

分数阶系统频域辨识算法

李 旺¹, 张国庆², 王 永¹

(1. 中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027; 2. 新加坡国立大学 互动数码媒体研究所, 新加坡 119077)

摘要: 分数阶微积分提供了一个很好的工具来描述一些复杂的实际系统, 比整数阶模型更简洁准确. 针对分数阶系统建模问题, 阐述了一种同元次分数阶系统频域辨识的极大似然算法. 为此首先简要地介绍了同元次分数阶系统的传递函数表达形式, 然后在此基础上推导了分数阶系统频域极大似然算法, 利用拉格朗日法证明了似然函数和代价函数的等价性, 从而将辨识问题归结为一等价的优化问题, 并进一步对采用 Gauss-Newton 优化计算方法进行了讨论. 最后通过仿真实例验证了其有效性.

关键词: 分数阶系统; 频域辨识; 极大似然算法

中图分类号: O231 **文献标识码:** A

Frequency domain identification of fractional order systems

LI Wang¹, ZHANG Guo-qing², WANG Yong¹

(1. Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027 China;

2. Interactive & Digital Media Institute, National University of Singapore, 119077 Singapore)

Abstract: Fractional order calculus provides an excellent tool to describe some complicated real systems more adequately than integer order models. For the identification of fractional order systems, a maximum likelihood algorithm based on the transfer function in frequency domain is proposed in this paper. First, the fractional order transfer function is briefly introduced. Second, the algorithm is deduced in detail and the equivalence between likelihood function and cost function is verified via Lagrange method, and the identification problem is converted to an equivalent optimization problem. Third, Gauss-Newton method is applied to solve the optimization problem. Finally, this algorithm is validated via an illustrative example.

Key words: fractional-order systems; frequency domain identification; maximum likelihood algorithm

1 引言(Introduction)

分数阶微积分已有三百多年的历史, 且在众多领域日益受到重视, 如各种材料的遗传力学和电特性描述^[1]、岩石的流变性质描述^[2]、分形理论等等, 用传统的整数阶模型已不能准确描述这些对象, 现有研究表明采用分数阶模型处理类问题具有显著优势, 因而分数阶系统建模^[3~7]成为当前的研究热点问题. 系统辨识直接基于输入输出实验数据建立对象的数学描述, 在分数阶系统建模方面具有良好的应用前景.

通常用整数阶模型描述的系统, 其频率特性曲线在零极点处以 ± 20 dB/dec 的斜率变化, 而许多复杂的实际系统的频率特性并不是总能满足这样的约束. 分数阶微积分则向我们提供了一个很好的工具, 可以突破这一限制, 从而能够更准确地描述实际系统.

不同于整数阶微分, 分数阶微分是非局部算子, 具有记忆特性, 在时域计算分数阶微分需要大量的数据, 这就给分数阶系统的时域辨识带来极大的不便. 王振滨等^[5]提出了基于状态空间分解的时域辨识方法, Hartley 等^[8]在时域中研究了分数阶系统的辨识方法, 都需要大量时域数据进行分数阶微分计算; 而采用频域辨识则可以避免这一问题. 同时, 一些整数阶系统辨识方法可以推广到分数阶系统, 李远禄等^[4]将整数阶系统的基于 Levy 法的频域最小二乘方法推广到了分数阶系统, 但是该方法拟合宽频带数据时, 低频部分拟合误差较大, 并且没有考虑噪声, 得到的是有偏估计, 鉴于此, 林军等^[3]研究了辅助变量法, 从而得到无偏估计. 然而在这一方面, 极大似然方法在整数阶系统辨识^[9,10]中具有较大的优势.

本文研究了分数阶系统频域辨识问题, 给出了极

大似然算法的推导过程, 并通过实例仿真验证了方法的有效性, 同时分析了噪声对辨识结果的影响. 仿真结果表明, 该方法不仅可以用于整数阶系统辨识, 还可以用于分数阶系统, 且适用于存在较强噪声干扰的系统辨识.

