

多约束条件蚁群优化算法的收敛性分析及其应用

金 劲^{1,2}, 洪 毅¹, 赵付青¹, 余冬梅¹

(1. 兰州理工大学 电气工程与信息工程学院, 甘肃 兰州 730030; 2. 甘肃移动通信有限公司, 甘肃 兰州 730000)

摘要: 为有效解决无线移动自组网中多约束服务质量(QoS)路由问题, 提出结合QoS条件下的改进型蚁群算法. 该算法对QoS约束条件进行简化, 只考虑影响网络因子的主要指标, 提高了算法的工程实用性, 并在理论上证明该算法的收敛性. 对传统蚁群算法的信息素进行改善, 通过对该算法局部和全局收敛性的研究, 提出了普遍意义下的收敛条件, 为这一类约束条件下的蚁群算法进一步研究奠定了良好的基础.

关键词: 移动自组网; QoS; 蚁群优化算法; 路由选择算法; 收敛性分析

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Convergence analysis of multiple constrained routing-based ant colony optimization algorithm and its application

JIN Jin^{1,2}, HONG Yi¹, ZHAO Fu-qing¹, YU Dong-mei¹

(1. College of Electronics and Communication, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu 730030, China;

2. Gansu Mobile Communication Company Limited, Lanzhou Gansu 730000, China)

Abstract: To deal with the routing problem of the multiple-constrain quality-of-service(QoS) in wireless ad hoc networks, we propose an improved ant-colony-optimization(ACO) algorithm in combination of QoS requirements. In this algorithm, QoS requirements are simplified, only the major effects from network factors are considered, thus facilitating the algorithm applications. The convergence of the algorithm is proved theoretically. The information pheromone of the conventional ACO is improved to make the algorithm converge both locally and globally under a general convergence condition we developed. This work may provide a foundation for further theoretical studies on the multiple-constrain QoS of ACO.

Key words: Ad Hoc networks; QoS; ant colony optimization algorithm; routing selection algorithm; convergence analysis

1 引言(Introduction)

蚁群算法是 1992 年由意大利学者 Colormi A, Dorigo M和Maniezzo V^[1]首先提出的一种新型的模拟进化算法, 用蚁群在搜索食物源的过程中所体现出来的寻优能力来解决一些离散系统优化中的困难问题. 已经用该方法解决了旅行商问题^[2]、指派问题、调度问题等, 取得了一系列较好的验结果.

迄今为止国外学者关于蚁群算法收敛性研究主要集中在以下方面, Gutjahr^[3]和Badr^[4]分析了基于构造图的蚁群算法的收敛性; Gutjahr^[5]在此基础上构建一种符合随机过程的分支蚁群的算法, 采用随机过程的方法论证其收敛性. Stutzle等^[6]分析了最大最小蚁群算法的收敛性; 国内也有一些学者致力于蚁群算法的收敛性分析, 段海滨等^[7,8]以Markov链和离散鞅作为研究工具, 对基本蚁群算法的收敛问题进行了研究; 并从蚁群算法全局收敛性进行了研

究并证明. 石立宝等^[9]分析了随机摄动蚁群算法的收敛性. 孙焘等^[10]提出了一种具有变异算子的简单蚁群算法, 通过Markov过程分析的方法论证了算法的收敛性.

总的来说, 蚁群算法收敛性分析还处于初步阶段, 有许多解决方案还有待在理论上进行完成. 国内外有些学者将蚁群算法应用到AdHoc网络中解决QoS问题, 取得了很好的效果, 但是很少从理论上研究蚁群算法的优化性能对于其收敛性的作用; 另一方面, 未能给出信息素残留系数对于无穷小量收敛的上下界, 从某种意义上可以说这种算法是不可控的.

本文从理论上证明其算法的收敛性, 针对收敛性的信息素的上下界展开分析, 给出了取值范围, 从理论上保证了其收敛的可控性.

