第 28 卷第 6 期
2011 年 6 月

控制理论与应用
Control Theory & Applications

Vol. 28 No. 6
Jun. 2011

文章编号: 1000−8152(2011)06−0874−07

# 线性控制系统的无界多面体不变集

张 霞[1,2], 高 岩[3], 夏尊铨[1]

(1. 大连理工大学 数学科学学院, 辽宁 大连 116024; 2. 浙江财经学院 数学与统计学院, 浙江 杭州 310018;

3. 上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

**摘要**: 本文利用非光滑分析方法, 讨论了线性控制系统的无界多面体不变集问题. 当无界多面体的极方向满足一定条件时, 得到了该无界多面体为一类线性控制系统弱不变集的判别方法. 然后在更一般的线性控制系统下给出了无界多面体为强不变集的充分条件. 最后给出两个应用实例.

**关键词**: 线性控制系统; 不变集; 多面体; 非光滑分析

**中图分类号**: O231.2;TD350 **文献标识码**: A

# Unbounded polyhedral invariant sets for linear control systems

ZHANG Xia[1,2], GAO Yan[3], XIA Zun-quan[1]

(1. School of Mathematical Sciences, Dalian University of Technology, Dalian Liaoling 116024, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Zhejiang University of Finance and Economics, Hangzhou Zhejiang 310018, China;
3. School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

**Abstract:** The nonsmooth analysis methods are applied to investigate the unbounded polyhedral invariant sets for linear control systems. When the extreme directions of an unbounded polyhedron satisfy some conditions, we derive the criterion for that unbounded polyhedron to be a weak invariant set for a class of linear control systems. The sufficient condition is also obtained for the unbounded polyhedron to be the strong invariant set for more general linear control systems. Two applied examples are given for illustration.

**Key words:** linear control systems; invariant set; polyhedron; nonsmooth analysis

## 1 引言(Introduction)

在许多实际系统中, 特别是混杂系统, 如电子振荡器、行走机器人、人口动态变化等它们的稳定状态往往不再是平衡点而是一个不变集, 并且系统平衡点处的稳定性问题也可以看作系统的单点不变集问题, 所以不变集的研究在系统的稳定性分析与设计以及吸引域的计算等方面都有广泛的应用[1~3]. 特别是系统强不变集的特点使得系统的稳定具有鲁棒性, 所以系统的强不变集理论也常用于不确定系统的稳定性分析和设计[4,5]. 另外, 在微分对策研究中一个重要的问题即胜利域的确定问题本身可看作系统强不变集问题[6,7]. 因此, 系统的不变集问题是现代控制理论及应用中一个重要的研究课题.

系统不变集的判别和不变核的计算是不变性理论研究中最重要的问题. 目前, 线性系统不变集主要集中于椭圆不变集和多面体不变集的研究[8,9]. 由于许多实际控制问题在状态或控制向量上的线性限制使得多面体不变集比椭圆不变集更方便地近似系统的可达集和吸引域[10], 而且使用多面体不变集所得到的的优化问题较易处理[11], 所以无论在理论研究中还是在工程应用上, 多面体不变集具有重要的研究价值. 另外, 当利用Lyapunov第二方法研究系统稳定性时, 不变集还可以通过所构造的Lyapunov函数的水平集得到[12]. 例如, 文献[10]借助Lyapunov函数的水平集得到不变集的思想以及通过一系列二次规划方法, 给出了在已知椭圆不变集情况下得到多面体不变集的算法.

在多面体不变集的研究中, 通常的做法是采用多面体的外部描述[1,13], 即使用线性不等式约束描述的形式, 而文献[14,15]采用内部描述, 即用极点和极方向表示多面体, 给出了相应线性控制系统的不变性判别方法, 该方法与传统方法相比操作较简单. 在此本文将其主要结论作一说明. 文献[14]考虑了无界生存域(又叫弱不变集)的情况, 指出若一个集合是某系统的生存域, 则该集合沿此系统矩阵的具有非负特征值的特征向量方向移动得到的集合仍然是一个生存域. 在文献[15]中给出了当容许控制集也为多面体时的线性控制系统关于有界多面体是否生

收稿日期: 2009−04−24; 收修改稿日期: 2010−06−06.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671126, 10971187, 11071029); 上海市重点学科建设资助项目(S30501); 上海市科委地方高校能力建设资助项目(10550500800); 安徽省高等学校省级自然科学研究资助项目(KJ2010B102).

存的判别方法. 综合文献[14,15]给出的结论, 可以得到容许控制集为有界多面体的线性控制系统关于一类很特殊的无界多面体的不变性判别方法, 该无界多面体的极方向为系统矩阵的属于非负特征值的特征向量.

