第 27 卷第 7 期
2010 年 7 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 7
Jul. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)07−0861−06

带技术投资的保险公司最优策略

陈树敏[1], 李仲飞[2]

(1. 中山大学 数学与计算科学学院, 广东 广州 510275; 2. 中山大学 岭南学院, 金融工程与风险管理研究中心, 广东 广州 510275)

摘要: 本文站在保险公司的角度, 假定1) 保险公司采用连续比例再保险的方式将自身的部分风险转移到再保险公司, 2) 保险公司可以选择在某一时刻进行项目投资, 该投资不直接产生收益, 但可以降低公司所面临的风险. 本文的目标是通过选择最佳投资时刻和最优再保险比例来最小化破产概率. 运用混合随机决策–最优停时方法, 本文求解出破产概率和最优再保险策略的显式表达式以及最佳投资时刻的半显式解. 作为本文结果的一个应用, 本文以数值模拟的方式揭示了投资效果, 投资金额和最佳投资时刻3者之间的关系: 1) 投资总是可以降低破产概率; 2) 投资效果越明显, 投资所需金额越小, 则应该选择尽早投资; 反之则应该推迟投资时间, 等积累到足够的资金再进行投资.

关键词: 破产概率; 混合随机决策–最优停时问题; 比例再保险; 变分不等式

中图分类号: O221.3　　**文献标识码**: A

The optimal policy for insurance company with technology investment

CHEN Shu-min[1], LI Zhong-fei[2]

(1. School of Mathematics and Computational Science , Sun Yat-Sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China;
2. Lingnan College, Sun Yat-Sen University, Research Center for Financial Engineering and Risk Management,
Sun Yat-Sen University, Guangzhou Guangdong 510275, China)

Abstract: From the view point of an insurer, one assumes that 1) the insurance company's risk is reduced through proportional reinsurance; 2) the company may invest a fixed amount of money in new technology to reduce its risk as return. The object of this work is to minimize the ruin probability for the company and to seek the corresponding optimal strategy. Using the methodology of mixed stochastic control/optimal stopping, we find the quasi-explicit expression for the minimal ruin probability as well as the optimal investing time-reinsurance policy. Some numerical results are given to illustrate the inter relationship among the investment effect, investing amount and optimal investing time. The numerical results show that: 1) Investment is effective in reducing minimal ruin probability; 2) Less investing amount and better investing effect imply earlier investing time. Otherwise, it is optimal to postpone the investment until the surplus is sufficient.

Key words: ruin probability; mixed stochastic control/optimal stopping problem; proportional reinsurance; variational inequalities

1 引言(Introduction)

站在保险公司管理人的角度, 如何降低公司的风险无疑是最重要的问题之一. 作为保险公司风险控制的一个重要指标, 破产概率一直受到众多学者的广泛关注[1~6]. 在这一系列的工作中, 采用两种方式来控制风险: 一是购买再保险, 二是投资于风险资产与无风险资产来获取更高收益, 充实保险公司资金. 但是在实际中保险公司还可以通过实物投资、科技投资、管理方式投资等诸多方式来提高盈利, 降低风险(见文献[7,8]). 文献[7]假定公司可以投资于新技术来提高公司收益率, 目标是最大化公司破产之前的贴现分红. 通过混合奇异控制–最优停时方法, 求解出了最佳投资时刻和最佳分红策略的显式表达式. 文献[8]则在效用最大化框架下考虑了实物投资的可能性, 并假定该投资可以实现随机收益. 通过求解最佳投资时刻, 实现了无穷期效用最大化.

在以上工作的基础之上, 本文考虑了保险公司的最小破产概率问题. 假定保险公司的盈余过程由扩散过程描述, 保险公司通过比例再保险来控制自身的收益和风险, 并可选择在破产前任意时刻进行项目投资来降低自身的风险.

本文通过选择最佳的投资时刻和再保险比例来最小化破产概率. 这一问题在数学上是混合随机决策–最优停时问题. 通过求解混合HJB–变分不等方

收稿日期: 2009−04−25; 收修改稿日期: 2009−09−03.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70518001); 国家杰出青年科学基金资助项目(70825002).

