文章编号: 1000−8152(2011)06−0851−04

基于最优控制理论的微分算子插值样条构造性质的新证法

张新建, 刘雄伟

(国防科技大学 理学院, 湖南 长沙 410073)

摘要: 本文将最优控制理论用于微分算子广义插值样条构造性质的研究. 通过将微分算子插值样条描述成线性最优控制问题, 用带状态约束的一类最优控制的必要条件推导出微分算子插值样条的构造与连续性质. 这一方法不仅较容易地导出了微分算子插值样条熟知的构造和连续性质, 而且还得到了样条经过微分算子作用后在节点处的跃度公式. 进一步揭示了微分算子插值样条与最优控制理论的联系, 为带障碍的算子插值样条构造性质的研究提供了新的方法.

关键词: 微分算子; 插值样条; 最优控制; Lagrange乘子

中图分类号: O232　　　**文献标识码**: A

Derivation of structural characteristics of differential operator interpolating splines by the criteria of optimal control

ZHANG Xin-jian, LIU Xiong-wei

(College of Science, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China)

Abstract: The optimal control theory is applied to investigate interpolating splines associated with arbitrary linear differential operators. The differential operator interpolating splines are considered a linear optimal control problem; the structure and the continuity property of differential operator interpolating splines are derived from the necessary conditions of the optimal control with constrained states. This method not only facilitates the derivation of the well-known structure and the continuity property of differential operator interpolating splines, but also obtains as well the jerk formula at nodes of splines after the operation of the differential operator, further revealing the relation between the differential operator interpolating splines and the optimal control and providing a new approach to the study of structural properties for obstructed operator interpolating splines.

Key words: differential operators; interpolating splines; optimal control; Lagrange multiplier

1　引言(Introduction)

算子样条函数的理论已为某些最优控制问题提供了新的描述和计算方法(例如文献[1～5]). 为了使一般线性微分算子确定的样条更方便地用于最优控制、概率统计和函数空间构造等方面的研究, 通常将微分算子样条的极值性质直接作为样条的定义. 但这种定义为这类样条的构造与解析性质的研究带来了困难. 文献[6]利用微分系统的逆系统方法研究了一类常系数微分算子样条的连续性质. 文献[7]利用伴随函数和Green函数的方法, 对一般的由微分算子确定的插值样条给出了其解析性质证明的一种新方法. 但这些方法都无法用于样条或其某些导数带不等式约束(即所谓带障碍)的情形. 文献[8]用优化和最优控制理论得到了带障碍的三次插值样条函数的构造和解析性质, 并在此基础上给出了三次样条的一种新的算法. 近来, 借助于最优化和最优控制方法对样条曲线、曲面的研究也取得了不少成果, 例如文献[9].

本文用优化和最优控制理论研究由一般微分算子确定的插值样条的构造与连续性质, 首先讨论不带障碍的情形, 然后讨论带障碍的情形. 本文的研究表明, 利用最优控制方法使得微分算子插值样条构造性质的推导得到简化, 并可用统一的方法处理不带障碍和带障碍的情形, 用经典的方法推导带障碍的插值样条的性质是很困难的. 这些研究也更好地揭示了样条与最优控制的联系, 为进一步研究带障碍的样条函数的理论和应用提供了新的启示.

笔者在以往的工作中讨论过经典的微分算子样条[7]和更广义的积分–微分算子样条[10]的构造与连续性质, 但这些研究没有用到最优控制原理. 另外, 笔者在文献[11]中用Green函数和拉格朗日恒等式讨论样条的构造与连续性质, 只在最后部分用到了最优控制原理. 在用最优控制原理方面, 本文与文献[11]相比有3点主要进展: ① 文献[11]讨论的是通常

收稿日期: 2009−07−07; 收修改稿日期: 2010−07−31.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10971226).