2 蚁群优化算法(Ant colony optimization algorithm)

2.1 QoS约束及适应度函数(Constriction of QoS and applicability degree function)

QoS路由的目的是向用户提供端到端的服务质量保证。它的质量指标包括延迟(delay)、延迟抖动(delay-jitter)、带宽(bandwidth)、丢包率(packet-loss)和费用(cost)等, 这些因素构成了QoS路由问题基本的约束条件。

网络模型表示为赋权图 $G = [V, E]$, 其中: V 表示所有网络节点集, E 是网络双向链路集, $s \in V$ 为源点, $u \in V$ 为终点。对于任一链路 $e \subset E$, 定义4种属性: 延迟函数 $\text{delay}(e)$, 网络延迟是指一个IP包在网络上传输平均所需的时间; 延迟抖动函数 $\text{delay-jitter}(e)$, 网络抖动是指IP包传输时间的长短变化, 以上两个函数是导致网络传输质量下降的主要因素; 带宽函数 $\text{bandwidth}(e)$, 网络的带宽是减少端到端延迟的决定因素; 费用函数 $\text{cost}(e)$, 表示网络链路的花费。对于任意网络节点 $n \in V$, 也定义4种度量, 分别为延时函数 $\text{delay}(n)$ 、费用函数 $\text{cost}(n)$ 、包丢失函数 $\text{packet-loss}(n)$ 和延时抖动函数 $\text{delay-jitter}(n)$, IP包在传送过程中有可能损坏或被丢失/丢弃, 如果丢失率过高将会使得数据受到明显损害, 则对于给定网络模型, 在网络中寻找最优路径, 要求从源节点出发, 到达目的节点, 并满足所有的约束条件, 达到花费最小或达到特定的服务水平的方程。

采用5个约束条件:

$$\text{delay}(P_T(s, u)) = \sum_{e \in P_T(s, u)} \text{delay}(e) + \sum_{n \in P_T(s, u)} \text{delay}(n), \quad (1)$$

$$\text{cost}(P_T(s, u)) = \sum_{e \in P_T(s, u)} \text{cost}(e) + \sum_{n \in P_T(s, u)} \text{cost}(n), \quad (2)$$

$$\text{bandwidth}(P_T(s, u)) = \min \{ \text{bandwidth}(e) \}, e \in P_T(s, u), \quad (3)$$

$$\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) = \sum_{e \in P_T(s, u)} \text{delay-jitter}(e) + \sum_{n \in P_T(s, u)} \text{delay-jitter}(n), \quad (4)$$

$$\text{packet-loss}(P_T(s, u)) = 1 - \prod_{n \in P_T(s, u)} \text{packet-loss}(n). \quad (5)$$

1) 延时约束:

$$\text{delay}(P_T(s, u)) \leq \Delta D;$$

2) 带宽约束:

$$\text{bandwidth}(P_T(s, u)) \geq \Delta B;$$

3) 延时抖动约束:

$$\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) \leq \Delta J;$$

4) 丢包率约束:

$$\text{packet-loss}(P_T(s, u)) \leq \Delta P;$$

5) 费用约束满足上述条件中: $\text{cost}(P_T(s, u))$ 最小。

则系统的适应度函数为

$$F_k = a\Phi[\text{delay}(P_T(s, u)) - \Delta D] + b\Phi[\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) - \Delta J] + c\Phi[\text{packet-loss}(P_T(s, u)) - \Delta P]. \quad (6)$$

$\Delta D, \Delta B, \Delta J, \Delta P$ 表示网络模型的延时、带宽、延时抖动和丢包率约束, a, b, c 分别为时延约束、延迟抖动约束、包丢失约束在适应度函数中所占的比重; $\Phi(x)$ 为惩罚函数, 当 $x \leq 0$ 时, $\Phi(x) = 1$; 否则, $\Phi(x) = r$, $r \in (0, 1)$ 之间的随机数; 这样, 当路由不满足某个QoS约束时, 就由 r 值来决定惩罚的程度。算法中对网络进行精简, 除去不满足带宽约束的链路。这样, 约束优化问题就转化为非约束优化问题, 只要找到使适应度函数 F_k 达到最大值且花费最小的路由, 即为满足QoS约束条件的最优路由。