程, 本文得到了最小破产概率以及相应的最佳决策. 本文的结果表明: 1) 最优再保险比例是一确定常数; 2) 进行投资总是比不进行投资好; 3) 最佳投资时刻依赖于保险公司的初始盈余资金大小, 投资效果, 投资金额等. 若保险公司的盈余资金大于某一确定数值$x_{\rm c}(x'_{\rm c})$(由下文给出), 则保险公司从一开始就进行投资; 若保险公司的盈余资金不足, 则暂时不进行投资, 等积累到资金充足再进行投资.

2 模型描述(The model)

从经典风险模型Cramér-Lunderberg[9]

$$X_t = x + pt - \sum_{i=1}^{N_t} U_i \tag{1}$$

出发. 其中: X_t代表了保险公司t时刻的盈余资金, x是初始盈余资金, p是收益率, N_t是泊松过程, 用于记录t时刻之前的索赔次数, U_i是独立同分布随机变量, 代表了第i次索赔金额. 记$EN_t = \beta t$, $EU_i = m$, $EU_i^2 = s^2$.

假定保险公司可以选择在某一时刻τ_I投资一固定金额I, 帮助投保人(单位)降低发生意外事故的可能性(β变小)、减少意外事故所造成的损失(m, s变小)[1]. 则投资后风险过程满足

$$X_t = x + pt - \sum_{i=1}^{N'_t} U'_i. \tag{2}$$

其中: N'_t, U'_i分别记投资后的索赔次数以及索赔金额, 满足$EN'_t = \beta' t < \beta t$, $EU'_i = m' < m$, $EU_i^2 = s'^2 < s^2$.

假定考虑的保险公司具有较大的规模, 式(1)和(2)可以分别由

$$X_t = x + \eta_1 t + \sigma_1 w_t \text{和} X_t = x + \eta_2 t + \sigma_2 w_t \tag{3}$$

来近似得到(参见文献[4]). 其中:

$$\eta_1 = p - \beta m,\ \eta_2 = p - \beta' m',$$
$$\sigma_1 = \sqrt{s^2 + m^2},\ \sigma_2 = \sqrt{s^2 + m^2},$$

w_t是标准布朗运动. 显然$\eta_2 > \eta_1$, $\sigma_2 < \sigma_1$. 即是说, 通过投资公司提高了收益率并同时降低了风险. 本文着重考虑如何降低保险公司风险, 为了简化讨论, 假定投资前后收益率不变, 仅是扩散系数发生变化, 扩散系数与漂移项同时减少的情形另文讨论.

另外, 假定保险公司可以通过连续购买比例再保险来控制自身的业务风险, 再保险价格为$\theta > \eta$. 记$1 - a_t \in [0, 1]$为t 时刻再保险比例, 称a_t为t 时刻的存留比例. 购买比例再保险之后保险公司收益率为$\eta - (1 - a_t)\theta$, 同时保险公司的风险变为$a_t\sigma_1$(未进行技术投资之前)或$a_t\sigma_2$(技术投资之后). 因此任意时刻t保险公司盈余过程满足

$$\begin{aligned}{\rm d}X_t = {} & [a_t\theta - (\theta - \eta)]{\rm d}t + \\ & a_t(\sigma_1 \mathbb{1}_{t<\tau_I} + \sigma_2 \mathbb{1}_{t\geqslant\tau_I}){\rm d}w_t - {\rm d}I_t,\end{aligned} \tag{4}$$

其中$I_t = I\mathbb{1}_{t\geqslant\tau_I}$称为技术投资过程. 注意到在$\tau_I$时刻, 盈余资金满足$X_{\tau_I} = X_{\tau_I -} - I$. 记$\pi = (\{a_t\}_{t\geqslant 0}, \tau_I)$为决策过程. 给定一决策过程$\pi$, 记

$$\tau_0^\pi = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \leqslant 0\}$$

为该决策下保险公司的破产时刻.

为了对模型进行严格的数学描述, 定义完备概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$. 其中$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$是由$W = \{w_t\}_{t\geqslant 0}$生成的虑子族, 用于表示$t$时刻的所有信息.

