

基于扰动补偿趋近律的准滑模控制

刘 涛, 刘贺平

(北京科技大学 信息工程学院, 北京 100083)

摘要: 针对不确定离散时间系统, 提出了一种基于扰动补偿趋近律的准滑模控制方法. 该方法不仅能够加快系统趋近模态的趋近速度, 缩短到达时间, 而且能够缩窄系统的准滑动模态带宽, 增强系统鲁棒性, 有效改善系统动态品质, 并无控制抖振和稳态抖振产生. 仿真结果表明了该方法的有效性.

关键词: 离散时间系统; 离散趋近律; 扰动补偿; 准滑模控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Quasi-sliding-mode control based on disturbance compensation

LIU Tao, LIU He-ping

(University of Science and Technology Beijing, School of Information Engineering, Beijing 100083, China)

Abstract: A quasi-sliding-mode control strategy based on disturbance compensation for uncertain discrete-time systems is considered. This new method increases the speed in reaching the destination mode, thus reducing the reaching time. It also decreases the region of quasi-sliding-mode, thus increasing the robustness and improving the dynamic quality. The undesired control-chattering and steady-states-chattering are avoided. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: discrete-time systems; discrete reaching law; disturbance compensation; quasi-sliding-mode control

1 引言(Introduction)

滑模控制是一种鲁棒控制方法. 在滑模控制系统中, 系统滑动模态对符合一定条件的参数摄动和外部干扰具有不变性, 从而引起了控制理论界的极大重视.

近些年来, 随着计算机技术的快速发展和广泛运用, 控制算法越来越多地利用数字计算机来实现. 离散时间滑模控制与连续时间滑模控制之间有很大不同. 在离散时间系统中, 由于有限采样频率的存在, 系统状态难以保持在滑模面上做理想的滑动模态运动, 而只能在滑模面的某一领域内做准滑模运动, 并伴有控制抖振与稳态抖振出现^[1~3].

高为炳院士在文献[4, 5]中提出了基于离散趋近律的变结构控制方法, 该方法物理意义明确, 设计简单, 但系统会存在控制抖振与稳态抖振. 文献[6]采用修正的离散趋近律消除了抖振, 但系统的趋近模态受不确定性的影响, 难以保证系统趋近过程的单调性. 文献[7~9]分别提出了改进形式的离散趋近律, 均未考虑不确定性对系统的影响. 文献[10]给出了一种带扰动动态补偿的离散趋近律, 增强了系统

鲁棒性, 但抖振仍然存在. 文献[11]对离散趋近律做了进一步分类研究, 提出了理想趋近律与鲁棒趋近律的概念.

本文针对一类不确定离散时间系统, 提出了一种基于扰动补偿趋近律的准滑模控制策略. 该方法不仅能够保证系统趋近过程的单调性, 缩短到达时间, 而且能够减小准滑动模态带宽, 增强系统鲁棒性. 控制律仅需前一时刻状态信息、前一时刻控制信息和当前时刻状态信息即能实现, 控制律中不含切换项, 从而避免了系统控制抖振和稳态抖振的产生.

2 系统描述及相关定义(System description and associated definition)

考虑以下不确定离散时间系统

$$x(k+1) = (\Phi + \Delta\Phi)x(k) + (\Gamma + \Delta\Gamma)u(k) + w(k). \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $u(k) \in \mathbb{R}$, $w(k) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示系统状态、控制输入和外部干扰; $\Phi, \Gamma, \Delta\Phi, \Delta\Gamma$ 是具有适当维数的矩阵, $\Delta\Phi, \Delta\Gamma$ 表示系统的参数摄动.

系统(1)可写为以下形式:

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + f(k). \quad (2)$$

其中 $f(k) = \Delta \Phi x(k) + \Delta \Gamma u(k) + w(k)$ 称为等效干扰.

假设 1 系统(1)具有完全能控性, 且等效干扰 $f(k)$ 满足以下匹配条件:

$$f(k) = \Gamma \tilde{f}(k),$$

其中 $\tilde{f}(k) \in \mathbb{R}$.