本文考虑更一般的无界多面体, 该无界多面体的极方向在系统矩阵作用下, 只要能变成各极方向的非负线性组合即可, 而不一定与系统矩阵的特征向量有关. 本文使用微分包含以及切锥的计算等非光滑分析手段, 得到这类无界多面体为线性控制系统的弱不变集的判别方法. 该方法适用于更广泛的无界多面体, 而且不用计算系统矩阵的特征值和特征向量. 同时还放宽了施加在线性系统上的约束条件, 即容许控制集为一般凸集而不只是多面体. 另外, 文献[14,15]中并没提及强不变集问题, 本文利用类似系统的弱不变集讨论方法, 对容许控制为任意集合的线性控制系统, 给出了一类无界多面体强不变集的判别方法. 由此可见, 本文的工作不是对已有结果的平凡推广, 而是在线性控制不变集判别方法和问题的适应范围上都有了较大的改进, 并解决了一类线性控制系统的无界多面体强不变集的判别问题, 具有重要的理论和实际意义.

## 2 不变集基本概念与性质(Basic concepts and properties of the invariant set)

微分包含是研究系统不变集问题的最有力的工具之一. 考虑微分包含

$$\dot{x}(t) \in F(x),\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

这里$F(x)$为$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$子集的映射.

**定义 1**　设$W \subset \mathbb{R}^n$, 如果对任意初始条件$x_0 \in W$, 都存在系统(1)的解$x(t)$, 使得$x(t) \in W, \forall t \geqslant 0$, 则集合$W$为微分包含式(1)的弱不变集, 这样的解$x(t)$也称为弱不变解; 如果对任意初始条件$x_0 \in W$和式(1)任意解$x(t)$, 都有$x(t) \in W, \forall t \geqslant 0$, 则称集合$W$为微分包含式(1)的强不变集[16,17].

**定义 2**　假设集合$K \subset \mathbb{R}^n$非空, $K$在点$x \in K$的切锥定义为[17]

$$T_K(x) = \{v \in \mathbb{R}^n | \lim_{t\to 0^+} \inf \frac{1}{t}\, d_K(x+tv) = 0\},$$

其中$d_K(y)$为点$y \in \mathbb{R}^n$到集合$K$的距离, 即

$$d_K(y) = \inf_{s\in K} \|y - s\|.$$

**引理 1**　$W \subset \mathbb{R}^n$为微分包含式(1)的弱不变集的充要条件是对任意$x \in W$, 有

$$F(x) \cap T_{\mathrm{W}}(x) \neq \phi, \tag{2}$$

其中$\phi$代表空集. $W \subset \mathbb{R}^n$为微分包含式(1)的强不变集的充要条件是对任意$x \in W$, 有

$$F(x) \subset T_{\mathrm{W}}(x). \tag{3}$$

根据凸分析理论[18], 有界多面体中的任何点都可以表示为该多面体的各极点的凸组合形式; 对无界多面体中的任何点, 则都可以表示为该多面体的极点的凸组合加上极方向的非负线性组合的形式. 极点和极方向的定义如下[15,18]:

**定义 3**　设$S \subset \mathbb{R}^n$为一非空凸集, 如果$x_1, x_2 \in S$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, 对$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, 必有$x = x_1 = x_2$, 则称$x$为$S$的极点.

**定义 4**　设$S \subset \mathbb{R}^n$为一非空凸集, $d \in \mathbb{R}^n$, 如果对任意$x \in S$, $\lambda \geqslant 0$,都有$x + \lambda d \in S$, 则$d$称为$S$ 的一个方向. 设$d_1, d_2$为$S$的两个方向, 如果对任意$\alpha > 0$ , 有$d_2 \neq \alpha d_1$, 则称$d_1, d_2$为不同的方向. 如果$S$的方向$d$不能表示成$S$两个不同方向的正线性组合, 即如果$d = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2, \lambda_1, \lambda_2 > 0$, 则存在某个$\alpha > 0$, 使得$d_2 = \alpha d_1$, 则称$d$为$S$的极方向.

## 3 弱不变集充分条件(Sufficient condition of the weak invariant set)

设$W \subset \mathbb{R}^p$为一无界多面体, 其极点为$\omega_i (i = 1, 2, \cdots, m)$, 极方向为$d_j (j = 1, 2, \cdots, n)$, 则

$$W = \mathrm{co}\,\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m\} + \mathrm{cone}\,\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}, \tag{4}$$

这里: co表示凸包, cone表示凸锥. 故对任意$x \in W$, 存在$\mu_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,m)$, $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, $\nu_j \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$, 使得

$$x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \nu_j d_j,$$

并由Caratheódory定理[18]知$m + n \leqslant p + 1$.

考虑如下的线性时不变系统:

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ u \in U, \tag{5}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^p$, $A$为$p$阶方阵, $B$为$p \times q$阶矩阵, $U \subset \mathbb{R}^q$.

下面给出无界多面体$W$为系统(5)的弱不变集的判别定理.