微分算子样条, 即在各子区间内满足$L^*s(t)=0$(其中L是形如下述式(1)的微分算子), 本文讨论的实际上是微分算子自然样条, 即在各子区间内满足$L^*Ls(t)=0$; ② 将单重节点插值推广到了EHB泛函插值情形; ③ 区分了带障碍与不带障碍的情形.

$$L=D^n+a_{n-1}(t)D^{n-1}+a_{n-2}(t)D^{n-2}+\cdots+a_1(t)D+a_0(t), \tag{1}$$

其中$a_j(t)\in C^j[a,b]$. 设函数空间

$$W_2^n[a,b]=\{f(t),t\in[a,b]: f^{(n-1)}(t)\text{绝对连续}, f^{(n)}(t)\in L^2[a,b]\},$$

再设$\{l_j\}_{j=1}^N(N\geqslant n)$是$W_2^n[a,b]$上一组线性无关的泛函, $\{r_j\}_{j=1}^N$是一组给定的实数, 令

$$U(r)=\{f\in W_2^n[a,b]:\ l_jf=r_j,\ 1\leqslant j\leqslant N\}. \tag{2}$$

由微分算子样条理论知[10]: 若$\{l_j\}_{j=1}^N$中有n个元素, 不妨设$\{l_j\}_{j=1}^n$在$\ker L=\{f\in W_2^n[a,b]:\ Lf=0\}$的核空间上线性无关, 则极小问题

$$\int_a^b(Ls(t))^2\mathrm{d}t=\min_{f\in U(r)}\int_a^b(Lf(t))^2\,\mathrm{d}t,\ s\in U(r) \tag{3}$$

有唯一解$s(t)$. $s(t)$通常称为**微分算子插值样条**.

为了方便样条的连续性质的讨论和实际应用的需要, 通常取$\{l_j\}_{j=1}^N$为插值型的所谓EHB泛函:

$$l_jf=\sum_{k=1}^{\gamma_j}\alpha_{jk}f^{(k-1)}(t_j),\quad j=1,2,\cdots N,\ 1\leqslant\gamma_j\leqslant n, \tag{4}$$

其中α_{jk}为常数, $a=t_1<t_2<\cdots<t_N=b$. 根据微分算子(1)定义微分算子列

$$\begin{cases}L_0^*=I,\\ L_j^*=-DL_{j-1}^*+a_{n-j}(t),\ j=1,2,\cdots,n,\end{cases} \tag{5}$$

I为恒等算子, 算子$\{L_j^*\}_{j=1}^n$称为L的部分伴随算子, $L^*=L_n^*$为L的伴随算子.

2 不带障碍的情形(No obstacle)

将微分方程$Lf(t)=u(t)(f\in W_2^n[a,b])$写为状态方程形式

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=A(t)x(t)+bu(t),\\ f(t)=cx(t),\end{cases} \tag{6}$$

其中:

$$\begin{cases}A(t)=\begin{pmatrix}0 & I_{n-1}\\ -a_0(t) & -a_1(t)\cdots-a_{n-1}(t)\end{pmatrix},\\ b=(0,\cdots,0,\ 1)^{\mathrm{T}},\ c=(\ 1,0,\cdots,0),\\ x(t)=(x_1(t),x_1(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}},\end{cases} \tag{7}$$

I_{n-1}表示$n-1$阶单位矩阵, 上标T表示转置.

按照最优控制的观点来说, 极小问题(3)就是求满足一定分段光滑的函数$u(t)$, 使指标泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}\int_a^b u^2(t)\mathrm{d}t \tag{8}$$

在约束条件:

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+bu(t), \tag{9}$$

$$\varGamma_j(x(t_j))=\sum_{k=1}^{\gamma_j}\alpha_{jk}x_k(t_j)-r_j=0,\ j=1,2,\cdots,N \tag{10}$$

下达到极小.

由带状态约束的最优控制的必要条件[8]知道, 存在分段连续可微的Lagrange乘子$\lambda(t)=(\lambda_1(t),\lambda_2(t),\cdots,\lambda_n(t))$和常数$\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_N$, 使得Hamiltonian函数

$$H=\frac{1}{2}u^2(t)+\lambda(t)(A(t)x(t)+bu(t)) \tag{11}$$

和状态约束(10)满足:

a) 伴随方程.