2.2 蚁群算法编程设计(Program design of ant colony algorithm)

令目标函数 L_k 与适应度函数之间的关系为

$$L_k = 1/F_k. \quad (7)$$

对于 n 个节点的图 $G = [V, E]$, 首先建立链路的QoS多个约束方程, 将图 $G = [V, E]$ 中不满足带宽约束条件的边删除, 即删除 $\text{bandwidth}(P_T(s, u)) \leq \Delta B$ 的边。然后按以下步骤求解QoS蚁群算法路由问题:

Step 1 定义蚁群算法各参数:

初始化各个节点的(delay, delay-jitter, packet-loss, cost)的取值, 初始化每条边的[delay, delay-jitter, bandwidth, cost]取值, 给出约束条件中 $\Delta D, \Delta B, \Delta J, \Delta P$ 的值:

定义每边信息素初始值 $\tau_{ij}(t) = \text{muls}$, 令 $\Delta\tau_{ij} = 0$, 将 m 个蚂蚁都放在源节点上。

Step 2 建立 lisa_k 表, 用 $\text{lisa}_k(k = 1, 2, \dots, m; m$ 为蚂蚁总数), 保存第 k 只蚂蚁的路径表, 令 s 表示 lisa_k 表的列数, 设 s 初始值 $s = 1$; 将源点值置于 lisa_k 表的第1列;

Step 3 反复重复以下步骤直到 $lisa_k$ 列表被填满, s 的值每次加 1;

对每只蚂蚁根据下面式(8), 由当前节点 i 选择下一节点 j ;

$$p_{ij}^k = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \cdot \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{s \in \text{allowed}} \tau_{is}^\alpha(t) \cdot \eta_{sj}^\beta(t)}, & \forall j \in \text{allowed}_k, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (8)$$

式中的 $\tau_{ij}(t)$ 是指 t 时刻 (i, j) 边上信息素的浓度; $\text{allowed}_k = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 用以记录蚂蚁 k 下一步允许选择的节点, η_{ij} 表示边弧 (i, j) 的能见度, 取 $\eta_{ij} = 1/d_{ij}$, d_{ij} 表示节点 i 与节点 j 之间的距离. α 表示轨迹的相对重要性, β 表示能见度的相对重要性, 且 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. 然后按照概率选择下一节点 j , 将节点 j 插入到 $lisa_k$ 中的第 s 列.

Step 4 信息素强度调整规则.

在用蚁群算法解决 QoS 问题时, 一般在信息素中将 QoS 约束条件代入:

1) 局部更新.

对于第 k 只蚂蚁, 如果经过 (i, j) 时, 其信息素强度 $\tau(i, j)$ 根据下式更新:

$$\tau_{ij}(t+n) = (1-\rho) \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}, \quad (9)$$

其中: ρ 为信息素挥发强度参数 $0 < \rho < 1$, $\Delta\tau_{ij}$ 表示本次循环中路径 i, j 上的信息量增量, Q_1 为调整参数.

$$\Delta\tau_{ij} = \frac{Q_1}{L_k} = Q_1 \cdot F_k. \quad (10)$$

$f(s)$ 的定义:

$$\begin{aligned} f(s) &= Q_1 \cdot F_k = \\ &Q_1 \cdot \{a\Phi[\text{delay}(P_T(s, u)) - \Delta D] + \\ &b\Phi[\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) - \Delta J] + \\ &c\Phi[\text{packet-loss}(P_T(s, u)) - \Delta P]\}. \end{aligned} \quad (11)$$

对每一只蚂蚁, 通过重复应用路径选择规则来选择合适的路径.

F_k 的值越大, 适应值越高, 当然该路径越优, 其信息素浓度也越强;

2) 全局更新.