2 分数阶系统辨识算法(Fractional order system identification algorithm)

2.1 分数阶系统模型(Fractional order system model)

在系统辨识过程中, 系统的输入、输出信号不可避免地会受到噪声的干扰, 研究如图1所示的Errors-in-variables频域模型^[10], 其中 X, Y 分别表示输入输出真实值, N_x, N_y 分别表示输入输出噪声, X_m, Y_m 表示输入输出测量值.

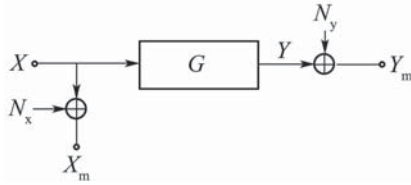


图1 Errors-in-variables频域模型

Fig. 1 Errors-in-variables frequency domain model

不失一般性, 同元次分数阶系统传递函数的一般表达式为

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_n s^{n\alpha} + b_{n-1} s^{(n-1)\alpha} + \cdots + b_1 s^\alpha + b_0}{s^{d\alpha} + a_{d-1} s^{(d-1)\alpha} + \cdots + a_1 s^\alpha + a_0}, \quad (1)$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 为分数阶系统的阶次, 定义待辨识参数向量 $\mathbf{p} = [\mathbf{b}^T \ \mathbf{a}^T]^T$ ($\mathbf{b} = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_n]^T$, $\mathbf{a} = [a_0 \ a_1 \ \cdots \ a_{d-1}]^T$). 式(1)的拉氏反变换可参见文献[11].

考虑 F 个频率分量, 相应的输入、输出信号的频域数据(真实值)分别为:

$$\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_F]^T, \\ \mathbf{Y} = [Y_1 \ Y_2 \ \cdots \ Y_F]^T.$$

则根据模型方程, 系统的输入、输出在复数域存在如下关系:

$$Y_{Rk} + jY_{Ik} = G(j\omega_k, \mathbf{p})(X_{Rk} + jX_{Ik}). \quad (2)$$

其中:

$$G(j\omega_k, \mathbf{p}) = \frac{\sum_{r=0}^n b_r (j\omega_k)^{r\alpha}}{\sum_{r=0}^{d-1} a_r (j\omega_k)^{r\alpha} + (j\omega_k)^{d\alpha}} \triangleq \\ \frac{N(j\omega_k, \mathbf{p})}{D(j\omega_k, \mathbf{p})} = \frac{N_k}{D_k} = \frac{N_{Rk} + jN_{Ik}}{D_{Rk} + jD_{Ik}},$$

$$N_{Rk} = \sum_{i=0}^n b_i \omega_k^{i\alpha} \cos\left(\frac{i\alpha}{2}\pi\right),$$

$$N_{Ik} = \sum_{i=0}^n b_i \omega_k^{i\alpha} \sin\left(\frac{i\alpha}{2}\pi\right),$$

$$D_{Rk} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \omega_k^{i\alpha} \cos\left(\frac{i\alpha}{2}\pi\right) + \omega_k^{d\alpha} \cos\left(\frac{d\alpha}{2}\pi\right),$$

$$D_{Ik} = \sum_{i=0}^{d-1} a_i \omega_k^{i\alpha} \sin\left(\frac{i\alpha}{2}\pi\right) + \omega_k^{d\alpha} \sin\left(\frac{d\alpha}{2}\pi\right),$$

$$Y_{Rk} + jY_{Ik} = Y_k, \ X_{Rk} + jX_{Ik} = X_k, \ k = 1, \cdots, F,$$

$$j^\alpha = e^{j\alpha\pi/2}.$$

定义向量:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_k = [V_1^T \ V_2^T \ \cdots \ V_k^T \ \cdots \ V_F^T]^T, \\ \mathbf{V}_k = [X_k \ Y_k]^T, \mathbf{U}_k = [N_k \ -D_k], \\ k = 1, \cdots, F. \end{cases} \quad (3)$$

则式(2)即为

$$\mathbf{U}_k \mathbf{V}_k = 0, \ k = 1, \cdots, F. \quad (4)$$

2.2 似然函数及其等价形式 (Likelihood function and its equivalent form)