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}=-(\frac{\partial H}{\partial x_1},\frac{\partial H}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x_n}),\quad t\neq t_j,\ j=1,2,\cdots,N. \tag{12}$$

b) 横截条件.

$$\begin{cases}\lambda(a)=-\dfrac{\partial}{\partial x(a)}[\nu_1\varGamma_1(x(a))],\\ \lambda(b)=\dfrac{\partial}{\partial x(b)}[\nu_N\varGamma_N(x(b))],\end{cases} \tag{13}$$

$$\lambda(t_j^+)=\lambda(t_j^-)-\frac{\partial}{\partial x(t_j)}[\nu_j\varGamma_j(x(t_j))],\quad j=2,3,\cdots,N-1. \tag{14}$$

c) 极小原理. 设满足式(8)~(10)的解为$u^*(t)$, $x^*(t)$, 且由式(12)~(14)得到$\lambda^*(t)$, 则

$$u^*=\min_{u\in\mathbb{R}}H(t,x^*(t),u,\lambda^*(t)). \tag{15}$$

利用以上必要条件a)b)和c), 可以较容易地推导出算子插值样条$s(t)$的构造和连续性质, 其主要推导过程如下.

由式(7)(11)得

$$H=\frac{1}{2}u^2+\lambda_nu-a_0\lambda_nx_1-\sum_{j=2}^n(a_{j-1}\lambda_n-\lambda_{j-1})x_j, \tag{16}$$

则$\dfrac{\partial H}{\partial u}=u+\lambda_n$. 由必要条件c)知, $u^*(t)$是$\dfrac{\partial H}{\partial u}=0$的解, 因此得

$$u^*(t)=-\lambda_n^*(t),\ s(t)=cx^*(t)=x_1^*(t), \tag{17}$$

即$u^*(t)=-\lambda_n^*(t)=Ls(t)=Lx_1^*(t)$.

由必要条件a)和式(16), 得

$$\dot{\lambda}_1(t)=a_0\lambda_n,\ \dot{\lambda}_j(t)=a_{j-1}\lambda_n-\lambda_{j-1},\quad j=2,3,\cdots,n, \tag{18}$$

再由式(5), 有

$$\begin{cases} L_1^*\lambda_n = \lambda_{n-1},\ L_2^*\lambda_n = \lambda_{n-2}, \cdots, \\ L_{n-1}^*\lambda_n = \lambda_1,\ L^*\lambda_n = 0. \end{cases} \tag{19}$$

将式(10)代入横截条件(13)(14), 得

$$\begin{cases} \lambda(a) = -\nu_1(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1\gamma_1}, 0, \cdots, 0), \\ \lambda(b) = \nu_N(\alpha_{N1}, \alpha_{N2}, \cdots, \alpha_{N\gamma_N}, 0, \cdots, 0), \\ \lambda(t_j^+) = \lambda(t_j^-) - \nu_j(\alpha_{j1}, \cdots, \alpha_{j\gamma_j}, 0, \cdots, 0), \\ j = 2, 3, \cdots, N-1. \end{cases} \tag{20}$$

结合式(17)(19), 得知

$$\begin{aligned} &L_0^*u^*(a)=0,\ L_1^*u^*(a)=0, \cdots,\ L_{n-\gamma_1-1}^*u^*(a)=0, \\ &L_0^*u^*(b) = 0,\ L_1^*u^*(b) = 0, \cdots, \\ &L_{n-\gamma_N-1}^*u^*(b) = 0,\ L_i^*(u^*(t_j^+) - u^*(t_j^-)) = 0, \\ &i = 0, 1, \cdots, n-\gamma_j-1,\ j = 2, 3, \cdots, N-1. \end{aligned}$$

再由L_j^*的递推关系(5), 容易知道

$$\begin{aligned} &u^{*(i)}(a) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, n-\gamma_1-1, \\ &u^{*(i)}(b) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, n-\gamma_N-1, \\ &u^{*(i)}(t_j^+) - u^{*(i)}(t_j^-) = 0, \\ &i=0, 1, \cdots, n-\gamma_j-1,\ j=2, 3, \cdots, N-1. \end{aligned}$$

由式(17)(20), 还可以得到

$$\begin{aligned} &L_{n-i}^*(u^*(t_j^+) - u^*(t_j^-)) = \nu_j\alpha_{ji}, \\ &i = 1, 2, \cdots, \gamma_j,\ j = 2, 3, \cdots, N-1, \end{aligned}$$

由上综合出下述结论.