当每只蚂蚁成功完成一次寻径路由后, 选择出节点 (i, j) 是它所选择路径上的两个相邻节点:

$$\tau_{ij}(t+n) = (1-\lambda) \cdot \tau_{ij}(t) + \Delta\tau_{ij}, \quad (12)$$

否则不调节. 其中

$$\Delta\tau = \frac{Q_2}{\text{cost}(P_T(s, u))}. \quad (13)$$

令

$$g(s) = \frac{Q_2}{\text{cost}(P_T(s, u))}, \quad (14)$$

其中: $0 < \lambda < 1$, $\text{cost}(P_T(s, u))$ 是第 k 只蚂蚁选择的路径 $P_T(s, u)$ 上的总费用; Q_2 是调整系数. 参数 ρ , λ 必须设置成一个小于 1 的值, 以避免信息素的无限累加.

Step 5 如果达到最大迭代次数:

当系统达到最大迭代次数时输出最短花费的路径. 否则重复以上步骤, 直到每个待选链路都已经为止.

3 算法收敛性分析(Convergence analysis of algorithm)

引理 1 在 e_{ij} 中, 对于任意边上信息量均有 τ_{ij} , 其满足 $\tau_{\min} \leq \tau_{ij} \leq \tau_{\max}$, 其中:

$$\tau_{\max} = \max\left(\frac{f(s)}{\rho}, \frac{g(s)}{\lambda}\right),$$

$$\begin{aligned} f(s) &= Q_1 \cdot \{a\Phi[\text{delay}(P_T(s, u)) - \Delta D] + \\ &b\Phi[\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) - \Delta J] + \\ &c\Phi[\text{packet-loss}(P_T(s, u)) - \Delta P]\}. \end{aligned}$$

$\Phi(x)$ 为惩罚函数,

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ r, & x > 0. \end{cases}, \quad r \in (0, 1),$$

$$g(s) = \frac{Q_2}{\text{cost}(P_T(s, u))}.$$

证 在蚁群系统中, 由蚁群算法步骤和公式(8)~(14)得

$$\begin{aligned} f(s) &= \\ &Q_1 \cdot \{a\Phi[\text{delay}(P_T(s, u)) - \Delta D] + \\ &b\Phi[\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) - \Delta J] + \\ &c\Phi[\text{packet-loss}(P_T(s, u)) - \Delta P]\}, \\ g(s) &= \frac{Q_2}{\text{cost}(P_T(s, u))}. \end{aligned}$$

当蚂蚁觅寻优的最优路径为 s_i , 分以下 3 种情况:

1) 蚂蚁 k 从未经过边 e_{ij} , 此边上的信息素只减少不增加. 根据公式(9)和(11)有

$$\begin{cases} \tau_{ij}^{\min} = (1-\rho)\tau(0), & t \rightarrow \infty, \Delta\tau_{ij} \rightarrow 0, \\ \tau_{ij} = \tau_{\min}. \end{cases}$$

信息素 τ_{ij} 被强制到 $\tau_{\min}$.

2) 蚂蚁 k 经过边 e_{ij} , 若 $e_{ij} \notin s_i$, 蚂蚁经过边上的信息素只进行局部更新. 根据式(9)有

$$\begin{aligned}
\tau(1) &= (1-\rho)\tau(0) + f(s), \\
\tau(2) &= (1-\rho)\tau(1) + f(s) = \\
&\quad (1-\rho)^2\tau(0) + (1-\rho)f(s) + f(s), \\
&\vdots \\
\tau(t) &= (1-\rho)^t\tau(0) + (1-\rho)^{t-1}f(s) + \\
&\quad (1-\rho)^{t-2}f(s) + \cdots + f(s) = \\
&\quad (1-\rho)^t\tau(0) + \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s).
\end{aligned}$$

$\tau(0)$ 表示 $\tau(t)$ 的初始状态;

$$\tau_{ij}(t) = (1-\rho)^t\tau(0) + \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s). \quad (15)$$

当 $t \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\tau_{ij}^{\max}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij}(t) = \frac{1}{\rho}f(s), \\
f(s) &= Q_1 \cdot \{a\Phi[\text{delay}(P_T(s, u)) - \Delta D] + \\
&\quad b\Phi[\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) - \Delta J] + \\
&\quad c\Phi[\text{packet-loss}(P_T(s, u)) - \Delta P]\}.
\end{aligned}$$

