第 27 卷第 9 期
2010 年 9 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 9
Sep. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)09−1259−04

基于两级算法的混沌控制

朱少平[1,2], 钱富才[1], 刘 丁[1]

(1. 西安理工大学 自动化与信息工程学院, 陕西 西安 710048; 2. 西安财经学院 统计学院, 陕西 西安 710061)

摘要: 提出了一种两级算法, 可以解决连续混沌系统的最小能量控制问题, 首先, 给出一个二次目标函数, 同时把混沌系统分解为线性部分和非线性部分. 上级算法对混沌系统中的非线性部分进行预估, 并把整个原系统表为带有常系数的线性系统; 下级算法用极小值原理解决这个典型线性二次最优控制问题, 并把解返回到上级算法, 上级算法根据下级的解对非线性部分重新预估. 这样通过两级间不断的信息交换, 最终得到混沌系统的最优控制律. 该方法不仅实现了对混沌系统的控制, 而且在整个控制过程中保证控制能耗为最小. 证明了算法的收敛性和闭环系统的稳定性. 对统一混沌系统的仿真结果表明了控制策略的有效性.

关键词: 混沌系统; 两级算法; 最优控制

中图分类号: TP13,O231　　　**文献标识码**: A

Chaos control based on the two-level algorithm

ZHU Shao-ping[1,2], QIAN Fu-cai[1], LIU Ding[1]

(1. School of Automation and Information Engineering, Xi'an University of Technology, Xi'an Shannxi 710048, China;
2. School of Statistics, Xi'an University of Finance and Economics, Xi'an Shannxi 710061, China)

Abstract: A two-level algorithm is proposed to solve the minimum-energy control for a continuous chaotic system. A quadratic performance function is first given, and the chaotic system is decomposed into the linear part and the nonlinear part. The upper-level algorithm predicts the nonlinear part and expresses the whole system as a linear system with constant coefficients. The lower-level algorithm solves a typical quadratic-optimal-control problem by using the principle of optimality. The solution thus obtained is fed back to the upper-level algorithm for re-estimating the nonlinear part. By continuously exchanging information between the two levels of the algorithm in this way, the optimal control law for the chaotic system is eventually determined. This method not only realizes the control of the chaotic system, but also minimizes the energy-cost in the whole process. The convergence of the two-level algorithm and the asymptotic stability of the closed-loop system are proved. For a general chaotic system, the simulation results show the effectiveness of the proposed method.

Key words: chaotic system; two-level algorithm; optimal control

1 引言(Introduction)

最近20多年来, 混沌控制受到了普遍重视和广泛研究. 自1990年Ott等[1]提出混沌控制的著名OGY方法以来, 人们相继提出许多控制混沌的方法[2~11]. 但所有这些控制混沌方法都只考虑了把混沌系统稳定在平衡点上或周期轨道上, 没有考虑混沌系统控制过程中的控制能量问题, 事实上在物理系统中, 任何执行机构输出的能量总是有限的, 控制能量一般不希望太大. 文献[12]基于Lyapunov稳定性理论和Krasovskii理论, 结合坐标平移变换, 对Chen混沌系统设计了一优化控制器, 将混沌吸引子渐近稳定到它的不稳定的平衡点. 文献[13]基于动态规划方法, 利用Bellman最优性原理, 结合Lyapunov稳定性定理, 对Rössler系统设计了一个最优控制器, 将混沌系统控制到系统的平衡点. 文献[12,13]虽考虑了混沌控制的性能指标要求, 但研究的是特殊的混沌系统, 方法不具有普适性.

本文考虑了既要把混沌系统稳定在平衡点上或周期轨道上, 同时使消耗的能量最小的混沌系统的控制问题, 性能指标采用状态与控制的二次泛函形式, 基本思想是, 把混沌非线性系统分解为线性部分与非线性部分两项和, 上级对非线性部分进行预估; 下级用极小值原理求解一个非典型二次最优控制问题, 并把解返回上级, 上级根据下级获得的解对非线性部分重新预估, 这样通过上下两级间不断的信息交换, 最终得到混沌系统的最优控制律. 本文证明了

收稿日期: 2009−07−11; 收修改稿日期: 2009−12−04.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874033); 陕西省自然科学基金资助项目(SJ08F27).