定理 1　由式(3)定义的满足EHB插值泛函的微分算子插值样条$s(t)$具有性质:

i) 当$t \neq t_j (j = 1, 2, \cdots, N)$时, $L^*Ls(t) = 0$;

ii) $s^{(i)}(t_j^+) - s^{(i)}(t_j^-) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, 2n-\gamma_j-1,\ j = 2, 3, \cdots, N-1$;

iii) 记$u^*(t) = Ls(t)$, 则

$$\begin{aligned} &u^{*(i)}(a) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, n-\gamma_1-1, \\ &u^{*(i)}(b) = 0,\ i = 0, 1, \cdots, n-\gamma_N-1, \\ &L_{n-i}^*(u^*(t_j^+) - u^*(t_j^-)) = \nu_j\alpha_{ji}, \\ &i=1, 2, \cdots, \gamma_j,\ j=2, 3, \cdots, N-1. \end{aligned} \tag{21}$$

上述定理除了给出微分算子插值样条熟知的性质外, 还得到了新的性质式(21). 根据样条的经典理论知, 微分算子插值样条$s(t)$在内节点t_j处具有$2n-\gamma_j-1$阶连续导数, 但更高阶导数的连续性和跳跃情况一般是不清楚的. 式(21)进一步描述了$s(t)$在内节点t_j处$2n-i(1 \leqslant i \leqslant \gamma_j)$阶导数的连续与跳跃情况. 例如由式(21)知, 当EHB泛函式(4)中的系数α_{ji}为零, 也即在t_j处对$s(t)$的$i-1$阶导数没有插值约束时, 则$s(t)$的$2n-i$阶导数在t_j处是连续的.

3　带障碍的情形(With obstacles)

以下考虑对样条$s(t)$或它的某些导数的符号(或它的取值范围)有限制的情形, 通常称为带障碍的情形. 这等价于对系统(6)的状态变量$x(t)$的某些分量施加不等式约束. 例如$x_1(t) \geqslant 0$, 则要求$s(t)$是非负的; $x_2(t) \geqslant 0$, 则要求$s(t)$是单调的. 本文以$s(t) \geqslant 0$为例, 即考虑下述最优控制问题.

求满足一定分段光滑的函数$u(t)$, 使指标泛函(8)在约束条件:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + bu(t), \tag{22}$$

$$\varGamma_j(x(t_j)) = \sum_{k=1}^{\gamma_j} \alpha_{jk}x_k(t_j) - r_j = 0, \tag{23}$$

$$G(x(t)) = -x_1(t) \leqslant 0 \tag{24}$$

下达到极小. 同样, 设式(8)(22)~(24)的解为$u^*(t)$, $x^*(t)$. 现在考虑新的划分

$$a = \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p = b, \tag{25}$$

其中$\tau_j (1 \leqslant j \leqslant p)$是由原有节点$t_j (1 \leqslant j \leqslant n)$和$s(t)$的所有孤立零点(也称为附加节点或$s(t)$的孤立接触点)共同组成. τ称为$s(t)$的孤立零点是指$s(\tau) = 0$, 但τ的任意邻域内均存在t, 使$s(t) > 0$. 本文考虑$s(t)$的孤立零点只有有限个的情形, 这样, 在式(25)的两个相邻节点之间, $s(t)$要么恒为零, 要么恒大于零.

设$\varDelta = \{t \in [a, b] : G[x^*(t)] = -x_1^*(t) = 0\} \neq \varnothing$, 假设$\varDelta$可分成$l$个紧子区间, 即$\varDelta = \bigcup\limits_{i=1}^{l} \varDelta_i$, $\varDelta_i$是紧区间, $\varDelta_i \cap \varDelta_j = \varnothing (i \neq j)$.

若$\varDelta_i = \{\tau_{i0}\}$, 表示$\varDelta_i$只包含唯一一个附加节点$\tau_{i0}$, τ_{i0}称为接触点; 若$\varDelta_i = [\tau_{i1}, \tau_{i2}]$, 则$x_1^*(t) = 0 (\tau_{i1} \leqslant t \leqslant \tau_{i2})$, 此时称$\varDelta_i$为有界子弧.