3) 蚂蚁 k 经过边 e_{ij} , 若 $e_{ij} \in s_i$, 蚂蚁经过边上的信息素在局部更新后进行全局更新. 根据公式(12)和(14)有:

局部内循环结束后 $\tau_{ij}(t)$ 的值如下:

$$\begin{aligned}
\tau_{ij}(t) &= (1-\rho)^t\tau(0) + (1-\rho)^{t-1}f(s) + \\
&\quad (1-\rho)^{t-2}f(s) + \cdots + f(s) = \\
&\quad (1-\rho)^t\tau(0) + \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s).
\end{aligned}$$

令

$$Q(s) = \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s), \quad (16)$$

则方程改造为

$$\tau_{ij}(t) = (1-\rho)^t\tau(0) + Q(s).$$

将上式代入全局循环的初始值, 记为

$$\begin{aligned}
\tau'(0) &= \tau_{ij}(t) = (1-\rho)^t\tau(0) + Q(s), \\
\tau'(1) &= (1-\lambda)\tau'(0) + g(s) = \\
&\quad (1-\lambda)[(1-\rho)^t\tau(0) + Q(s)] + g(s) = \\
&\quad (1-\lambda)(1-\rho)^t\tau(0) + (1-\lambda)Q(s) + g(s), \\
\tau'(2) &= (1-\lambda)\tau'(1) + g(s) = \\
&\quad (1-\lambda)^2(1-\rho)^t\tau(0) + (1-\lambda)^2Q(s) + \\
&\quad (1-\lambda)g(s) + g(s), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau'(t) &= \\
&\quad (1-\lambda)^t\tau(0) + (1-\lambda)^tQ(s) + (1-\lambda)^{t-1}g(s) + \\
&\quad (1-\lambda)^{t-2}g(s) + \cdots + g(s) = \\
&\quad (1-\lambda)^t\tau(0) + (1-\lambda)^tQ(s) + \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i}g(s).
\end{aligned}$$

将公式(16) $Q(s) = \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s)$ 代入上式得

$$\begin{aligned}
\tau'(t) &= \\
&\quad (1-\lambda)^t\tau(0) + (1-\lambda)^tQ(s) + \\
&\quad (1-\lambda)^{t-1}g(s) + (1-\lambda)^{t-2}g(s) + \cdots + g(s) = \\
&\quad (1-\lambda)^t\tau(0) + (1-\lambda)^tQ(s) + \\
&\quad \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i}g(s) = \\
&\quad (1-\lambda)^t\tau(0) + (1-\lambda)^t \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s) + \\
&\quad \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i}g(s),
\end{aligned}$$

其中 $\tau(0)$ 表示全局变量 $\tau'(t)$ 的初始状态, 即

$$\begin{aligned}
\tau'_{ij}(t) &= \\
&\quad (1-\lambda)^t\tau(0) + (1-\lambda)^t \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s) + \\
&\quad \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i}g(s). \quad (17)
\end{aligned}$$

当 $t \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
\tau_{ij}^{\max}(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \tau'_{ij}(t) = \\
&\quad \lim_{t \rightarrow \infty} (1-\lambda)^t\tau(0) + (1-\lambda)^t \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i}f(s) + \\
&\quad \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i}g(s) = \frac{1}{\lambda}g(s),
\end{aligned}$$

其中 $g(s) = \frac{Q_2}{\cos t(P_T(s, u))}$, 因此,

$$\tau_{\max} = \max\left(\frac{f(s)}{\rho}, \frac{g(s)}{\lambda}\right).$$

由以上3种情况可得, 对于所有信息量 τ_{ij} , 均有

$$\tau_{\min} \leq \tau_{ij} \leq \tau_{\max}.$$

证毕.

定理 1 设 $p(t)$ 为 t 时刻内蚁群算法寻优最优解的概率, 对任意 $\forall \varepsilon > 0$, $p(t) \geq 1 - \varepsilon$ 成立; 且 $t \rightarrow \infty$ 时有: $\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 1$.