定义 1 若$\pi = (\{a_t^\pi\}_{t\geqslant 0}, \tau_I^\pi)$满足:

i) $a_t^\pi \in [0, 1]$是右连左极$\mathcal{F}_t$-适应过程,

ii) τ_I^π是$\mathcal{F}$停时, $\tau_I^\pi \leqslant \tau_0^\pi$ a.s.,

称π为可行决策.

记Π为所有可行决策集合. 给定任一可行策略$\pi \in \Pi$, 记保险公司破产概率为

$$J(x; \pi) = {\rm P}(\tau_0^\pi < \infty \mid X_{0-} = x). \tag{5}$$

站在公司管理人的角度, 笔者的目标是最小化破产概率

$$V(x) = \inf_{\pi\in\Pi} J(x; \pi), \tag{6}$$

并寻求相应的最佳决策$\pi^* = (\{a_t^*\}_{t\geqslant 0}, \tau_I^*)$, 满足

$$J(x; \pi^*) = V(x). \tag{7}$$

3 两种特殊情形(Two special cases)

先考虑保险公司的两种特殊选择: 永远不进行技术投资或一开始就进行技术投资. 记两种决策相应的盈余过程为$X_i, i = 1, 2$, 则有

$${\rm d}X_{i,t} = (a_{i,t}\theta - (\theta - \eta)){\rm d}t + a_{i,t}\sigma_i {\rm d}w_t, \tag{8}$$

$$X_{1,0} = x,\ X_{2,0} = x - I. \tag{9}$$

记两种不同决策所对应的最小破产概率为

$$V_1(x) = \inf_{a_1\in[0,1]} {\rm P}(\tau_{1,0} < \infty \mid X_{1,0} = x), \tag{10}$$

和

$$V_2(x) = \begin{cases} \inf\limits_{a_2\in[0,1]} {\rm P}(\tau_{2,0} < \infty \mid X_{2,0} = x - I),\ x \geqslant I, \\ 1, \qquad 0 \leqslant x < I. \end{cases} \tag{11}$$

[1]例如, 保险公司可以帮助投保人检查安全隐患, 向投保人提供简易灭火器来减少火灾发生的可能性.

其中$\tau_{i,0}, i=1,2$是对应于决策$a_{i,t}$的破产时刻, 即

$$\tau_{i,0}=\inf\{t\geqslant 0, X_{i,t}\leqslant 0\}. \tag{12}$$

显然, 问题(10)(11)满足边界条件

$$V_1(0)=1,\ V_2(I)=1,\ V_i(\infty)=0. \tag{13}$$

类似于文献[10], 本文采用随机动态规划方法求解式(10)(11).

引理 1 若$V_i\in C^2(0,+\infty)$是递减凸函数, 则V_i满足Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)方程

$$\inf_{a_i\in[0,1]}\mathcal{L}^{a_i}V_i=0. \tag{14}$$

其中

$$\mathcal{L}^{a_i}=(\theta a_i-(\theta-\eta))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+\frac{\sigma_i^2a_i^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \tag{15}$$

是$X_i, i=1,2$的无穷小生成子.

引理 2 若HJB方程(14)的解g_i是2阶连续可微递减凸函数, 且满足边界条件(13), 则$g_i=V_i$, 且

$$a_i^*(x)=\arg\inf_{a_i\in[0,1]}\{\mathcal{L}^{a_i}V_i\},\ i=1,2 \tag{16}$$

是所求最佳决策.

注 1 引理1、引理2的推导过程是平凡的, 感兴趣的读者可参考文献[11].

以下求解HJB方程(14). 已知$V_i''(x)>0, \forall x\geqslant 0$, 由1阶条件, 方程(14)左边的极值点为

$$a_i=-\frac{\theta V_i'(x)}{\sigma_i^2V_i''(x)}. \tag{17}$$

若$a_i\leqslant 1$, 则a_i是最优再保险策略, 即$a_i^*=a_i$.