问题(8), (22)~(24)的Hamiltonian函数为

$$\begin{aligned} H = &\frac{1}{2}u^2(t) + \lambda(t)\left(A(t)x(t) + bu(t)\right) + \\ &\mu(t)\left(-x_1(t)\right) = \frac{1}{2}u^2 + \lambda_n u - a_0\lambda_n x_1 - \\ &\sum_{j=2}^{n}\left(a_{j-1}\lambda_n - \lambda_{j-1}\right)x_j - \mu x_1, \end{aligned} \tag{26}$$

此时, 除与问题(8)~(10)满足同样的伴随方程、横截条件和极小原理外, 还应满足下述连结条件和符号条件:

d) 连结条件. 设$\tau_{ik} (k = 0, 1, 2,\ i = 1, 2, \cdots, l)$为附加节点, 则存在常数$l_{ik}$, 使

$$\begin{aligned} &\lambda(\tau_{ik}^+) = \lambda(\tau_{ik}^-) - l_{ik}G_x(x(\tau_{ik})) = \\ &\lambda(\tau_{ik}^-) - l_{ik} \cdot (-1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{27}$$

e) 符号条件.

$$\mu(t)\begin{cases}=0,\ x_1(t)>0,\\ \geqslant 0,\ x_1(t)=0,\end{cases}\quad l_{ik}\geqslant 0, \tag{28}$$

综合必要条件a)∼e)可以较方便地得到微分算子非负插值样条的构造与连续性质. 由式(26)和伴随方程可以得到

$$L^*\lambda_n(t)=-\mu(t),\ \text{即}L^*u^*(t)=\mu(t), \tag{29}$$

由必要条件a)和b)得到的其他结果与前面的结果是一样的.

根据必要条件d), 得到

$$L_i^*[u^*(\tau_{jk}^+)-u^*(\tau_{jk}^-)]=0,\ i=0,1,\cdots,n-2,$$
$$j=1,2,\cdots,l,\ k=0,1,2,$$
$$L_{n-1}^*[u^*(\tau_{jk}^+)-u^*(\tau_{jk}^-)]=l_{jk},\ j=1,2,\cdots,l,$$
$$k=0,1,2.$$

于是

$$u^{*(i)}(\tau_{jk}^+)-u^{*(i)}(\tau_{jk}^-)=0,\ i=0,1,\cdots,n-2,$$
$$j=1,2,\cdots,l,\ k=0,1,2,$$
$$u^{*(n-1)}(\tau_{jk}^+)-u^{*(n-1)}(\tau_{jk}^-)=l_{jk},$$
$$j=1,2,\cdots,l,\ k=0,1,2.$$

设Δ_i为有界子弧, 则$x_1^*(t)=0(t\in\Delta_i)$, 于是由式(17)知$u^*(t)=-\lambda_n(t)=0$, 再由必要条件式(29)知$\mu(t)=0(t\in\Delta_i)$. 当$x_1^*(t)>0$时, 由必要条件e)知$\mu(t)=0$. 故$L^*u^*(t)=0,\ t\neq\tau_i(i=1,2,\cdots,p)$. 综上, 得到下面的定理.

定理 2 由式(8)(22)∼(24)确定的解(即带障碍的微分算子非负插值样条)$s(t)$满足:

i) 当$t\neq\tau_j(j=1,2,\cdots,p)$时, $L^*Ls(t)=0$;

ii) 在原有节点处,

$$s^{(i)}(t_j^+)-s^{(i)}(t_j^-)=0,$$
$$i=0,1,\cdots,2n-\gamma_j-1,\ j=2,3,\cdots,N-1,$$
$$u^{*(i)}(a)=0,\ i=0,1,\cdots,n-\gamma_1-1,$$
$$u^{*(i)}(b)=0,\ i=0,1,\cdots,n-\gamma_N-1,$$
$$L_{n-i}^*(u^*(t_j^+)-u^*(t_j^-))=\nu_j\alpha_{ji},$$
$$i=1,2,\cdots,\gamma_j,\ j=2,3,\cdots,N-1.$$