假设 2 等效干扰 $f(k)$ 的动态特性与采样频率相比慢得多.

定义以下滑模面:

$$s(k) = c^T x(k) = 0, \quad (3)$$

其中 $s(k) \in \mathbb{R}$, c 为待设计的具有适当维数的常数向量, 并满足 $c^T \Gamma \neq 0$. c 的选取可参考文献[4], 以保证系统(1)在滑模面(3)上运动时具有稳定的理想准滑动模态.

由假设2和式(3), 可得以下关系式成立:

$$|d(k) - d(k-1)| < \delta, \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} d(k) &= c^T f(k) = \\ c^T x(k+1) - c^T \Phi x(k) - c^T \Gamma u(k) &= \\ s(k+1) - c^T \Phi x(k) - c^T \Gamma u(k). \end{aligned} \quad (5)$$

借鉴文献[6], 可对准滑动模态和准滑动模态带宽做如下定义.

定义 1 若系统(1)的状态运动满足 $|s(k)| < \varepsilon$, 其中 ε 为某一正常数, 那么就称系统在滑模面 $s(k) = c^T x(k) = 0$ 的 ε -邻域内做准滑动模态运动, ε 称为准滑动模态带宽.

下一节, 本文将利用上述定义的准滑动模态和准滑动模态带宽的概念提出一种扰动补偿趋近律, 并对其进行鲁棒性分析.

3 主要结论(Main results)

3.1 扰动补偿趋近律及准滑模控制(Reaching law with disturbance compensation and quasi-sliding-mode control)

对系统(1)设计扰动补偿趋近律:

$$s(k+1) = d(k) - d(k-1) + H(s(k), T), \quad (6)$$

其中 $H(s(k), T)$ 满足:

1) 当 $x(k) \in \mathbb{N}$ 时,

$$H(s(k), T) = 0. \quad (7)$$

2) 当 $x(k) \in \mathbb{N}$ 时,

$$H(s(k), T) \operatorname{sgn} s(k) < |s(k)| - \sigma T - \gamma \delta, \quad (8)$$

其中: $\mathbb{N} = \{x | H(s(k), T) \operatorname{sgn} s(k) > 0\}$, $\sigma > 0$, $\gamma > 1$, T 为系统采样周期.

综合系统动态方程(1)和扰动补偿趋近律(6)可得:

$$\begin{aligned} s(k+1) &= c^T x(k+1) = \\ c^T \Phi x(k) + c^T \Gamma u(k) + c^T f(k) &= \\ c^T \Phi x(k) + c^T \Gamma u(k) + d(k) &= \\ d(k) - d(k-1) + H(s(k), T). \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)可得系统(1)在沿干扰补偿趋近律(6)运动时的控制律:

$$\begin{aligned} u(k) &= -(c^T \Gamma)^{-1} (c^T \Phi x(k) + d(k-1) - \\ &\quad H(s(k), T)), \end{aligned} \quad (10)$$

将式(5)延时一步得:

$$d(k-1) = s(k) - c^T \Phi x(k-1) - c^T \Gamma u(k-1), \quad (11)$$

将式(11)代入式(10)整理可得可实现的准滑模控制律:

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) - (c^T \Gamma)^{-1} (c^T \Phi (x(k) - \\ &\quad x(k-1))) - (c^T \Gamma)^{-1} (s(k) - \\ &\quad H(s(k), T)). \end{aligned} \quad (12)$$

扰动补偿趋近律(6)中 $d(k-1)$ 的作用是对当前时刻不确定扰动 $d(k)$ 进行有效补偿, 以减小不确定扰动 $d(k)$ 对系统趋近模态和准滑动模态的影响; 在3.2节对于扰动补偿趋近律进行具体分析时可以看到 $H(s(k), T)$ 的存在能够保证系统能够在有限时间内到达准滑动模态区, 并且其趋近模态具有单调性.