将式(17)代入式(14)可得

$$-\frac{\theta^2}{2\sigma_i^2}\frac{[V_i'(x)]^2}{V_i''(x)}-(\theta-\eta)V_i'(x)=0. \tag{18}$$

由边界条件(13)可得方程(18)的解:

$$V_1(x)=\mathrm{e}^{-\kappa_1x},\ V_2(x)=\mathrm{e}^{-\kappa_2(x-I)}. \tag{19}$$

其中:

$$\kappa_i=\frac{\theta^2}{2\sigma_i^2(\theta-\eta)},\ i=1,2. \tag{20}$$

将式(19)代入式(17), 得

$$a_i^*=a_i=2(1-\frac{\eta}{\theta}). \tag{21}$$

由$a_i\leqslant 1$, 有$\eta\geqslant\dfrac{\theta}{2}$.

若$\eta<\dfrac{\theta}{2}$, 则$a_i>1$, 由$V_i''(x)>0$, 有$a_i^*\equiv 1$. 将$a^*=1$代入式(14)可得

$$\eta V_i'(x)+\frac{\sigma^2}{2}V_i''(x)=0. \tag{22}$$

由边界条件(13)可得方程(22)的解

$$V_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x},\ V_2(x)=\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x-I)}. \tag{23}$$

因此, 有

引理 3 i) 若$\eta\geqslant\dfrac{\theta}{2}$, 则最小破产概率为

$$V_1(x)=\mathrm{e}^{-\kappa_1x}, \tag{24}$$

$$V_2(x)=\mathrm{e}^{-\kappa_2(x-I)}. \tag{25}$$

相应的最优再保险策略为

$$a_i^*=2(1-\frac{\eta}{\theta}),\ i=1,2. \tag{26}$$

ii) 若$\eta<\dfrac{\theta}{2}$, 则最小破产概率为

$$V_1(x)=\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x}, \tag{27}$$

$$V_2(x)=\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x-I)}. \tag{28}$$

相应的最优再保险策略为$a_i^*\equiv 1$.

证 由以上求解的过程易知$V_i, i=1,2$是方程(14)的解并满足边界条件(13). 解是递减, 凸且二阶连续可微. 根据引理2可知$V_i, i=1,2$ 即为所求的最小破产概率, 相应地a_i^*是最佳决策. 证毕.

4 主要结论(Main results)

以下求解式(6). 首先, 有

引理 4 最小破产概率(6)是混合随机决策–最优停时问题

$$V(x)=\inf_{\pi\in\varPi}\mathrm{E}^x[V_2(X_{\tau_I^\pi-})] \tag{29}$$

的解.

证 对任意$\pi\in\varPi$, 由强Markov性可得

$$\begin{aligned}&V(x;\pi)=\mathrm{P}(\tau_0^\pi<\infty\mid X_{0-}=x)\geqslant\\&\mathrm{E}^x[\inf_{a\in[0,1]}\mathrm{P}(\tau_0^\pi<\infty\mid X_{\tau_I^\pi-})]=\mathrm{E}^x[V_2(X_{\tau_I^\pi-})].\end{aligned} \tag{30}$$

由π的任意性可得

$$V(x)\geqslant\inf_{\pi\in\varPi}\mathrm{E}^x\left[V_2(X_{\tau_I^\pi-})\right]. \tag{31}$$

反之, 考虑可行决策

$$\pi^1=(a\mathbb{1}_{t<\tau^{\pi^1}}+a_2^*\mathbb{1}_{t\geqslant\tau_I^{\pi^1}},\tau_I^{\pi^1}),$$

其中a_2^*由引理3给出, $a, \tau_I^{\pi^1}$任意. 则有

$$\begin{aligned}V(x)\leqslant V(x;\pi^1)=\mathrm{E}^x[\mathrm{P}(\tau_0^{\pi^1}<\infty\mid X_{\tau_I^{\pi^1}-})]=\\\mathrm{E}^x[V_2(X_{\tau_I^{\pi^1}-})].\end{aligned} \tag{32}$$

最后一个等式中, 应用了a_2^*是对应于V_2的最佳决策这一条件. 由$\tau_I^{\pi^1}$及a的任意性可得

$$V(x) \leqslant \inf_{\pi\in\Pi} \mathrm{E}^x\left[V_2\left(X_{\tau_I^\pi -}\right)\right]. \tag{33}$$

由式(31)(33)可知式(29)成立. 证毕.