设实验测量数据为:

$$\mathbf{V}_m = [V_{m1}^T \ V_{m2}^T \ \cdots \ V_{mk}^T \ \cdots \ V_{mF}^T]^T.$$

其中 $V_{mk} = [X_{mk} \ Y_{mk}]^T$, 则 $\mathbf{v} = \mathbf{V}_m - \mathbf{V}$ 为相应的测量噪声向量. 假设^[10]: 1) 输入、输出噪声频谱呈正态分布; 2) 各频率分量相互独立; 3) 输入噪声与输出噪声不相关; 则相应的似然函数为

$$f_v = \frac{1}{(2\pi)^{F/2} [\det(\mathbf{C}_v)]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{v}^H \mathbf{C}_v^{-1} \mathbf{v}\right).$$

其中: $\mathbf{C}_v = \text{diag}\{\mathbf{C}_{v1} \ \cdots \ \mathbf{C}_{vk} \ \cdots \ \mathbf{C}_{vF}\}$ 为协方差矩阵, 基于假设3)有: $\mathbf{C}_{vk} = \text{diag}\{\sigma_{xk}^2, \sigma_{yk}^2\}$. 目标为: 在式(4)的约束下, 计算参数 $\mathbf{p}$, 使似然函数达到最大. 对似然函数取负对数得:

$$-\ln(f_v) = \frac{F}{2} \ln(2\pi) + \frac{1}{2} \ln(\det(\mathbf{C}_v)) + \frac{1}{2} \mathbf{v}^H \mathbf{C}_v^{-1} \mathbf{v}.$$

问题归结为具有 F 个等式约束的极小值问题:

$$\begin{cases} \min_{\mathbf{p}} L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F (\mathbf{V}_{mk} - \mathbf{V}_k)^H \mathbf{C}_{vk}^{-1} (\mathbf{V}_{mk} - \mathbf{V}_k), \\ \text{s.t. } \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k = 0, \ k = 1, \cdots, F. \end{cases} \quad (5)$$

因极值问题的真实值 V_k 未知, 需用其极大似然估计值代替, 下述定理给出了问题(5)的等价形式.

定理1 基于假设条件1)~3), 极值问题(5)等价于如下极小值问题:

$$\min_{\mathbf{p}} K(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \frac{|N_k X_{mk} - D_k Y_{mk}|^2}{\sigma_{xk}^2 |N_k|^2 + \sigma_{yk}^2 |D_k|^2},$$

证 根据Lagrange法有

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F (\mathbf{V}_{mk}^H - \mathbf{V}_k^H) \mathbf{C}_{\mathbf{v}k}^{-1} (\mathbf{V}_{mk} - \mathbf{V}_k) + \sum_{k=1}^F \lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k. \quad (6)$$

由 $\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{V})}{\partial \mathbf{V}_k} = \mathbf{0}$ 和 $\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{V})}{\partial \lambda_k} = \mathbf{0} \ (\forall k = 1, \dots, F)$, 可得

$$(\mathbf{V}_k)_{\text{ML}} = \mathbf{V}_{mk} - (2\lambda_k \mathbf{U}_k \mathbf{C}_{\mathbf{v}k})^H. \quad (7)$$

将 X_k 和 Y_k 的极大似然估计值式(7)代入式(4)得

$$\lambda_k^H = \frac{1}{2} (\mathbf{U}_k \mathbf{C}_{\mathbf{v}k}^H \mathbf{U}_k^H)^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{V}_{mk}. \quad (8)$$

将上式代入式(7)得

$$(\mathbf{V}_k)_{\text{ML}} = \mathbf{V}_{mk} - \mathbf{C}_{\mathbf{v}k}^H \mathbf{U}_k^H (\mathbf{U}_k \mathbf{C}_{\mathbf{v}k}^H \mathbf{U}_k^H)^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{V}_{mk}.$$