**定理 1**　考虑系统(5), 其中$U$为凸集. $W$为一无界多面体, 由式(4)给出. 如果对$W$的任意极方向$d_j (j = 1, 2, \cdots, n)$, 都存在$\lambda_r \geqslant 0 (r = 1, 2, \cdots, n)$, 使$Ad_j = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r d_r$, 且在极点处满足弱不变性条件, 即

$$\bigcup_{u\in U} \{A\omega_i + Bu\} \cap T_{\mathrm{W}}(\omega_i) \neq \phi,\ i = 1, 2, \cdots, m,$$

则$W$为线性控制系统(5)的弱不变集.

**证**　线性控制系统(5)可等价地表示为下面的微分包含:

$$\dot{x} \in F(x) = \bigcup_{u\in U} \{Ax + Bu\}. \tag{6}$$

要证明$W$为线性控制系统(5)的弱不变集, 只要证明$W$为微分包含式(6)的弱不变集即可, 且由引例1, 只需证明式(2)成立. 当$x$为$W$的任意内点时, $T_{\mathrm{W}}(x) = \mathbb{R}^p$, 显然$W$为微分包含式(6)的弱不变集. 当$x$为$W$的任意边界点时, 不防设

$$x = \sum_{i=1}^{m} \mu_i\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \nu_j d_j,$$

这里$\mu_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1, \nu_j \geqslant 0$. 由无界多面体切锥[17]的计算可知, $y \in T_{\mathrm{W}}(x)$当且仅当存在$s > 0, \xi \in W$, 使得$y = s(\xi - x)$, 所以要证明$W$为微分包含式(6)的弱不变集, 只需找到$s > 0$, $\xi \in W$, $\bar{u} \in U$, 使得$s(\xi - x) = Ax + B\bar{u}$成立即可.

由已知条件

$$F(\omega_i) = \bigcup_{u\in U} \{A\omega_i + Bu\} \cap T_{\mathrm{W}}(\omega_i) \neq \phi,$$

对每个$\omega_i$, 存在$s_i > 0, \varsigma_i \in W, u_i \in U$, 使得

$$s_i(\varsigma_i - \omega_i) = A\omega_i + Bu_i.$$

不妨设$\varsigma_i = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik}\omega_k + \sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij}d_j$, 这里$\sum\limits_{k=1}^{m} a_{ik} = 1$, $a_{ik} \geqslant 0, b_{ij} \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$.

取$s = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} \{s_i\}$, 令

$$\xi_i = \omega_i + \frac{s_i}{s}(\varsigma_i - \omega_i) = \sum_{k=1}^{m} \frac{s_i a_{ik}}{s}\omega_k + (1 - \frac{s_i}{s})\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \frac{s_i}{s} b_{ij} d_j,$$

则$\xi_i \in W$. 事实上, 由于所有$\omega_i$的系数之和

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{s_i a_{ik}}{s} + (1 - \frac{s_i}{s}) = \frac{s_i}{s} \sum_{k=1}^{m} a_{ik} + (1 - \frac{s_i}{s}) = \frac{s_i}{s} + (1 - \frac{s_i}{s}) = 1,$$

且$\frac{s_i a_{ik}}{s} \geqslant 0$, $1 - \frac{s_i}{s} \geqslant 0$, $\frac{s_i}{s} b_{ij} \geqslant 0$, 所以$\xi_i$可以表示成$W$的极点的凸组合以及极方向的非负线性组合, 故$\xi_i \in W$. 这样便存在$s > 0$对每个$\omega_i (i = 1, 2, \cdots, m)$都存在$\xi_i \in W, u_i \in U$, 使得下式成立:

$$s(\xi_i - \omega_i) = A\omega_i + Bu_i. \tag{7}$$

设

$$\xi_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik}\omega_k + \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} d_j,$$

其中: $\sum\limits_{k=1}^{m} \mu_{ik} = 1, \mu_{ik} \geqslant 0, \nu_{ij} \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$. 式(7)成为

$$s(\sum_{k=1}^{m} \mu_{ik}\omega_k + \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} d_j - \omega_i) = A\omega_i + Bu_i.$$

对上式移项整理得

$$s(\sum_{k=1}^{m} \mu_{ik}\omega_k + \sum_{j=1}^{n} \nu_{ij} d_j) = (A + sI)\omega_i + Bu_i,$$

这里$I$为$p$阶单位阵. 上式两边同乘以$\mu_i$, 并注意到$\mu_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, 再求和得

$$s(\sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{m} \mu_k\mu_{ki})\omega_i + \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \mu_i\nu_{ij}) d_j) = (A + sI) \sum_{i=1}^{m} (\mu_i\omega_i) + B \sum_{i=1}^{m} (\mu_i u_i). \tag{8}$$