为求解式(29), 有

定理 1 (验证性定理) a) 设函数$f:(0,\infty)\mapsto[0,1]$满足

i) $f\in C^1(0,\infty)$;

ii) $f(x)\leqslant V_2(x),\ x\in(I,\infty)$;

iii) 定义连续区域

$$D=\{x\in(0,\infty): f(x)<V_2(x)\},$$

使得$f\in C^2(D)$, 且所有$x\in(0,\infty)\setminus\partial D$满足

$$\mathcal{L}_0^a f(x)\geqslant 0.$$

iv) 在集合$\{\tau_D<\infty\}$上, $\lim\limits_{t\mapsto\tau_D-} f(X_t)=V_2(X_{\tau_D-})$.

则

$$f(x)\leqslant V(x),\ \forall x\in(0,\infty).$$

b) 再假设存在$a_D^*\in[0,1]$满足

$$\mathcal{L}^{a_D^*}f(x)=0,\ 所有x\in D,$$

则

$$f(x)=V(x),\ x\in(0,\infty),$$

且有最优决策$\pi^*=(a_D^*\mathbb{1}_{t<\tau_D}+a_2^*\mathbb{1}_{t\geqslant\tau_D},\tau_D)$. 其中$a_2^*$由引理3给出,

$$\tau_D=\begin{cases}\inf\{t\geqslant 0: X_t^{\pi^*}\notin D\}, & 若\ x\in D,\\ 0, & 若\ x\notin D.\end{cases}$$

证 a) 对于可行策略$\pi=(a,\tau_D)$, 由Dynkin公式有

$$\mathrm{E}^x[f(X^\pi_{\tau_D\wedge T-})]= f(x)+\mathrm{E}^x[\int_0^{\tau_D\wedge T-}\mathcal{L}_1^a f(X_t^\pi)\mathrm{d}t].$$

由ii)iii),

$$\begin{aligned}&f(x)=\\&\lim_{T\to\infty}\mathrm{E}^x[-\int_0^{(\tau_D-)\wedge T}\mathcal{L}_0^a f(X_t^\pi)\mathrm{d}t+f(X^\pi_{(\tau_D-)\wedge T})]\leqslant\\&\mathrm{E}^x[-\int_0^{\tau_D-}\mathcal{L}^a f(X_t^\pi)\mathrm{d}t+V_2(X^\pi_{\tau_D-})]\leqslant\\&\mathrm{E}^x[V_2(X^\pi_{\tau_D-})].\end{aligned}$$

由π的任意性可得

$$f(x)\leqslant V(x),\ \forall x\in(0,\infty). \tag{34}$$

b) 若$x\in D$, 采用决策$\pi^*=(a_D^*\mathbb{1}_{t<\tau_D}+a_2^*\mathbb{1}_{t\geqslant\tau_D},\tau_D)$, 由引理4及条件iv)b)可得

$$\begin{aligned}&V(x)\leqslant \mathrm{E}^x\left[V_2(X^{\pi^*}_{\tau_D-})\right]=\mathrm{E}^x\left[f(X^{\pi^*}_{\tau_D-})\right]=\\&f(x)+\mathrm{E}^x[\int_0^{\tau_D-}\mathcal{L}_1^{a_D^*}f(X_t^{\pi^*})\mathrm{d}t]=f(x).\end{aligned} \tag{35}$$

由式(34)(35)可得$f(x)=V(x)$.

若$x\notin D$, 由ii)iii)可知$f(x)=V_2(x-I)$. 即$\tau_D=0$. 证毕.

注 2 定理1等价于混合HJB–变分不等方程

$$\min\Big(\inf_a \mathcal{L}_1^a V(x), V(x)-V_2(x)\Big)=0. \tag{36}$$

若$x\in D$,

$$\inf_a \mathcal{L}_1^a V(x)=0;$$

若$x\notin D$,

$$V(x)=V_2(x).$$

猜测[2]

