Controllability of bilinear systems[J]. *Automatica*, 1992, 28(5): 1043 – 1045.
- [12] KHAPALOV A YU, MOHLER R R. Reachable sets and controllability of bilinear time-invariant systems: a qualitative approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(9): 1342 – 1346.
- [13] TOPUNOV M V. The convexity of the reachable set for a bilinear controllable system[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2003, 67(5): 665 – 670.

- [14] CHENG D Z. Controllability of switched bilinear systems[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, 50(4): 511 – 515.
- [15] YUAN H D, KHANEJA N. Reachable set of bilinear control systems with time varying drift[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(6): 501 – 507.
- [16] GOKA T, TARN T J, ZABORSZKY J. On the controllability of a class of discrete bilinear systems[J]. *Automatica*, 1973, 9(5): 615 – 622.
- [17] TARN T J, ELLIOTT D L, GOKA T. Controllability of discrete bilinear systems with bounded control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1973, 18(3): 298 – 301.
- [18] EVANS M E, MURTHY D N P. Controllability of a class of discrete time bilinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(1): 78 – 83.
- [19] EVANS M E, MURTHY D N P. Controllability of discrete time inhomogeneous bilinear systems[J]. *Automatica*, 1978, 14(2): 147 – 151.
- [20] MURTHY D N P. Controllability of a discrete-time bilinear system[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24(6): 974 – 975.
- [21] HOLLIS P, MURTHY D N P. Study of uncontrollable discrete bilinear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1982, 27(1): 184 – 186.
- [22] SIROTIN A N. Zero-controllability sets of a bilinear discrete system with a bounded scalar control[J]. *Automation and Remote Control*, 2000, 61(10): 1681 – 1689.
- [23] SIROTIN A N. Characterization of the null-controllability sets of commutative bilinear discrete systems with bounded scalar control[J]. *Automation and Remote Control*, 2002, 63(8): 110 – 127.
- [24] DJERIDANE B, CALVET J L. A necessary and sufficient local controllability condition for bilinear discrete-time systems[C] // *Proceedings American Control Conference*. Boston: ACC, 2004: 1755 – 1757.

作者简介:

铁 林 (1984—), 男, 博士研究生, 主要研究领域为非线性控制系统及其应用, E-mail: kingking@asee.buaa.edu.cn;

蔡开元 (1965—), 男, 教授, 长江学者, 主要研究领域为软件可靠性与测试、自主飞行控制、软件控制论, E-mail: kycai@buaa.edu.cn;

林 岩 (1955—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域为鲁棒与自适应控制, E-mail: linyanee2@yahoo.com.cn.

下 期 要 目

磁场控制下的电子自旋量子系统参数辨识..... 吴庆林, 陈宗海, 张陈斌

改进型扰动观测器的控制方法..... 谢 巍, 何忠亮

基于受控拉格朗日函数的垂直起降飞机镇定控制器设计..... 李茂青

基于灰预测和正态云的参数自适应蚁群遗传算法..... 牟 峰, 袁晓辉, 王慈光, 景 云

含有不灵敏区非线性系统的增益调度自适应变结构控制..... 胡剑波, 辛海良

基于极值动力学的自组织优化算法求解TSP问题..... 汪 烨, 吴 婷, 陈玉旺

一类不确定非线性系统自适应输出反馈跟踪控制的新结果..... 尚 芳, 刘允刚, 张承慧

混合性能指标优化问题的大种群规模进化算法..... 巩敦卫, 秦娜娜, 孙晓燕

具时空白噪声1阶双曲系统的稳定性分析..... 戴喜生, 邓飞其

基于冯·诺依曼邻域结构的人工鱼群算法..... 王联合国, 洪 毅

一类具有区间时变多状态时滞系统的稳定性分析与研究..... 王新梅, 魏 武, 裴海龙, 贺良华

EPA网络控制系统分析..... 鲁 立, 冯冬芹, 褚 健, 章 涵

采用生物信息克隆的免疫算法..... 张波涛, 刘士荣, 吕 强