将上式代入式(6)得

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{V}_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \mathbf{V}_{mk}^H \mathbf{U}_k^H (\mathbf{U}_k \mathbf{C}_{\mathbf{v}k}^H \mathbf{U}_k^H)^{-1} \mathbf{U}_k \mathbf{V}_{mk}.$$

将式(3)代入上式, 经整理得如下极小值问题:

$$\min_{\mathbf{p}} K(\mathbf{p}, \mathbf{V}_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^F \frac{|N_k X_{mk} - D_k Y_{mk}|^2}{\sigma_{xk}^2 |N_k|^2 + \sigma_{yk}^2 |D_k|^2}, \quad (9)$$

即待辨识参数向量 $\mathbf{p}$ 的极大似然估计值为 $\frac{\partial K(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{0}$ 的解。

证毕。

由式(9)可知, 当 $\alpha = 1$ 时则退化为整数阶系统的极大似然频域辨识算法。得到等价的代价函数式(9)之后, 下一步则是对其进行优化求解。

2.3 优化方法(Optimization method)

对式(9)进行优化计算有多种方法, 如基于梯度的牛顿法、变尺度法、L-M法等, 本文这里采用Gauss-Newton法。首先对式(9)进行整理得到如下形式: $K(\mathbf{p}, \mathbf{V}_m) = 1/2 \cdot E_{\text{SRm}}^T E_{\text{SRm}}$, 其中:

$$\begin{aligned} E_{\text{SRm}} &= [E_{\text{SRm}}^T, E_{\text{SRm}}^T]^T, \\ E_{\text{SRm}} &= \left[\frac{E_{\text{Rm1}}}{S_{\text{E1}}} \dots \frac{E_{\text{Rmk}}}{S_{\text{Ek}}} \dots \frac{E_{\text{RmF}}}{S_{\text{EF}}} \right]^T, \\ E_{\text{SRm}} &= \left[\frac{E_{\text{Im1}}}{S_{\text{E1}}} \dots \frac{E_{\text{Imk}}}{S_{\text{Ek}}} \dots \frac{E_{\text{ImF}}}{S_{\text{EF}}} \right]^T, \\ E_{\text{Rmk}} &= X_{\text{Rmk}} N_{\text{Rk}} - X_{\text{Imk}} N_{\text{Ik}} - Y_{\text{Rmk}} D_{\text{Rk}} + Y_{\text{Imk}} D_{\text{Ik}}, \\ E_{\text{Imk}} &= X_{\text{Rmk}} N_{\text{Ik}} + X_{\text{Imk}} N_{\text{Rk}} - Y_{\text{Rmk}} D_{\text{Ik}} - Y_{\text{Imk}} D_{\text{Rk}}, \\ S_{\text{Ek}}^2 &= \sigma_{xk}^2 (N_{\text{Ik}}^2 + N_{\text{Rk}}^2) + \sigma_{yk}^2 (D_{\text{Ik}}^2 + D_{\text{Rk}}^2), \\ k &= 1, \dots, F. \end{aligned}$$

由Gauss-Newton法有如下迭代关系:

$$\mathbf{p}_{i+1} = \mathbf{p}_i - (\mathbf{J}_i^T \mathbf{J}_i)^{-1} \mathbf{J}_i^T E_{\text{SRm}}, \quad (10)$$