$$D=(0,x_{\mathrm{c}}), \tag{37}$$

其中x_{c}是待定自由边界. 结合初值条件$V(0)=1$, 方程(36)等价于自由边界问题

$$\inf_a \mathcal{L}^a V(x)=0,\ x\in(0,x_{\mathrm{c}}), \tag{38a}$$

$$V(0)=1, \tag{38b}$$

$$V(x_{\mathrm{c}})=V_2(x_{\mathrm{c}}). \tag{38c}$$

若$\eta\geqslant\dfrac{\theta}{2}$, 类似于求解问题(10), 结合初值条件(38b), 方程(38a)有通解

$$g(x)=1+c_1(\mathrm{e}^{-\kappa_1 x}-1). \tag{39}$$

由V在x_{c}连续可微, 有

$$g(x_{\mathrm{c}})=V_2(x_{\mathrm{c}}), \tag{40a}$$

$$g'(x_{\mathrm{c}})=V_2'(x_{\mathrm{c}}), \tag{40b}$$

即

$$1+c_1(\mathrm{e}^{-\kappa_1 x_{\mathrm{c}}}-1)=\mathrm{e}^{-\kappa_2(x_{\mathrm{c}}-I)}, \tag{41a}$$

$$\kappa_1 c_1\mathrm{e}^{-\kappa_1 x_{\mathrm{c}}}=\kappa_2\mathrm{e}^{-\kappa_2(x_{\mathrm{c}}-I)}. \tag{41b}$$

由式(41b),

$$\begin{aligned}&c_1=\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\mathrm{e}^{\kappa_1 x_{\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\kappa_2(x_{\mathrm{c}}-I)}=\\&\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\mathrm{e}^{\kappa_1 x_{\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\kappa_2(x_{\mathrm{c}}-I)}=\nu\mathrm{e}^{\kappa_1 x_{\mathrm{c}}}\mathrm{e}^{-\kappa_2(x_{\mathrm{c}}-I)},\end{aligned} \tag{42}$$

其中

$$\nu=\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}. \tag{43}$$

[2]在这里, 通过猜测的方法来构造式(36)的解, 最后再验证所构造出来的解满足定理4.1的条件, 从而该解即为所求最小破产概率式(6), 相应的策略即为所求最佳决策.

将式(42)代入式(41a)可得

$$\mathrm{e}^{\kappa_2(x_\mathrm{c}-I)}-\nu\mathrm{e}^{\kappa_1 x_\mathrm{c}}=1-\nu. \tag{44}$$

定义函数

$$F_1(x)=\mathrm{e}^{\kappa_2(x-I)}-\nu\mathrm{e}^{\kappa_1 x}, \tag{45}$$

则

$$F_1(I)=1-\nu\mathrm{e}^{\kappa_1 I}<1-\nu.$$

注意到$\kappa_2>\kappa_1$,

$$\lim_{x\to\infty}F_1(x)=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\kappa_1 x}[\mathrm{e}^{(\kappa_2-\kappa_1)x-\kappa_2 I}-\nu]=+\infty.$$

因此方程$F(x)=1-\nu$在(I,∞)上有解, 确定

$$x_\mathrm{c}=\inf\{x>I:F_1(x)=1-\nu\},$$

则在(I,x_c)上$F_1(x)<1-\nu$, 由式(41a)及$V_2(x)=1,\ x\in(0,I)$可知

$$g(x)<V_2(x),\ \forall x\in(0,x_\mathrm{c}). \tag{46}$$

将x_c的值代入式(42)可得c_1.

若$\eta<\dfrac{\theta}{2}$, 类似的方程(38a)有通解

$$f(x)=c_2\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x}+1-c_2. \tag{47}$$

为了区别于前一部分, 记边界点为x'_c. 由V在x'_c处连续可微,

$$f(x'_\mathrm{c})=V_2(x'_\mathrm{c}), \tag{48a}$$

$$f'(x'_\mathrm{c})=V_2(x'_\mathrm{c}), \tag{48b}$$

即

$$c_2\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x'_\mathrm{c}}+1-c_2=\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x'_\mathrm{c}-I)}, \tag{49}$$

$$-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}c_2\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x'_\mathrm{c}}=-\frac{2\eta}{\sigma_2^2}\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x'_\mathrm{c}-I)}. \tag{50}$$

由式(50)可得

$$c_2=\nu\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x'_\mathrm{c}}\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x'_\mathrm{c}-I)}. \tag{51}$$