iii) 在附加节点处

$$s^{(i)}(\tau_{jk}^+)-s^{(i)}(\tau_{jk}^-)=0,\ k=0,1,2,$$
$$i=0,1,\cdots,2n-2,\ j=1,2,\cdots,l,$$
$$s^{(2n-1)}(\tau_{jk}^+)-s^{(2n-1)}(\tau_{jk}^-)=l_{jk}\geqslant 0,$$
$$j=1,2,\cdots,l,\ k=0,1,2,$$

本文用线性系统的带状态约束的最优控制的必要条件比较容易地导出了经典的和带障碍$s(t)\geqslant c_0$的微分算子插值样条的构造和连续性质, 这一方法可以直接推广到带有障碍$s(t)\geqslant c_0$或$c_1\leqslant s(t)\leqslant c_2$的情形, 也为$s(t)$的导数$s^{(k)}(t)$带障碍, 即状态变量$x_{k+1}$带约束情形的研究提供了有力的方法. 按照这一方法, 可望能发现带障碍的样条函数的更深刻的结果, 也可为某些带状态约束的线性二次最优控制问题的研究提供新的启示.

参考文献(References):

[1] WEINERT H L, KAILATH T. A spline-theoretic approach to minimum energy control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1976, 21(4): 391 – 393.

[2] CHEN G R. *Spline approach to optimal problems with constraints*[D]. Dissertation: Texas A & M University, 1987.

[3] CHEN G R. Closed-form solutions of a general inequality-constrained LQ optimal control problem[J]. *Applicable Analysis*, 1991, 41(1/4): 257 – 279.

[4] 张新建. 最小能量控制与Lg–样条函数[J]. 应用数学, 1991, 4(4): 16 – 21.
(ZHANG Xinjian. Minimum energy control and Lg-splines[J]. *Mathematica Applicata*, 1991, 4(4): 16 – 21.)

[5] 张新建, 卢世荣. 一类多变量线性系统的极小能控制的样条函数解法[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(1): 61 – 64.
(ZHANG Xinjian, LU Shirong. A spline method for computing a class of minimum-energy control for multivariable linear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(1): 61 – 64.)

[6] WEINERT H L, SIDHU G S, ARMA S. System inverses, and Least-squares estimates[J]. *SIAM J Control and Optimization*, 1979, 17(4): 525 – 536.

[7] 张新建, 童丽. 微分算子插值样条解析性质的一种新证法[J]. 国防科技大学学报, 2001, 23(1): 89 – 92.
(ZHANG Xinjian, TONG Li. A new proving method of the continuous properties of interpolating splines of differential operators[J]. *Journal of National University of Defense Technology*, 2001, 23(1): 89 – 92.)

[8] OPTER G, OBERLE H J. The derivation of cubic splines with obstacles by methods of optimization and optimal control[J]. *Numerische Mathematik*, 1988, 52(1): 17 – 31.

[9] 覃廉. 基于最优化方法的图形图像若干问题的研究[D]. 广州: 中山大学, 2006.
(QIN Lian. *Studies on several graphics and image processing topics based on optimization method*[D]. Guangzhou: Sun Yat-Sen University, 2006.)

[10] 张新建. 由可逆线性系统确定的算子插值样条及其构造与连续性质[J]. 计算数学, 2001, 23(2): 145 – 154.
(ZHANG Xinjian. Structural and continuity characteristics of operator spline interpolations associated with linear systems[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2001, 23(2): 145 – 154.)

[11] 张新建, 带障碍的广义插值样条与带状态约束的最优控制[J]. 应用数学学报, 2000, 23(3): 342 – 350.
(ZHANG Xinjian. Generalized interpolating splines with obstacles and optimal control problems with state constraints[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2000, 23(3): 342 – 350.)

作者简介:

张新建 (1956—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为逼近理论、最优化理论, E-mail: xjz_20075@163.com;

刘雄伟 (1974—), 男, 讲师, 主要研究方向为快速算法、最优化理论, E-mail: nudtlxw@163.com.