证 对于蚁群优化算法, 经过迭代循环之后, 算法总能找到一次最优解; 设 $p(t)$ 为 t 时刻内蚁群算法寻优最优解的概率, $\forall \varepsilon > 0$, 总有 $p(t) \geq 1 - \varepsilon$ 成立;

由引理1得知, 对任意信息素 $\tau_{ij}(t)$, 均有 $\tau_{\min} \leq$

$\tau_{ij} \leq \tau_{\max}$, 考虑 $p_{\min}$ 为最差寻优情况下概率, 则

$$p_{\min} = \frac{\tau_{\min}^{\alpha} \cdot \eta_{ij}^{\beta}}{\sum_{k \notin e_{ij}, k \neq j} \tau_{\max}^{\alpha}(t) \cdot \eta_{\max}^{\beta}(t) + \tau_{ik}^{\alpha}(t) \cdot \eta_{ij}^{\beta}(t)} \geq \frac{\tau_{\min}^{\alpha} \cdot \eta_{\min}^{\beta}}{(n-1)\tau_{\max}^{\alpha}(t) \cdot \eta_{\max}^{\beta}(t) + \tau_{\min}^{\alpha}(t) \cdot \eta_{\min}^{\beta}(t)} > 0$$

对任意小的 $p_{\min}$, 均有 $p \geq p_{\min}$ 存在.

任意时刻 t 时的概率 $p \geq p_{\min} > 0$, 由于当 t 充分大时, 总能寻到一个最优解, 则发现最优解的概率 $p(t)$ 为

$$p(t) = 1 - (1 - p)^t. \quad (18)$$

当 $\forall \varepsilon > 0$, 当 t 充分大时, 有

$$p(t) \geq 1 - \varepsilon;$$

所以, 当 $t \rightarrow \infty$ 时

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (1 - p)^t = 0.$$

由式(18)得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = 1.$$

证毕.

定理 2 s_i 为最优路径元素集, $\forall e_{ij} \in s_i$; s_n 为非最优路径元素集, $\forall e_{kl} \in s_n$, 在系统找到最优解后经过有限次迭代后, 均有 $\tau_{kl} \leq \tau_{ij}$.

证 k 选择下一节点的情况, 可以分为以下3种情况:

1) $\forall e_{kl} \notin s_i$, 且 $e_{kl} \in s_n$, 对于 $e_{ij} \in s_i$, 使得 $\eta_{ij} < \eta_{kl}$, 初始化时, $\forall \tau_{ij} = \tau_0$, 而 k 选择 e_{kl} 的概率为 0, 得出

$$\tau_{kl} = \tau_{\min}.$$

2) $\forall e_{ij} \in s_i, e_{kl} \notin s_n$, $\tau_{ij}^{\max}$ 由式(15)计算:

$$\tau_{ij}(t) = (1 - \rho)^t \tau(0) + \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} f(s).$$

当 $t \rightarrow \infty$, $\tau_{ij}^{\max}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau_{ij} = \frac{1}{\rho} f(s)$,

$$f(s) = Q_1 \cdot \{a\Phi[\text{delay}(P_T(s, u)) - \Delta D] + b\Phi[\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) - \Delta J] + c\Phi[\text{packet-loss}(P_T(s, u)) - \Delta P]\}.$$

3) $\forall e_{ij} \in s_i, e_{kl} \in s_n$, $\tau_{ij}^{\max}$ 由式(17)计算:

$$\tau'_{ij}(t) = (1 - \lambda)^t \tau(0) + (1 - \lambda)^t \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} f(s) + \sum_{i=1}^t (1 - \lambda)^{t-i} g(s),$$

所以, 当 $t \rightarrow \infty$, $\tau_{ij}^{\max}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \tau'_{ij} = \frac{1}{\lambda} g(s)$,

$$g(s) = \frac{Q_2}{\cos t(P_T(s, u))}.$$

由以上3种情况可得, 均有 $\tau_{ij} \geq \tau_{kl} = \tau_{\min}$.

证毕.