将式(51)代入式(49)化简可得

$$\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x'_\mathrm{c}-I)}-\nu\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x'_\mathrm{c}}=1-\nu. \tag{52}$$

定义函数

$$F_2(x)=\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x-I)}-\nu\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x}.$$

易知

$$F_2(I)=1-\nu\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_1^2}I}<1-\nu,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}F_2(x)=\\ \lim_{x\to\infty}[\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x-I)-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x}-\nu]\mathrm{e}^{\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x}=+\infty.$$

因此, 方程$F(x)=1-\nu$在(I,∞)上有解. 令

$$x'_\mathrm{c}=\inf\{x>I:F(x)=1-\nu\}.$$

将x'_c的值代入式(51)可求得c_2.

最后, 有如下结论:

定理 2 i) 若$\eta>\dfrac{\theta}{2}$, 最小破产概率为

$$V(x)=\begin{cases}1+c_1(\mathrm{e}^{-\kappa_1 x}-1), & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant x_\mathrm{c},\\ \mathrm{e}^{-\kappa_2(x-I)}, & \text{若} x>x_\mathrm{c}.\end{cases} \tag{53}$$

相应的最优再保险策略为

$$a^*=\frac{2}{\theta}(\theta-\eta). \tag{54}$$

最优投资时间为

$$\tau^*=\begin{cases}\inf\{t\geqslant 0:X_t^{\pi^*}=x_\mathrm{c}\}, & \text{若 } x\in[0,x_\mathrm{c}],\\ 0, & \text{若 } x>x_\mathrm{c},\end{cases} \tag{55}$$

其中x_c是方程(44)的根, c_1由式(42)给出.

ii) 若$\eta\leqslant\dfrac{\theta}{2}$, 最小破产概率为

$$V(x)=\begin{cases}c_2\mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_1^2}x}+1-c_2, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant x'_\mathrm{c};\\ \mathrm{e}^{-\frac{2\eta}{\sigma_2^2}(x-I)}, & \text{若 } x>x'_\mathrm{c}.\end{cases} \tag{56}$$

相应的最优再保险策略为

$$a^*\equiv 1. \tag{57}$$

最优投资时间为

$$\tau^*=\begin{cases}\inf\{t\geqslant 0:X_t^{\pi^*}=x'_\mathrm{c}\}, & \text{若 } 0\leqslant x\leqslant x'_\mathrm{c},\\ 0, & \text{若 } x>x'_\mathrm{c},\end{cases} \tag{58}$$

其中x'_c是方程(52)的根, c_2由式(51)给出.

证 只证明$\eta\geqslant\dfrac{\theta}{2}$的情形, $\eta<\dfrac{\theta}{2}$的情形同理可证.

由解的构造过程, 只需验证iii), 即

$$V(x)<V_2(x),\quad 0\leqslant x<x_\mathrm{c}, \tag{59a}$$

$$\mathcal{L}_1^a V\geqslant 0,\quad x\geqslant x_\mathrm{c}. \tag{59b}$$

已知在$[0,x_\mathrm{c})$上$V(x)=g(x)$, 由式(46)可知式(59a)成立. 而在$[x_\mathrm{c},\infty)$上$V(x)=V_2(x)$. 由引理1, 2可知

$$\mathcal{L}_1^a V=\mathcal{L}_1^a V_2\geqslant\mathcal{L}_1^{a_2^*}V_2=0,\ x\geqslant x_\mathrm{c}.$$

即式(59b)成立.

5 数值例子及结论(Numerical examples and conclusions)

以下通过两个数值例子来说明本文求解的结果. 本节只考虑$\eta>\dfrac{\theta}{2}$的情形, $\eta\leqslant\dfrac{\theta}{2}$时有类似的结果.

5.1 例 1(Example 1)

假定以下参数: $\eta = 1.2,\ \theta = 2,\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 0.8;\ I = 0.2$. 其中$V(x)$是最小破产概率式(6). 由图1可以看到, 存在技术投资机会时保险公司的最小破产概率V小于不存在投资机会时的最小破产概率V_1. 而是否从一开始就进行投资则取决于初始盈余资金. 若初始盈余资金少于阀值$x_\text{c}(x'_\text{c})$, 则当资金达到这一点时就就行投资, 若初始资金超过$x_\text{c}(x'_\text{c})$就立刻则从一开始就就行投资.