注 1 准滑模控制律(12)仅需要上一时刻状态和控制信息以及当前状态信息即可实现, 无累加项产生, 形式较文献[4, 6]更为简单.

3.2 系统鲁棒性分析(Analysis of system robustness)

在基于离散趋近律的准滑模控制方法中, 系统能够由任意初始状态在有限时间内到达准滑动模态区, 然后在准滑动模态区内做准滑动模态运动, 并最终稳定于原点的某一邻域. 下面就当系统采用扰动补偿趋近律(6)对系统(1)设计准滑模控制时, 对系统的鲁棒性进行具体分析.

引理 1 若 $H(s(k), T)$ 满足式(7)(8), 则集合 $\mathbb{N}$

和 $\bar{\mathbb{N}}$ 必满足以下关系:

$$\mathbb{N} \subset \ell, \quad (13)$$

$$S_\delta \subset \bar{\ell} \subset \bar{\mathbb{N}}. \quad (14)$$

其中: $\ell = \{x ||s(k)| > \sigma T + \gamma\delta\}$, $S_\delta = \{x ||s(k)| < \delta\}$.

证 由式(8)可知, 当 $x(k) \in \mathbb{N}$ 时, $H(s(k), T)$ 必满足:

$$0 < H(s(k), T) \operatorname{sgn} s(k) < |s(k)| - \sigma T - \gamma\delta,$$

此时必有以下关系成立:

$$\begin{cases} |s(k)| - \sigma T - \gamma\delta > 0, \\ |s(k)| > \sigma T + \gamma\delta, \end{cases} \quad (15)$$

由式(15)可得式(13)必成立, 即 $\mathbb{N} \subset \ell$, 此时 $\bar{\ell} \subset \bar{\mathbb{N}}$,

$$\bar{\ell} = \{x ||s(k)| \leq \sigma T + \gamma\delta\},$$

又因 $\sigma > 0, \gamma > 1, T > 0, \delta < \sigma T + \gamma\delta$, 可得:

$$S_\delta \subset \bar{\ell} \subset \bar{\mathbb{N}}.$$

证毕.

由引理1可以看出, S_δ 和 $\bar{\mathbb{N}}$ 的区域大小与等效干扰 $f(k)$ 的变化速度上界值有关. 一般地, 当其它参数均不变的情况下, $f(k)$ 的变化速度上界值越大, S_δ 和 $\bar{\mathbb{N}}$ 越大, 反之越小.

定理 1 对于系统(1), 采用扰动补偿趋近律(6)设计准滑模控制时, 系统能够由任意初始状态在有限时间内到达准滑动模态区 S_δ , 并且其趋近过程具有单调性; 系统状态一旦到达准滑动模态区 S_δ , 将保持在 S_δ 内做准滑动模态运动, 准滑动模态带宽为 δ .

证 由不等式(4)可知:

$$-\delta < d(k) - d(k-1) < \delta. \quad (16)$$

当 $x(k) \in \mathbb{N}$ 且 $s(k) > 0$ 时, 结合式(6)(8)和式(16)可得:

$$\begin{cases} 0 < H(s(k), T) < s(k) - \sigma T - \gamma\delta, \\ -\delta < s(k+1) < s(k) - \sigma T - (\gamma-1)\delta. \end{cases} \quad (17)$$

同理, 当 $x(k) \in \mathbb{N}$ 且 $s(k) < 0$ 时, 结合式(6)(8)和式(16)可得:

$$\begin{cases} s(k) + \sigma T + \gamma\delta < H(s(k), T) < 0, \\ s(k) + \sigma T + (\gamma-1)\delta < s(k+1) < \delta. \end{cases} \quad (18)$$

综合式(17)(18)和引理1可知, 当 $x(k) \in \mathbb{N}$ 时, $s(k)$ 将以至少 $\sigma T + (\gamma-1)\delta$ 的量向准滑动模态区 S_δ 做单调趋近运动, 且不会出现穿越 S_δ 的情况发生, 系统状态必能在有限时间内脱离 $\mathbb{N}$ -区域, 进入 $\bar{\mathbb{N}}$ 内或

者 S_δ 内.