式(8)两边同时加上$\sum\limits_{j=1}^{n} A(\nu_j d_j)$, 并考虑到$Ad_j = \sum\limits_{r=1}^{n} \lambda_r d_r, \lambda_r \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots, n)$, 所以

$$s[\sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{m} \mu_k\mu_{ki})\omega_i + \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} \mu_i\nu_{ij}) d_j + \sum_{j=1}^{n} ((\frac{1}{s} \sum_{r=1}^{n} \nu_r)\lambda_j + \nu_j) d_j - (\sum_{i=1}^{m} \mu_i\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \nu_j d_j)] = A(\sum_{i=1}^{m} \mu_i\omega_i + \sum_{j=1}^{n} \nu_j d_j) + B \sum_{i=1}^{m} \mu_i u_i.$$

因为$\sum\limits_{k=1}^{m} \mu_{ik} = 1$, $\mu_{ik} \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, $\mu_i \geqslant 0$, 所以$\sum\limits_{k=1}^{m} \mu_k\mu_{ki} \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$, 且

$$\sum_{i=1}^{m} (\sum_{k=1}^{m} \mu_k\mu_{ki}) = \sum_{i=1}^{m} (\mu_i \sum_{k=1}^{m} \mu_{ik}) = 1.$$

若令$\xi = \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i\omega_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{\nu}_j d_j$, 则$\xi \in W$, 这里

$$\bar{\mu}_i = \sum_{k=1}^{m} \mu_k\mu_{ki},$$

$$\bar{\nu}_j = \sum_{i=1}^{m} \mu_i\nu_{ij} + (\frac{1}{s} \sum_{r=1}^{n} \nu_r)\lambda_j + \nu_j \geqslant 0.$$

再令$\bar{u} = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i u_i$, 因为$U$为凸集, 且$\sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i = 1$, 所以$\bar{u} \in U$. 考虑到$x = \sum\limits_{i=1}^{m} \mu_i\omega_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \nu_j d_j$, 这样找到$s > 0, \xi \in W, \bar{u} \in U$, 使得$s(\xi - x) = Ax + B\bar{u}$. 所以$W$为微分包含(6)的弱不变集, 从而为线性控制系统(5)的弱不变集.

证毕.

**推论 1** 考虑系统(5), 其中$U$为凸集. $W$为一无界多面体, 由式(4)给出. 若$W$的所有极方向$d_j$都为$A$的属于非负特征值的特征向量, 且$W$在极点处满足弱不变性条件, 即

$$\bigcup_{u\in U} \{A\omega_i + Bu\} \cap T_{\mathrm{W}}(\omega_i) \neq \phi,\ i = 1, 2, \cdots, m,$$

则$W$为线性系统(5)的弱不变集.

这个结论是定理1的特殊情形, 也可由文献[14, 15]得到.

## 4 强不变集充分条件(Sufficient condition of the strong invariant set)

下面给出无界多面体$W$为系统(5)的强不变集的充分条件.

**定理 2** 考虑系统(5), $U \subset \mathbb{R}^q$. 设$W$为一无界多面体, 由式(4)给出. 如果对$W$的任意极方向$d_j(j=1,2,\cdots,n)$都存在$\lambda \geqslant 0(j=1,2,\cdots,n)$, 使$Ad_j=\sum\limits_{r=1}^{n}\lambda_r d_r$, 且$W$在极点处满足$\bigcup\limits_{u\in U}\{A\omega_i+Bu\} \subset T_{\rm W}(\omega_i)(i=1,2,\cdots,m)$, 则$W$为线性控制系统(5)的强不变集.

**证** 由线性控制系统(5)与微分包含式(6)的等价性, 只要证明$W$为微分包含式(6)的强不变集即可, 且由引理1只要证明式(3)成立. 不妨设$W$的任意边界点$x=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\omega_i+\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_j d_j$, 这里$\mu_i \geqslant 0, \sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i=1, \nu_j \geqslant 0$. 由式(3)知, 若对$\forall u \in U$, 都能找到$s>0$, $\xi \in W$使得$Ax+Bu=s(\xi-x)$, 则$W$为微分包含式(6)的强不变集.

类似于定理1中式(7)的推导, 因为

$$F(\omega_i)=\bigcup_{u\in U}\{A\omega_i+Bu\} \subset T_{\rm W}(\omega_i),$$

其中$i=1,2,\cdots,m$, 所以存在$s>0$对每个$\omega_i$任意$u \in U$, 存在$\xi_i=\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_{ik}\omega_k+\sum\limits_{j=1}^{n}\nu_{ij}d_j \in W$使得

$$s(\xi_i-\omega_i)=A\omega_i+Bu, \tag{9}$$

这里$\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_{ik}=1, \mu_{ik} \geqslant 0, \nu_{ij} \geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$. 对式(9)移项整理得

$$s(\sum_{k=1}^{m}\mu_{ik}\omega_k+\sum_{j=1}^{n}\nu_{ij}d_j)=(A+sI)\omega_i+Bu.$$