算法的收敛性和闭环系统的稳定性, 仿真结果表明了该方法的有效性.

2 问题描述(Problem statement)

考虑下述n维受控非线性混沌系统

$$\dot{x}(t) = f(x) + Bu(t), \tag{1}$$

其中f为非线性光滑向量函数, 不妨设$f(0) = 0$, x是n维状态向量, B为$n \times m$已知矩阵, $u(t) \in \mathbb{R}^m$为控制向量.

为使混沌系统稳定, 同时兼顾能量较小, 本文采用如下的二次性能指标

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x(t) + u^{\mathrm{T}}(t)R(t)u(t)]\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中$Q(t)$为$n \times n$非负定对称矩阵, $R(t)$为$m \times m$正定对称矩阵.

本文要解决的控制问题是: 寻找控制律$u^*(t)$, 使受控混沌系统(1)稳定且在$t > 0$时间内, 由式(2)二次性能指标J达到最小.

3 两级最优控制算法(two-level optimal control algorithm)

将函数$f(x)$分解为线性部分与非线性部分和的形式

$$f(x) = Ax(t) + d(x(t)),$$

式中$Ax(t)$为系统分解后的线性部分, $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0)$为$n \times n$阶常数矩阵, $d(x(t))$为系统分解后的非线性部分, $d(x(t)) = f(x) - Ax(t)$. 这时问题变为

$$\begin{aligned} &\min_{u(t)} \quad J, \\ &\text{s.t.} \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d(x(t)). \end{aligned} \tag{3}$$

当对式(3)中$d(x(t))$中的$x(t)$进行预估, 即给定$d(x(t))$中$x(t)$的值时, 这样由(3)确定的优化问题变为带已知项的非典型二次线性最优控制问题. 基于此认识, 本文采用如下两级算法进行求解:

下级: 对于上级给定$d(x(t))$中的$x(t)$的值, 求解问题:

$$\begin{aligned} &\min_{u_k(t)} J = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x_k^{\mathrm{T}}(t)Q(t)x_k(t) + u_k^{\mathrm{T}}(t)R(t)u_k(t)]\mathrm{d}t, \\ &\text{s.t.}\ \dot{x}_k(t) = Ax_k(t) + Bu_k(t) + d(x_{k-1}(t)), \end{aligned} \tag{4}$$

其中k为迭代次数.

由极小值原理可得最优控制律是

$$\begin{aligned} u_k^*(t) &= -R^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda_k(t) = \\ &-R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px_k(t) - R^{-1}B^{\mathrm{T}}g_k(t). \end{aligned} \tag{5}$$

其中P由Riccati方程

$$PA + A^{\mathrm{T}}P - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}}P + Q = 0 \tag{6}$$

确定; $g_k(t)$由微分方程

$$\begin{cases} \dot{g}_k(t) + (A^{\mathrm{T}} - PBR^{-1}B^{\mathrm{T}})g_k(t) + Pd(x_{k-1}(t)) = 0, \\ g_k(\infty) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

确定.

注 1 在目标函数为二次型且系统为线性的情况下, 控制是状态的完全反馈, 而对于混沌系统, 分解为非线性的部分通过预估变为已知, 原问题的约束就变成了带有已知项的线性方程, 因此在其解中便多了修正项$-R^{-1}B^{\mathrm{T}}g_k(t)$.

将上述最优控制律记为$u_k^*(t)$, 它表示第k次迭代得到的控制律. 用该控制律对系统(4)进行控制, 相应的状态记为$x_k^*(t)$.

上级: 对$d(x(t))$中的$x(t)$按如下公式重新预估

$$x_{k+1}(t) = x_k^*(t).$$

定义预估误差为

$$e = \int_0^{\infty}\frac{1}{2}(x_{k+1}(t) - x_k(t))^{\mathrm{T}}(x_{k+1}(t) - x_k(t))\mathrm{d}t.$$

迭代结束的标志是预估误差趋于恒定, 亦即$e \leqslant \varepsilon$, 其中ε为控制允许误差. 此时得到的控制序列即为问题的最优控制序列. 否则, 返回到上级, 计算$x_{k+1}^*(t)$, 这样通过上下两级间不断的信息交换, 最终得到混沌系统的最优控制律.