其中关键是Jacobian矩阵 $\mathbf{J}$ 的计算, 如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial \mathbf{b}} & \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial \mathbf{a}} \\ \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial \mathbf{b}} & \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial \mathbf{a}} \end{bmatrix}, \\ \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial b_r} &= \frac{1}{S_{\text{Ek}}} [X_{\text{Rmk}} \gamma_{kr} - X_{\text{Imk}} \eta_{kr} - \frac{\partial S_{\text{Ek}}}{\partial b_r} E_{\text{SRmk}}]^T, \\ \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial b_r} &= \frac{1}{S_{\text{Ek}}} [X_{\text{Rmk}} \eta_{kr} + X_{\text{Imk}} \gamma_{kr} - \frac{\partial S_{\text{Ek}}}{\partial b_r} E_{\text{SRmk}}]^T, \\ \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial a_s} &= \frac{-1}{S_{\text{Ek}}} [Y_{\text{Rmk}} \gamma_{ks} - Y_{\text{Imk}} \eta_{ks} + \frac{\partial S_{\text{Ek}}}{\partial a_s} E_{\text{SRmk}}]^T, \\ \frac{\partial E_{\text{SRm}}}{\partial a_s} &= \frac{-1}{S_{\text{Ek}}} [Y_{\text{Rmk}} \eta_{ks} + Y_{\text{Imk}} \gamma_{ks} + \frac{\partial S_{\text{Ek}}}{\partial a_s} E_{\text{SRmk}}]^T, \\ \frac{\partial S_{\text{Ek}}}{\partial b_r} &= \sigma_{xk}^2 (N_{\text{Rk}} \gamma_{kr} + N_{\text{Ik}} \eta_{kr}) / S_{\text{Ek}}, \\ \frac{\partial S_{\text{Ek}}}{\partial a_s} &= \sigma_{yk}^2 (D_{\text{Rk}} \gamma_{kr} + D_{\text{Ik}} \eta_{kr}) / S_{\text{Ek}}, \\ \gamma_{kr} &= \omega_k^{r\alpha} \cos(r\alpha \frac{\pi}{2}), \eta_{kr} = \omega_k^{r\alpha} \sin(r\alpha \frac{\pi}{2}), \\ k &= 1 \dots F, r = 0 \dots n, s = 0 \dots d - 1. \end{aligned}$$

可以采用一次完成最小二乘法得到的结果作为初值, 虽然一次完成最小二乘法在强噪声情况下辨识结果精度较差^[4], 但其计算简单, 将其作为初值是一个很好的选择。

迭代优化终止的最简单的方法设定迭代次数, 也可根据 $\|P_{i+1} - P_i\| / \|P_i\| < \varepsilon$ (其中 ε 是一适当小的正数) 确定迭代的次数。

3 仿真算例(Simulation example)

考虑如下分数阶传递函数^[6]:

$$G(s) = \frac{1.5s^\alpha + 0.25}{s^{2\alpha} - 0.75s^\alpha + 0.5}, \quad (11)$$

其中 $\alpha = 0.5$, 式(11)对应的分数阶微分方程为

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^1 y(t) - 0.75 {}_0 D_t^{0.5} y(t) + 0.5 y(t) &= \\ 1.5 {}_0 D_t^{0.5} u(t) + 0.25 u(t), \end{aligned}$$

其中 ${}_0 D_t^\alpha$ 为分数阶微分算子^[11]。设计多正弦激励

信号, 输入、输出的信噪比均为30 dB, 利用短记忆法计算输出^[11,12], 时域输入输出如图2所示, 其中采样频率为200 Hz, 数据长度为8192, 初值为零. 得到输入、输出时域数据之后, 采用FFT(fast fourier transformation)将其转化到频域, 分别记为 X, Y , 则根据 Y/X 计算的系统频率特性曲线以及 $G(j\omega)$ 频率特性曲线如图3所示.