上式两边同乘以$\mu_i$, 并求和得

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i(\sum_{k=1}^{m}\mu_{ik}\omega_k)+\sum_{i=1}^{m}\mu_i(\sum_{j=1}^{n}\nu_{ij}d_j)= (A+sI)\sum_{i=1}^{m}\mu_i\omega_i+Bu.$$

上式两边同时加上$\sum\limits_{j=1}^{n}A(\nu_j d_j)$, 并考虑到$Ad_j=\sum\limits_{r=1}^{n}\lambda_r d_r(j=1,2,\cdots,n,\ \lambda_r \geqslant 0)$, 所以

$$s[\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m}\mu_k\mu_{ki})\omega_i+\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nu_{ij})d_j+ \sum_{j=1}^{n}((\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{n}\nu_r)\lambda_j+\nu_j)d_j-(\sum_{i=1}^{m}\mu_i\omega_i+\sum_{j=1}^{n}\nu_j d_j)]= A(\sum_{i=1}^{m}\mu_i\omega_i+\sum_{j=1}^{n}\nu_j d_j)+Bu.$$

因为$\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_{ik}=1,\ \mu_{ik} \geqslant 0,\ \sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i=1, \mu_i \geqslant 0$, 所以$\sum\limits_{k=1}^{m}\mu_k\mu_{ki} \geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$, 且

$$\sum_{i=1}^{m}(\sum_{k=1}^{m}\mu_k\mu_{ki})=\sum_{i=1}^{m}(\mu_i\sum_{k=1}^{m}\mu_{ik})=1.$$

若令

$$\xi=\sum_{i=1}^{m}\bar{\mu}_i\omega_i+\sum_{j=1}^{n}\bar{\nu}_j d_j,$$

则$\xi \in W$, 这里

$$\bar{\mu}_i=\sum_{k=1}^{m}\mu_k\mu_{ki},$$
$$\bar{\nu}_j=\sum_{i=1}^{m}\mu_i\nu_{ij}+(\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{n}\nu_r)\lambda_j+\nu_j \geqslant 0.$$

这样对$\forall u \in U$, 找到了$s>0$, $\xi \in W$, 使得$s(\xi-x)=Ax+Bu$, 所以$W$为微分包含式(6)的强不变集, 从而为线性控制系统(5)的强不变集.

证毕.

**推论 2** 考虑系统(5), $U \subset \mathbb{R}^q$. 设$W$为一无界多面体, 由式(4)给出. 若$W$的所有极方向$d_j$都为$A$的属于非负特征值的特征向量, 且$W$在极点处满足强不变性条件, 即

$$\bigcup_{u\in U}\{A\omega_i+Bu\} \subset T_{\rm W}(\omega_i),\ i=1,2,\cdots,m,$$

则$W$为线性控制系统(5)的强不变集.

**注 1** 由定理1, 2可知, 在系统矩阵$A$的作用下, 若无界多面体$W$的极方向能变成各极方向的非负线性组合, 则线性系统关于$W$的弱(强)不变性判别问题可以转化为$W$在极点处的弱(强)不变性判别.

**注 2** 定理1和定理2中极点满足的弱(强)不变性条件显然也是无界多面体为弱(强)不变集的必要条件, 但是极方向的条件不是必要的, 这一点在下面的应用实例中也可以看出.

**注 3** 虽然在讨论系统强不变性时对线性系统的容许控制集没有任何限制, 但极点处的条件是很强的, 所以由此限制了很大一部分多面体. 系统强不变性的要求要比弱不变性的要求强的多.

## 5 应用实例(Applied exemples)

### 5.1 例 1(Example 1)

考虑电流控制的磁浮轴承系统的简单线性化模型

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{10}$$

其中:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \omega^2 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ \sigma\end{bmatrix},$$

这里$\sigma, \omega$是由系统的物理参数确定的常量, 系统的输入$u$为电机的控制电流. 如图1, 2分别判别无界多

面体$W_1$和$W_2$是否为系统(10)的不变集.

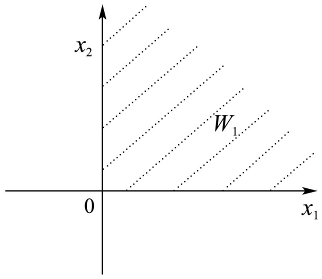


图 1 单极点无界多面体

Fig. 1 Unbounded polyhedron with one extreme point

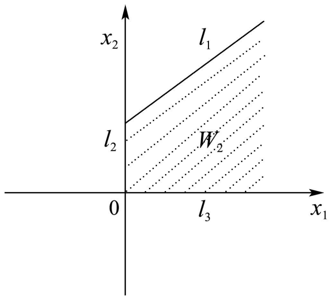


图 2 两极点无界多面体

Fig. 2 Unbounded polyhedron with two extreme points

先考虑$W_1$:

$$W_1=\mathrm{conv}\{d_1,d_2\},\ d_1=(1,0)^{\mathrm{T}},\ d_2=(0,1)^{\mathrm{T}},$$

它的惟一极点为原点$O$. 因为

$$Ad_1=\begin{bmatrix}0\\ \omega^2\end{bmatrix}=\omega^2 d_2,\ Ad_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=d_1,$$

所以极方向条件满足; 由于$u$为电机的控制电流, 所以$u\geqslant 0$, 又因为$T_{W_1}(O)=W_1$, 这样对任意$u$,

$$AO+Bu=\begin{bmatrix}0\\ \sigma u\end{bmatrix}\in W_1,$$

即$W_1$在极点$O$处满足强不变性条件, 由定理2知, $W_1$为系统的强不变集.