4 算法收敛性与系统稳定性(Convergence of algorithm and stability of system)

考虑非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{d}(x), t \in [0, \infty), \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{8}$$

其中$x \in \mathbb{R}^n$是系统的状态向量, $\bar{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$为一个常数矩阵, $\bar{d}(x)$为非线性光滑向量函数且满足条件

$$\begin{cases} \| \bar{d}(x) \| \leqslant \alpha,\ \forall x \in U \subset \mathbb{R}^n, \\ \| \bar{d}(x) - \bar{d}(y) \| \leqslant \beta \| x - y \|,\ \forall x, y \in U \subset \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{9}$$

其中α和β是正常数, $\| \cdot \|$是欧式范数.

定义向量函数序列$x_k(t)$为:

$$\begin{cases} x_0(t) = \phi(t)x(0), \\ x_k(t) = \phi(t)x(0) + \displaystyle\int_0^t \phi(t-\tau)\bar{d}(x_{k-1}(\tau))\mathrm{d}\tau, \end{cases} \tag{10}$$

其中$\phi(t)$为对应$\bar{A}$的状态转移矩阵, $k = 1, 2, \cdots$.

定理 1 由式(10)描述的向量函数序列$x_k(t)$一致收敛于系统(8)的解.

由定理1可知, 式(4)和式(7)的解序列$x_k(t)$和$g_k(t)$是一致收敛的, 而式(5)是与$x_k(t)$和$g_k(t)$相关的, 所以$u_k(t)$也是一致收敛的. 记$g(t)$和$u^*(t)$分别是序列$g_k(t)$和$u_k(t)$的极限, 所以序列$x_k(t)$的极限$x(t)$是控制问题(1)的最优状态轨线, 由此得到问题(1)最优控制律为:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^{\mathrm{T}}Px(t) - R^{-1}B^{\mathrm{T}}g(t). \tag{11}$$

定理 2　在由式(11)由式(1)表示的受控混沌系统是渐进稳定的.

5　仿真实验(Simulation experiment)

2002年吕金虎等[14]提出由下面方程所描述的一类混沌系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (25\alpha + 10)(x_2(t) - x_1(t)), \\ \dot{x}_2(t) = (28 - 35\alpha)x_1(t) - x_1(t)x_3(t) + \\ \qquad\quad (29\alpha - 1)x_2(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_1(t)x_2(t) - (\dfrac{\alpha + 8}{3})x_3(t), \end{cases} \tag{12}$$

其中$x_1(t), x_2(t), x_3(t)$是系统状态变量.

采用本文获得的控制律进行控制, 为了比较, 在$t = 50$ s时施加控制, 由仿真结果(见图1～3)看到在未加控制前系统是混沌的, 然而在施加控制后混沌系统很快走向平衡点.

同时从性能指标来看, 本文提出的控制混沌方法(TLOCA)比文献[10]中的方法(LF)可获得更好的性能指标(见图4～6).

5.1　状态的时间响应(The time response of the state)

1) 取$\alpha = 0$, 系统(8)是Lorenz混沌系统[15].

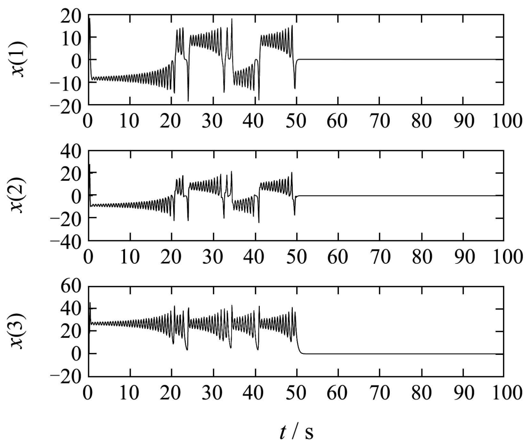

图 1　Lorenz系统状态变量x_1, x_2, x_3随时间的变化

Fig. 1　The time response of the state $x_1, x_2, x_3$for the controlled Lorenz system

2) 取$\alpha = 0.8$, 系统(8)是L$\ddot{u}$混沌系统[16].