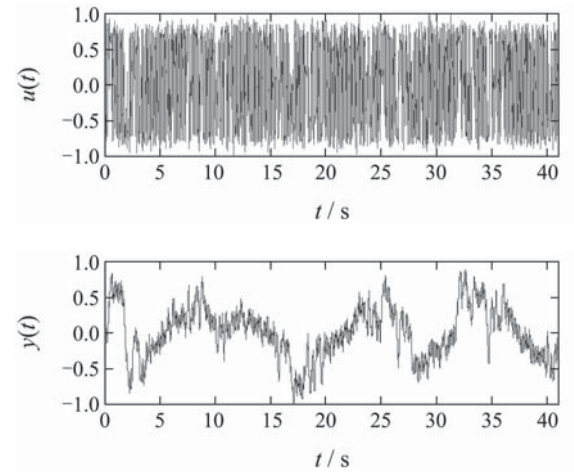


图 2 时域输入、输出

Fig. 2 Input and output in time domain

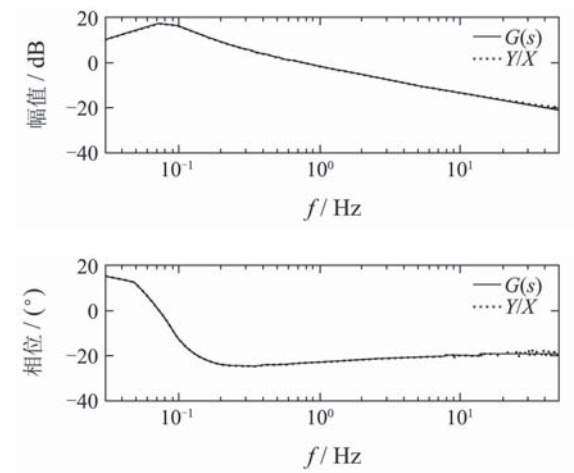


图 3 $G(s)$ 与 Y/X 频率特性曲线

Fig. 3 $G(s)$ 与 Y/X frequency characteristics

基于频域数据采用本文提出的辨识算法对其进行极大似然辨识.

模型阶次 α 的确定采用阶次扫描的方式, 可以得到不同阶次下代价函数的值, 如图4所示, 其中 $\alpha \in [0, 1]$, 步长为0.1. 从图4中可以看出当 $\alpha=0.5$ 时, 代价函数最小, 此时得到的辨识结果如表1中(ML/30 dB)所示. 从表1中可见, 辨识结果与真实值非常接近.

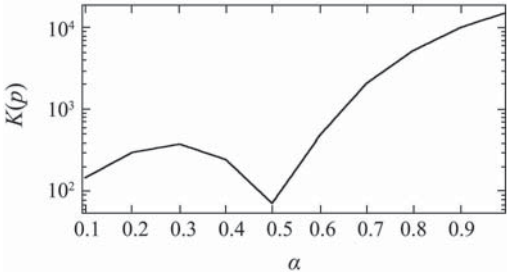


图 4 阶次 α 与代价函数值的关系

Fig. 4 Relationship between α and cost value

表 1 信噪比为30, 20, 10 dB时辨识结果

Table 1 Identification results with SNR=30, 20, 10 dB

待辨识参数	b_1	b_0	a_1	a_0
真实值	1.5	0.25	-0.75	0.5
ML/30dB	1.5026	0.2534	-0.7476	0.5000
ML/20dB	1.4987	0.2292	-0.7480	0.4907
ML/10dB	1.4947	0.1809	-0.7719	0.5056
LS/10dB	1.4028	0.4809	-0.8450	0.5822

为了分析噪声对辨识结果的影响, 改变输入、输出信噪比, 表1给出了不同噪声水平下的辨识结果(其中包括信噪比为10 dB时的最小二乘法^[4]辨识结果), 图5为相应的辨识模型幅值误差 M_{err} 和相位误差 P_{err} 随频率 f 的变化曲线. 从图5中可以看出, 随着噪声水平的增加, 辨识模型误差在低频段增大较明显; 另外, 同在10 dB信噪比条件下, 最小二乘辨识误差与本文方法相比明显较大.

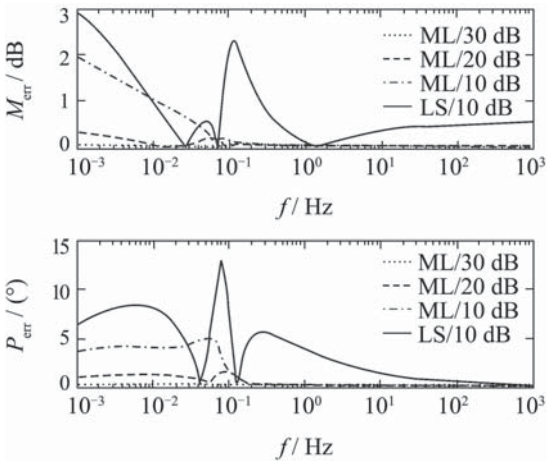


图 5 不同噪声水平下的辨识结果

Fig. 5 Identification results under different noise levels

4 结论(Conclusions)

对于存在分数阶特性的系统, 采用分数阶传递

函数能够更好地拟合其频率特性. 在考虑输入输出噪声的情况下, 本文导出了分数阶系统频域辨识的极大似然算法, 给出了代价函数的等价性证明和具体的计算方法. 该算法能够有效辨识分数阶模型和整数阶模型, 且对噪声有一定的抗干扰能力, 能够适用于存在较强噪声干扰的系统辨识.