再考虑$W_2$:

$$W_2=\mathrm{co}\{\omega_1,\omega_2\}+\mathrm{conv}\{d_1,d_2\},$$

其中: $\omega_1=(0,0)^{\mathrm{T}},\ \omega_2=(0,1)^{\mathrm{T}},\ d_1=(1,1)^{\mathrm{T}},\ d_2=(1,0)^{\mathrm{T}}$. 本文先讨论系统的强不变性. 可以证明当且仅当$\omega=\sigma=0$时, $W_2$满足定理2的条件.

事实上, 为使极方向的条件满足, 令

$$Ad_2=\begin{bmatrix}0\\ \omega^2\end{bmatrix}=\delta_1 d_1+\delta_2 d_2=\begin{bmatrix}\delta_1+\delta_2\\ \delta_1\end{bmatrix},$$

这里$\delta_1,\delta_2\geqslant 0$, 则当且仅当$\omega=0$时成立, 此时$Ad_1=(1,0)^{\mathrm{T}}=d_2$.

$$\forall u\in U, A\omega_1+Bu=\begin{bmatrix}0\\ \sigma u\end{bmatrix}\in W_2, \text{所以在}\omega_1\text{处}$$

满足强不变性条件.

下面考虑极点$\omega_2$. 由$\omega=0$, 得

$$A\omega_2+Bu=\begin{bmatrix}1\\ \sigma u\end{bmatrix},$$

由切锥的计算得$\forall x\in T_{W_2}(\omega_2)$,

$$x=(0,1)^{\mathrm{T}}+\lambda_1(0,-1)^{\mathrm{T}}+\lambda_2(1,1)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\lambda_2\\ 1-\lambda_1+\lambda_2\end{bmatrix},$$

这里$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$.

若极点$\omega_2$满足强不变性条件, 需对任意$u\geqslant 0$, 都要找到$\lambda_1,\lambda_2\geqslant 0$, 使得

$$\begin{bmatrix}1\\ \sigma u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_2\\ 1-\lambda_1+\lambda_2\end{bmatrix} \tag{11}$$

成立, 这只有在$\sigma=0$时满足.

可以证明只要$\sigma=0,\omega^2\leqslant 1$, $W_2$便为系统(10)的强不变集. 事实上, 由以上对极点的讨论, 已经知道$\sigma=0$. 为讨论系统关于$W_2$的强不变集, 如图2所示, 只需考察$W_2$的边界$l_1,l_2,l_3$. 由引理1, 只要对任意$u$和$W_2$的任意边界点$x$, 都存在$s>0,\xi\in W$使得

$$Ax+Bu=s(\xi-x) \tag{12}$$

成立即可. 因为$\omega_1=(0,0)^{\mathrm{T}}$, 不妨设

$$\xi=\lambda_1\omega_2+\lambda_2 d_1+\lambda_3 d_2=\begin{bmatrix}\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2\end{bmatrix},$$

这里$0\leqslant\lambda_1\leqslant 1,\ \lambda_2,\ \lambda_3\geqslant 0$. 考虑到$\sigma=0$, 所以式(12)成为

$$\begin{bmatrix}0&1\\ \omega^2&0\end{bmatrix}x=s(\begin{bmatrix}\lambda_2+\lambda_3\\ \lambda_1+\lambda_2\end{bmatrix}-x), \tag{13}$$

所以只要对边界上的所有点$x$, 都能找到合适的$s$, $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使得式(13)成立即可. 下面分别讨论这3种边界点.

1) 对$\forall x\in l_1, x=(0,1)^{\mathrm{T}}+\lambda(1,1)^{\mathrm{T}},\lambda\geqslant 0$, 这里$x$的任意性由$\lambda$体现. 由式(13)可得

$$\begin{bmatrix}1+\lambda\\ \lambda\omega^2\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}\lambda_2+\lambda_3-\lambda\\ \lambda_1+\lambda_2-1-\lambda\end{bmatrix},$$

即:

$$\lambda_2=1-\lambda_1+\lambda+\frac{\lambda}{s}\omega^2,$$
$$\lambda_3=\frac{s(\lambda_1-1)+\lambda(1-\omega^2)+1}{s}.$$

因为这里$0\leqslant\lambda_1\leqslant 1$, 且要求对任意$\lambda>0,\lambda_2,\lambda_3\geqslant 0$都存在, 这当且仅当$\omega^2\leqslant 1$成立即可. 本文可取$s=1,\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda+\lambda\omega^2,\lambda_3=\lambda(1-\omega^2)+1$.