当 $x(k) \in \bar{\mathbb{N}}$ 且 $x(k) \notin S_\delta$ 时, 结合式(4)(6)和式(7)可得:

$$s(k+1) = d(k) - d(k-1), \quad (19)$$

$$|s(k+1)| = |d(k) - d(k-1)| < \delta. \quad (20)$$

由此可知系统状态将于下一步到达准滑动模态区 S_δ , 即 $x(k+1) \in S_\delta$.

当 $x(k) \in S_\delta$ 时, $H(s(k), T) = 0$, 由式(20)可知 $x(k+1) \in S_\delta$, 系统将保持在准滑动模态区 S_δ 做准滑动模态运动.

综上所述, 当 $x(k) \notin S_\delta$ 时, 系统必能够于有限时间内到达准滑动模态区 S_δ , 并且其趋近过程具有单调性. 必然存在某一正整数 k_0 , 满足 $x(k_0) \in S_\delta$. 系统状态一旦到达 S_δ , 将保持在 S_δ 内做准滑动模态运动, 即有 $x(k_0+l) \in S_\delta, l \geq 0$, 准滑动模态带宽为 δ .

证毕.

下面给出一个满足式(7)(8)的 $H(s(k), T)$ 函数:

$$H(s(k), T) = \max\{0, |s(k)| - \alpha |s(k)| - \sigma T - \gamma\delta\} \operatorname{sgn} s(k), \quad (21)$$

其中 $0 < \alpha < 1$, 相应的 $\mathbb{N}$ 为

$$\mathbb{N} = \{x ||s(k)| > \frac{\sigma T + \gamma\delta}{1-\alpha}\}.$$

注 2 当 $H(s(k), T) \equiv 0$ 时, $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$, 此时, 扰动趋近律将变为式(19), 系统将在一步内进入准滑动模态区 S_δ .

注 3 当 $x(k) \in S_\delta$ 时, $H(s(k), T) = 0$, 控制律式(12)中无切换项, 避免了控制抖振和稳态抖振的产生.

4 仿真算例(Simulation example)

考虑以下二阶离散时间系统

$$x(k+1) = \Phi x(k) + \Gamma u(k) + f(k), \quad (22)$$

其中

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$f(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(0.1k) + 3 \end{bmatrix}.$$

系统初始状态 $x(0) = [1 \quad 4]^T$, 采样周期 $T = 0.01$ s.

取切换函数 $s(k) = c^T x(k)$, 其中

$$c^T = [5 \quad 1],$$

$$d(k) = c^T f(k) = \cos(0.1k) + 3,$$

$$|d(k) - d(k-1)| < \delta = 0.1.$$

下面对系统(22)利用文献[4]的离散指数趋近律、文献[6]提出的修正离散趋近律方法、文献[10]

提出的基于扰动补偿的离散趋近律方法和本文提出的扰动补偿趋近律方法进行仿真比较研究.

1) 高氏离散趋近律方法.

$$u(k) = -(c^T \Gamma)^{-1} [c^T \Phi x(k) - (1 - qT)s(k) + \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) + d_o + \delta_d \operatorname{sgn} s(k)]. \quad (23)$$

2) 修正离散趋近律方法.

$$u(k) = -(c^T \Gamma)^{-1} [c^T \Phi x(k) + d_o - s_d(k+1) + \sum_{i=0}^k (s(i) - s_d(i))]. \quad (24)$$

3) 扰动补偿离散趋近律方法.

$$u(k) = -(c^T \Gamma)^{-1} [c^T \Phi x(k) - (1 - qT)s(k) + \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) + \Delta_d \operatorname{sgn} s(k) + \sum_{i=2}^k \{s(i) - [(1 - qT)s(i-1) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k-1) - \Delta_d \operatorname{sgn} s(k)]\}]. \quad (25)$$

4) 本文提出的扰动补偿趋近律方法.