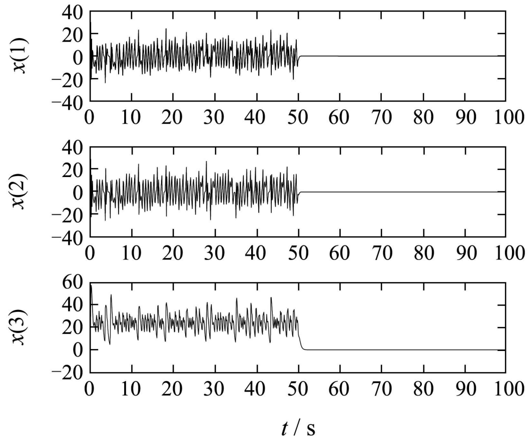

图 2　Lü 系统状态变量x_1, x_2, x_3随时间的变化

Fig. 2　The time response of the state x_1, x_2, x_3 for the controlled Lü system

3) 取$\alpha = 1$, 系统(8)是Chen混沌系统[17].

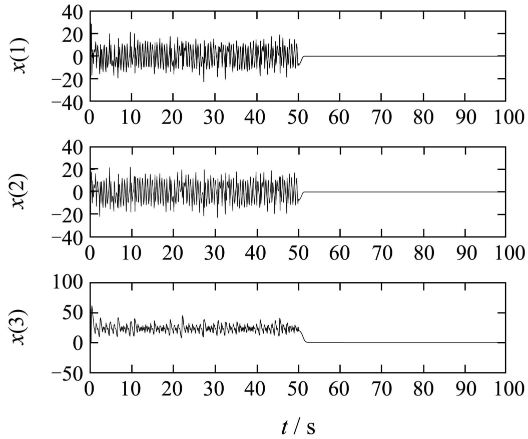

图 3　Chen系统状态变量x_1, x_2, x_3随时间的变化

Fig. 3　The time response of the state x_1, x_2, x_3 for the controlled Chen system

5.2　性能指标(Performance index)

1) Lorenz混沌系统.

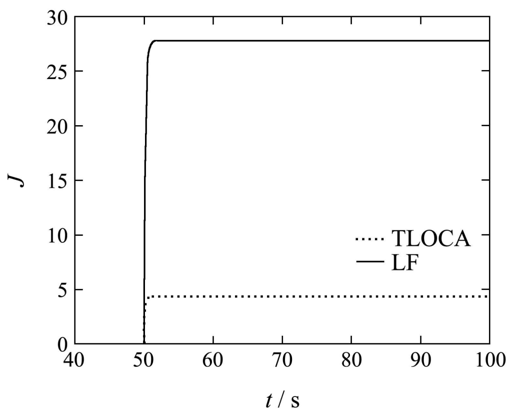

图 4　Lorenz系统性能指标变化图

Fig. 4　Variations of performance index J for Lorenz system

2) Lü混沌系统.

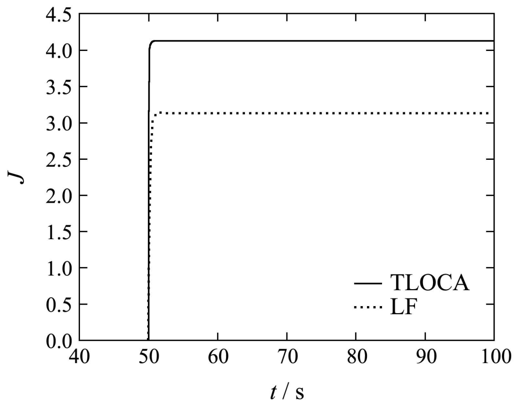

图 5 Lü系统性能指标变化图

Fig. 5 Variations of performance index J for Lü system

3) Chen混沌系统.