2) 对$\forall x\in l_2, x=\lambda(0,1)^{\mathrm{T}}, 0\leqslant\lambda\leqslant 1$, 由

式(13)得:

$$\lambda_2 = \lambda - \lambda_1,$$
$$\lambda_3 = (\frac{1}{s} - 1)\lambda + \lambda_1.$$

可取$s = 1,\ \lambda_1 = \lambda,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = \lambda$.

3) 对$\forall x \in l_3, x = \lambda(1,0)^{\mathrm{T}}, \lambda \geqslant 0$,由式(13)得:

$$\lambda_2 = \frac{\omega^2}{s}\lambda - \lambda_1,$$
$$\lambda_3 = (1 - \frac{\omega^2}{s})\lambda + \lambda_1.$$

可取$s = 1,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \omega^2\lambda,\ \lambda_3 = 1 - \omega^2$.

所以当且仅当$\sigma = 0,\ \omega^2 \leqslant 1,\ W_2$为系统(10)的强不变集.

再来考虑系统(10)关于$W_2$的弱不变性. 先看满足定理1条件的情况. 由上述对强不变集条件的讨论, 极方向要求$\omega = 0$, 并注意弱不变性只要求存在某个$u$使式(11)成立即可, 如当$\sigma \neq 0$时, 可取$u = \dfrac{1}{\sigma}$, 则$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; 若$\sigma = 0$, 则任意$u$均可. 所以若$\omega = 0$, 可由定理1知, $W_2$为系统(10)的弱不变集. 但可以证明只要$\omega^2 \leqslant 1, W_2$便为系统(10)的弱不变集, 下面来详细说明.

同样只需考察边界$l_1, l_2, l_3$. 由引理1, 只要找到$s > 0, \xi \in W_2, u \geqslant 0$使得$Ax + Bu = s(\xi - x)$成立即可. 设

$$\xi = \lambda_1\omega_2 + \lambda_2 d_2 + \lambda_3 d_3 = \begin{bmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix},$$

这里$0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0$. 这样只要找到$u \geqslant 0$, $s > 0, 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant 1, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0$, 对$W_2$的任意边界点$x$, 下式成立即可:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma u \end{bmatrix} = s(\begin{bmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 \end{bmatrix} - x). \quad (14)$$

要分3种情况讨论, 因为与讨论强不变集的方法类似, 本文仅就$x \in l_1$的情况进行说明.

对$\forall x \in l_1,\ x = (0,1)^{\mathrm{T}} + \lambda(1,1)^{\mathrm{T}},\ \lambda \geqslant 0$. 由式(14)可得

$$\begin{bmatrix} 1 + \lambda \\ \lambda\omega^2 + \sigma u \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 1 - \lambda \end{bmatrix},$$

取$s = 1, \lambda_1 = 1$得:

$$\lambda_2 = (\omega^2 + 1)\lambda + \sigma u,$$
$$\lambda_3 = (1 - \omega^2)\lambda + (1 - \sigma u).$$

因为要求对任意$\lambda > 0, \lambda_2, \lambda_3 \geqslant 0$都存在, 且$u \geqslant 0$, 所以需有$\omega^2 \leqslant 1$成立. 当$\sigma \neq 0$时, 可取$u = \dfrac{1}{\sigma}$, 则

$$\lambda_2 = \left(\omega^2 + 1\right)\lambda + 1, \lambda_3 = \lambda(1 - \omega^2),$$

若$\sigma = 0$, 则任意$u$ 均可.

综上所述, 当$\omega^2 \leqslant 1$时, $W_2$为系统(10)的弱不变集, 而若同时$\sigma = 0$满足, 则$W_2$还为系统(10)的强不变集.

从例1的分析可以看出, 定理1, 2的判别方法是较简便的, 但是无界多面体的极方向条件不是它为系统的弱(强)不变集的必要条件.

### 5.2 例 2(Example 2)

考虑如下单输入系统

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (15)$$

其中: $u \in \mathbb{R},\ A = \begin{bmatrix} a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \\ a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \\ a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \end{bmatrix},\ B = [b_1\, b_2\, b_3]^{\mathrm{T}}$为非负矩阵, 即$a_{ij} \geqslant 0, b_i \geqslant 0 (i, j = 1, 2, 3)$. 如图3, $W$为$\mathbb{R}^3$空间上的立方体, 极方向为:

$$d_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}},\ d_2 = (0,1,0)^{\mathrm{T}},\ d_3 = (0,0,1)^{\mathrm{T}}.$$