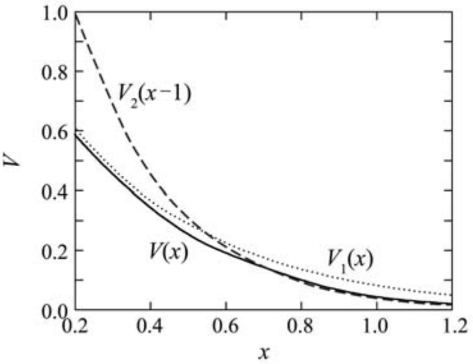

图 1 保险公司破产概率随财富的变化

Fig. 1 The dependence of minimal ruin probability on surplus for an insurance company.

5.2 例 2(Example 2)

考虑投资金额, 投资效果与最佳投资点的关系(如图2所示). 假定参数: $\eta = 1.2,\ \theta = 2,\ \sigma_1 = 1.2;\ \sigma_2 = 1.1, 1.0, 0.9$.

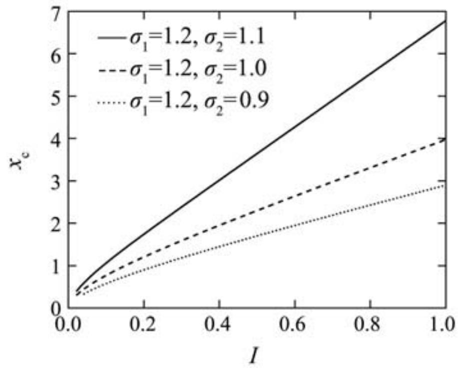

图 2 不同投资效果时投资阈值随投资金额的变化

Fig. 2 The dependence of investing threshold on investing cost under different investing effect

从图2有如下结论:

1) 投资效果相同时, 投资所需金额越大, 投资阈值越大.

2) 给定一投资金额, 如果投资效果明显(扩散系数降低幅度越大)则应该早些进行投资; 反之, 如果投资效果不明显(扩散系数变化较小)则应该等资金较为充足再进行投资.

参考文献(References):

[1] BROWNE S. Optimal investment policies for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1995, 20(4): 937 – 958.

[2] SCHMIDLI H. On optimal investment and subexponential claims[J]. *Insurance:Mathematics & Economics*, 2005, 36(1): 25 – 35.

[3] LIU C S, YANG H. Optimal investment for an insurer to minimize its probability of ruin[J]. *North American Actuarial Journal*, 2004, 8(2): 11 – 31.

[4] TAKSAR M, MARKUSSEN C. Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios[J]. *Finance and Stochastics*, 2003, 7(1): 97 – 121.

[5] HOJGAARD B, TAKSAR M. Optimal propotional reinsurance policies for diffusion models with transaction costs[J]. *Insurance: Mathematics & Economics*, 1998, 22(1): 41 – 51.

[6] LUO S, TAKSAR M, TSOI A. On reinsurance and investment for large insurance portfolios[J]. *Insurance: Mathematics & Economics*, 2008, 42(1): 434 – 444.

[7] DÉCAMPS J P, VILLENEUVE S. Optimal dividend policy and growth option[J]. *Finance and Stochastics*, 2007, 11(1): 3 – 27.

[8] MIAO J, WANG N. Investment, consumption, and hedging under incomplete markets[J]. *Journal of Financial Economics*, 2007, 86(3): 608 – 642.

[9] CRAMER H. *Collective Risk Theory*[M]. Stockholm, Sweden: Esselte, 1955.

[10] SCHMIDLI H. On minimising the ruin probability by investment and reinsurance[J]. *Annals of Applied Probability*, 2002, 12(3): 890 – 907.

[11] FLEMING W H, SONER H M. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*[M]. New York: Springer, 2006.

作者简介:

陈树敏 (1979—), 男, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为优化与控制及其在经济金融中的应用, E-mail: chenshumin1@gmail.com;

李仲飞 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为金融工程、金融经济学、风险管理, E-mail: lnslzf@mail.sysu.edu.cn.