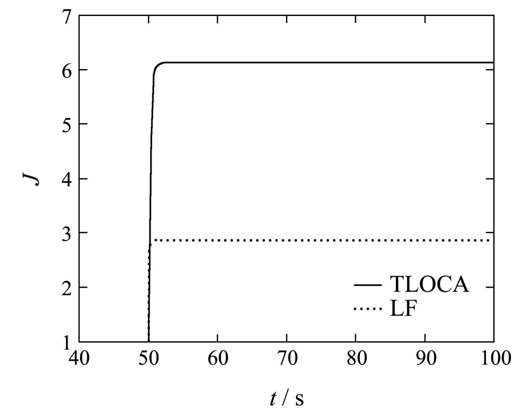

图 6 Chen系统性能指标变化图

Fig. 6 Variations of performance index J for Chen system

6 结论(Conclusions)

本文研究了混沌系统的最优控制问题, 提出了两级算法, 证明了算法的收敛性和被控系统的稳定性. 仿真结果表明, 该方法是可行的.两级算法的实质就是下级每次求解的是一个线性二次调节器(linear quadratic regulator, LQR)问题, 上级用下级的解对非线性部分进行估计, 这等同于用一系列的LQR问题逼近原来的非线性最优控制问题. 值得指出的是在设计阶段, 通过性能指标权矩阵的合理选择, 可以使控制能量在合理的范围, 甚至达到最小.

参考文献(References):

[1] OTT E, GREBOGI C, YORKE A J. Controlling chaos[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(11): 1196 – 1190.

[2] PYRAGAS K. Continuous control of chaos by self-controlling feedback[J]. *Physics Letters*, 1992, 170(6): 421 – 428.

[3] PYRAGAS K. Experimental control of chaos by delayed self-controlling feedback[J]. *Physics Letters*, 1993, 180(1): 99 – 102.

[4] ALSING P M, GARIELIDES A. Using neural networks for controlling chaos[J]. *Physical Review E*, 1994, 49(2): 1225 – 1231.

[5] OSCER. Fuzzy control of chaos[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1998, 8(8): 1743 – 1747.

[6] LIN C T. Controlling chaos by GA-based reinforcement learning neural network[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 1999, 10(4): 846 – 859.

[7] 吴晓群, 陆君安, 谢进, 等. 用采样数据反馈控制统一混沌系统到平衡点[J]. 控制理论与应用, 2003, 20(6): 889 – 893.
(WU Xiaoqun, LU Jun'an, XIE Jin, et al. Control unified chaotic system to equilibrium points using sampled data feedback[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 889 – 893.)

[8] LI C G, CHEN G R. Chaos and hyperchaos in fractional order Rossler equation[J]. *Physica A*, 2004, 341(10): 55 – 61.

[9] AHMAD W M. Hyperchaos in fractional order nonlinear systems[J]. *Chaos，Soliton and Fractals*, 2005, 26(5): 1459 – 1465.

[10] 陶朝海, 陆君安. 统一混沌系统的控制[J]. 物理学报, 2003, 52(2): 281 – 284.
(TAO Chaohai, LU Jun'an. Control of a unified chaotic system[J]. *Acta Physica Sinica*, 2003, 52(2): 281 – 284.)

[11] TAVAZOEI M S, Haeri M, BOLOUKI S, et al. Using fractional-order integrator to control chaos in single-input chaotic systems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 55(2): 179 – 190.

[12] YASSEN M T. The optimal control of Chen chaotic dynamical system[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2002, 131(1): 171 – 180.

[13] MARAT RAFIKOV, JOSE MANOEL BALTHAZAR. On an optimal control design for Rossler system[J]. *Physics Letters A*, 2004, 333(3): 241 – 245.

[14] LU J H, CHEN G R, CHENG D Z, et al. Bridge the gap between the Lorenz system and the Chen system[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(12): 2917 – 2926.

[15] LORENZ E N. Deterministic nonperiodic flow[J]. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, 20(2): 130 – 141.

[16] LU J H, CHEN G R. A new chaotic attractor coined[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659 – 661.

[17] CHEN G R, UETA TETSUSHI. Yet another chaotic attractor[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 1999, 9(7): 1465 – 1466.

作者简介:

朱少平 (1963—), 男, 博士研究生, 研究领域为大系统理论、非线性系统, E-mail: zhushaoping@126.com;

钱富才 (1963—), 男, 教授,博士生导师, 研究领域为大系统理论、非线性系统、最优控制、随机系统的辩识与控制、自适应控制;

刘 丁 (1958—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为工业自动化、系统优化、智能控制理论与应用等.