参考文献(References):

- [1] NONNEMACHER T F, GLOCKLE W G. A fractional model for mechanical stress relaxation[J]. *Philosophical Magazine Letters*, 1991, 64(2): 89 – 93.
- [2] FRIEDRICH C. Rheological materials functions for associating combshaped or H-shaped polymers: a fractional calculus approach[J]. *Philosophical Magazine Letters*, 1992, 66(6): 287 – 292.
- [3] 林军, POINOT Thierry, 李寿涛, 等. 非整数阶系统的频域辨识[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 517 – 520.
(LIN Jun, POINOT Thierry, LI Shoutao, et al. Identification of non-integer-order systems in frequency domain[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 517 – 520.)
- [4] 李远禄, 于盛林. 非整数阶系统的频域辨识法[J]. 自动化学报, 2007, 33(8): 882 – 884.
(LI Yuanlu, YU Shenglin. Identification of non-integer order systems in frequency domain[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(8): 882 – 884.)
- [5] WANG Z B, CAO G Y, ZHU X J. Identification algorithm for a kind of fractional order system[J]. *Journal of Southeast University (English Edition)*, 2004, 20(3): 297 – 302.
- [6] 李远禄, 于盛林, 郑罡. 非整数阶系统频域辨识法的递推最小二乘算法[J]. 信息与控制, 2007, 36(2): 171 – 175.
(LI Yuanlu, YU Shenglin, ZHENG Gang. A recursive least square algorithm for frequency domain identification of non-integer order systems[J]. *Information and Control*, 2007, 36(2): 171 – 175.)
- [7] AL-ASSAF Y, EL-KHAZALI R, AHMAD W. Identification of fractional chaotic system parameters[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(4): 897 – 905.
- [8] HARTLEY T T, LORENZO F C. Fractional-order system identification based on continuous order distributions[J]. *Signal Processing*, 2003, 83(11): 2287 – 2300.
- [9] 王永, 董卓敏, 孙德敏. 柔性板的多变量频域辨识及其主动控制[J]. 振动工程学报, 2004, 17(2): 141 – 146.
(WANG Yong, DONG Zhuomin, SUN Demin. Multivariable frequency domain identification and experimental demonstration of active vibration control on a flexible plate[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2004, 17(2): 141 – 146.)
- [10] SCHOUKENS J, PINTELON R. *Identification of Linear Systems—a Practical Guideline to Accurate Modeling*[M]. Oxford, UK: Pergamon, 1991.
- [11] PODLUBNY I. Fractional-order systems and PID-controllers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.
- [12] SHANTANU D. *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*[M]. Berlin: Springer Press, 2008.
- [13] CHEN Y Q, PETRAS I, XUE D Y. Fractional order control—a tutorial[C] // *2009 American Control Conference Hyatt Regency Riverfront*. MO, USA: [s.l.], 2009: 1397 – 1411.

作者简介:

李 旺 (1983—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为分数阶系统, E-mail: aswanlw@mail.ustc.edu.cn;

张国庆 (1981—), 男, 2008年于中国科学技术大学自动化系获博士学位, 目前在新加坡国立大学互动数码媒体研究所做博士后研究工作, 目前研究方向为机器人导航与控制, E-mail: idmzg@nus.edu.sg;

王 永 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 2001年由中国科学技术大学“通信与信息系统”博士后出站, 目前研究方向为振动主动控制、分数阶系统, 国内外发表学术论文100余篇, E-mail: yongwang@ustc.edu.cn.