$$u(k) = u(k-1) - (c^T \Gamma)^{-1} (c^T \Phi (x(k) - x(k-1))) - (c^T \Gamma)^{-1} (s(k) - \max \{0, |s(k)| - \alpha |s(k)| - \sigma T - \gamma \delta\} \operatorname{sgn} s(k)). \quad (26)$$

式(23)~(26)中控制律参数分别取

$$q = 40, \varepsilon = 30,$$

$$d_o = \frac{d_l + d_u}{2} = 3, \delta_d = \frac{d_u - d_l}{2} = 1,$$

d_l 和 d_u 分别为 $d(k)$ 的上界值和下界值,

$$\begin{cases} s_d(k) = \frac{k^* - k}{k^*} s(0), & k < k^*; \\ s_d(0) = s(0), & k \geq k^*. \end{cases}$$

$k^* = 9, \alpha = 0.5, \gamma = 4$, 仿真结果如图1~图4所示:

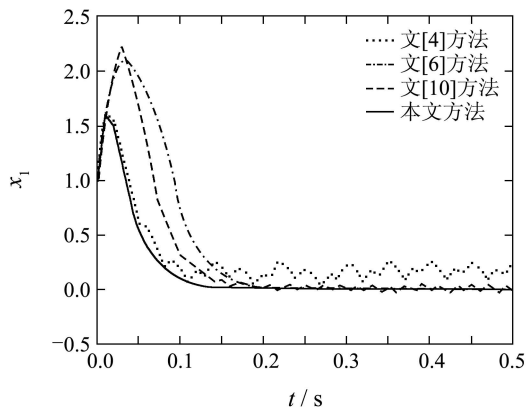


图1 系统状态的动态轨迹

Fig. 1 Trajectories of system state

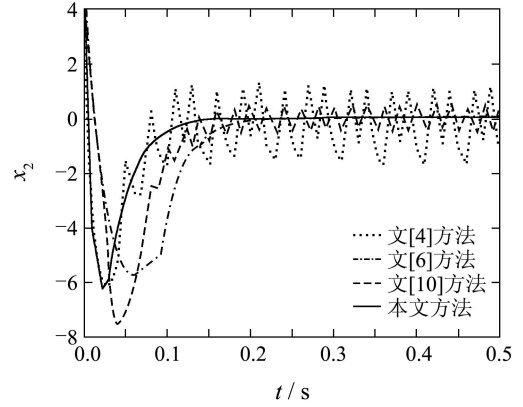


图2 系统状态的动态轨迹

Fig. 2 Trajectories of system state

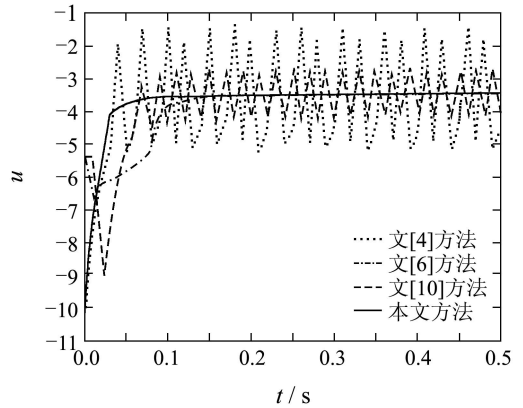


图3 系统输入的动态轨迹

Fig. 3 Trajectories of control input

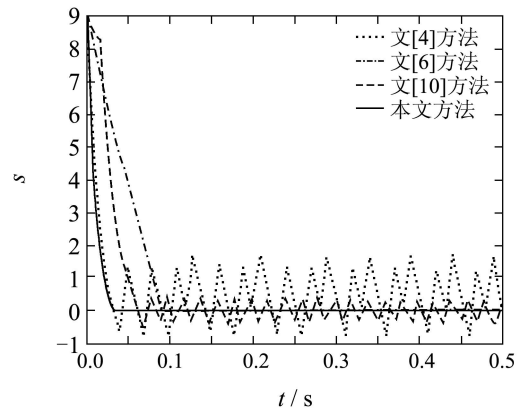


图4 滑模函数的动态轨迹

Fig. 4 Trajectories of sliding function

由仿真结果可以看出: 本文提出的基于扰动补偿趋近律的准滑模控制策略, 具有更快速的滑模收敛速度, 更窄的准滑模带宽, 系统鲁棒性得到进一步增强, 系统的动态品质优于其它3种方法, 无控制抖振和稳态抖振产生. 若以 $J = \sum_{i=0}^{50} |u(i)|$ 作为控制作用总体能量消耗指标, 则上述4种方法控制作用消耗的

总体能量分别为:

$$J_1 = 193.85, J_2 = 196.79,$$

$$J_3 = 193.25, J_4 = 188.39.$$

由此可见, 本文方法所消耗能量总体较少.

5 结论(Conclusion)

本文提出了一种基于扰动补偿趋近律的准滑模控制方法, 文中对系统的趋近模态和准滑动模态做了具体分析. 该方法既保留了离散趋近律的所有优点, 缩窄了准滑动模态带宽, 增强了系统的鲁棒性, 进一步改善了系统的动态性能和稳态性能, 并消除了系统控制抖振和稳态抖振; 控制律的实现不需已知不确定性界, 降低了系统保守性. 仿真结果验证了理论分析的正确性.

参考文献(References):

- [1] FURUTA K. Sliding mode control of a discrete system[J]. *Systems & Control Letters*, 1990, 14(2): 145 – 152.
- [2] YOUNG K D, UTKIN V I, OZGUNER U. A control engineer's guide to sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 1999, 7(3): 328 – 342.
- [3] 刘金琨, 孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(3): 407 – 418.
(LIU Jinkun, SUN Fuchun. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 407 – 418.)