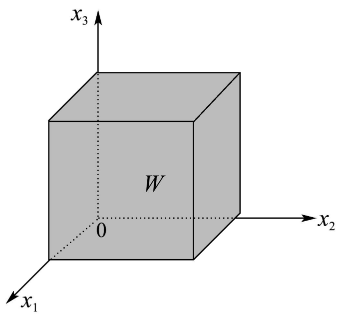


图 3 立方体情况

Fig. 3 The cubic case

因为$Ad_i = a_{1i}d_1 + a_{2i}d_2 + a_{3i}d_3 (i = 1, 2, 3)$, 而且多面体的惟一极点原点满足弱不变性条件, 所以由定理1知, $W$为系统(15)的弱不变集. 事实上, 只要$u \in [0, +\infty)$, 则对任意$x \in W$都有$Ax + Bu \in T_{\mathrm{W}}(x)$. 但是当$u \in (-\infty, 0)$ 时, $Ax + Bu \notin T_{\mathrm{W}}(x)$, 所以$W$不是系统(15)的强不变集.

该实例表明: 立方体区域是任意具有非负矩阵对$(A, B)$的单输入线性系统的弱不变集, 这个结论也可以推广到$W \subset \mathbb{R}^n$的情况.

## 6 结论(Conclusion)

本文讨论了线性控制系统的无界多面体不变集的判别问题. 当无界多面体的极方向在线性系统矩阵作用下能变成各极方向的非负线性组合时, 本文将容许控制集为凸集的线性控制系统关于该多面体的弱不变性判别问题转化为判别多面体在极点处是否满足弱不变性条件. 同时得到极方向满足同样条件的无界多面体为线性控制系统的强不变集的判别方法, 即只需检验该多面体在极点处是否满足强不变性条件. 该判别方法操作简单, 给出的两个实例也验证了这一方法的可行性.

## 参考文献(References):


[1] DÓREA C E T, HENNET C. (A, B)-invariant polyhedral sets of linear discrete-time[J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1999, 103(3): 521 – 542.

[2] GAO Y, LYGEROS J, QUINCAMPOIX M, et al. On the control of uncertain impulsive systems: approximate stabilization and controlled invariance[J]. *International Journal of Control*, 2004, 77(16): 1393 – 1407.

[3] SEUBE N, MOITIE R, LEITMANN G. Aircraft take-off in windshear: a viability approach[J]. *Set-Valued Analysis*, 2000, 8(1/2): 163 – 180.

[4] QUINCAMPOIX M, SEUBE N. Stabilization of uncertain control systems through piecewise constant feedback[J]. *Mathematics Analysis and Applications*, 1998, 218(1): 240 – 255.

[5] LABINAZ G, GUAY M. Robust viability of hybrid systems[J]. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2008, 2(1): 184 – 195.

[6] GAO Y, LYGEROS J, QUINCAMPOIX M. On the reachability problem for uncertain hybrid systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1572 – 1586.

[7] CARDALIAGUET P, QUINCAMPOIX M, SAINT PIERRE P. Pursuit differential games with state constraints[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, 39(5): 1615 – 1632.

[8] MILANI B E A, DOREA C E T. On invariant polyhedron of continuous-time linear systems subject to additive disturbances[J]. *Automatica*, 1996, 32(5): 785 – 789.

[9] BLANCHINI F. Set invariance in control[J]. *Automatica*, 1999, 35(11): 1747 – 1767.

[10] ALESSIO A, LAZAR M, BEMPORAD A, et al. Squaring the circle: an algorithm for generating polyhedral invariant sets from ellipsoidal ones[J]. *Automatica*, 2007, 43(12): 2096 – 2103.

[11] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.

[12] HU T, LIN Z. Composite quadratic Lyapunov functions for constrained control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 440 – 450.

[13] CASTELAN E B, HENNET J C. On invariant polyhedral of continuous-time linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1993, 38(11): 1680 – 1685.

[14] 高岩. 线性控制系统生存域[J]. 控制与决策, 2007, 21(7): 833 – 835.
(GAO Yan. On viable set for a linear control system[J]. *Control and Decision*, 2007, 21(7): 833 – 835.)

[15] 高岩. 非光滑分析[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[16] AUBIN J P. *Viability Theory*[M]. Cambridge: Birkhäuser Boston, 1992.

[17] CLARKE F H, LEDA YU S, R J STERN, et al. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.

[18] ROCKAFELLAR R T. *Convex Analysis*[M]. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1970.


## 作者简介:


**张 霞** (1978—), 女, 博士研究生, 讲师, 目前研究方向为非线性控制、混杂系统, E-mail: sdzhx2002@163.com;

**高 岩** (1962—), 男, 博士生导师, 教授, 目前研究方向为最优化、非线性控制、混杂系统, E-mail: gaoyan1962@263.net;

**夏尊铨** (1937—), 男, 博士生导师, 教授, 目前研究方向为优化理论、算法及应用, E-mail: zqxiazhh@dlut.edu.cn.