- [4] GAO W B, WANG G F, HOMAIFA A. Discrete-time variable structure control systems[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117 – 122.
- [5] 高为炳. 离散时间系统的变结构控制[J]. *自动化学报*, 1995, 21(3): 154 – 161.
(GAO Weibing. Variable structure control of discrete-time systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1995, 21(3): 154 – 161.)
- [6] BARTOSZEWICZ A. Discrete-time quasi-sliding-mode control strategies[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1998, 45(4): 633 – 637.
- [7] 李文林. 离散时间系统变结构控制的趋近律问题[J]. *控制与决策*, 2004, 19(11): 1267 – 1270.
(LI Wenlin. Reaching law of discrete-time variable structure control systems[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(11): 1267 – 1270.)
- [8] 米阳, 李文林, 井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制[J]. *控制与决策*, 2008, 23(6): 643 – 646.
(MI Yang, LI Wenlin, JING Yuanwei. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(6): 643 – 646.)
- [9] 周德文, 高存臣, 李自强. 一种离散变结构控制趋近律[J]. *控制与决策*, 2008, 23(3): 306 – 309.
(ZHOU Dewen, GAO Cunchen, LI Ziqiang. Reaching law of discrete-time variable structure control system[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(3): 306 – 309.)
- [10] 瞿少成, 王永骥. 基于扰动动态补偿的离散滑模变结构控制[J]. *控制与决策*, 2004, 19(3): 311 – 314, 318.
(QU Shaocheng, WANG Yongji. Discrete time sliding mode control based on dynamic disturbance compensator[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(3): 311 – 314, 318.)
- [11] 宋立忠, 李槐树, 姚琼荃. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制[J]. *控制理论与应用*, 2008, 25(3): 525 – 528.
(SONG Lizhong, LI Huaishu, YAO Qionghui. Discrete-time variable-structure control based on reaching law approach[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 525 – 528.)

作者简介:

刘涛 (1983—), 男, 博士研究生, 研究领域为滑模变结构控制、数字控制系统等, E-mail: liutao19832001@163.com;

刘贺平 (1951—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为复杂系统建模与控制、自适应控制等, E-mail: lhpjx@ies.ustb.edu.cn.