定理 3 s_i 为最优路径元素集, $\forall e_{ij} \in s_i$, s_n 为非最优路径元素集, $\forall e_{kl} \in s_n$, 当 $t_0 = \min\{\frac{1-\rho}{\rho}, \frac{1-\lambda}{\lambda}\}$ 时, 总有 $\tau_{ij} \geq \tau_{kl}$.

证 从第一次找到最优解的 t 开始, 再经过一段时间 t_0 之后, 且只有属于最优解的元素信息素增加, 其余解的元素上信息素减少, 直到减少到最小值 $\tau_{\min}$ 为止.

1) 蚂蚁 k 经过边 e_{ij} , 若 $\forall e_{ij} \in s_i, e_{kl} \notin s_n$, $\tau_{ij}^{\max}$ 由式(15)计算:

$$\begin{aligned} \tau_{ij}(t + t') &= (1 - \rho)^t \tau(0) + \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} f(s) = \\ &= (1 - \rho)^t \tau(0) + \sum_{i=1}^{t-1} (1 - \rho)^i f(s) > \\ &= t'(1 - \rho)^{(t'-1)} f(s). \end{aligned}$$

而 (k, l) 上的信息素变为

$$\begin{aligned} \tau_{kl}(t + t') &= \max\{\tau_{\min}, (1 - m)^t \tau_{\max}\}, \\ m &= \min(\rho_{\min}, \lambda_{\min}). \end{aligned}$$

因为 $\forall t$, 有 $\tau_{ij} > \tau_{\min}$ 成立.

$\tau_{ij}(t) > \tau_{kl}(t)$, 只需

$$t'(1 - \rho)^{(t'-1)} f(s) > (1 - \rho)^t \tau_{\max}.$$

在局部收敛过程中,

$$\begin{aligned} \tau_{\max} &= \frac{1}{\rho} f(s), \\ t'(1 - \rho)^{(t'-1)} f(s) &> (1 - \rho)^t \frac{1}{\rho} f(s), \\ t' &> \frac{1 - \rho}{\rho} = t_0. \end{aligned}$$

2) 蚂蚁 k 经过边 e_{ij} , $\forall e_{ij} \in s_i, e_{kl} \in s_n$, $\tau_{ij}^{\max}$ 由式(17)计算:

$$\begin{aligned} \tau'_{ij}(t + t') &= \\ &= (1 - \lambda)^t \tau(0) + (1 - \lambda)^t \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} f(s) + \\ &+ \sum_{i=1}^t (1 - \lambda)^{t-i} g(s) = \\ &= (1 - \lambda)^t \tau(0) + (1 - \lambda)^t \sum_{i=1}^t (1 - \rho)^{t-i} f(s) + \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{t-1} (1-\lambda)^i g(s),$$

$$f(s) = Q_1 \cdot \{a\Phi[\text{delay}(P_T(s, u)) - \Delta D] + b\Phi[\text{delay-jitter}(P_T(s, u)) - \Delta J] + c\Phi[\text{packet-loss}(P_T(s, u)) - \Delta P]\}.$$

因为

$$f(s) > 0, (1-\lambda)^t \sum_{i=1}^t (1-\rho)^{t-i} f(s) > 0,$$

所以

$$\tau'_{ij}(t+t') > (1-\lambda)^t \tau(0) + \sum_{i=1}^t (1-\lambda)^{t-i} g(s),$$

$$\tau'_{ij}(t+t') > t'(1-\lambda)^{(t'-1)} g(s).$$

在全局收敛中, $\tau_{kl}(t)$ 与局部收敛分析一致可得 $\tau'_{ij}(t+t') > \tau_{kl}(t)$, 即

$$t'(1-\lambda)^{(t'-1)} g(s) > (1-\lambda)^t \tau_{\max}.$$

在全局收敛中, $\tau_{\max} = \frac{1}{\lambda} g(s)$, 上式代入可得

$$t' > \frac{1-\lambda}{\lambda} = t'_0.$$

因此, 由上述情况可得出

$$t_0 = \min\left\{\frac{1-\rho}{\rho}, \frac{1-\lambda}{\lambda}\right\}.$$

证毕.

4 实验仿真(Experiment simulation)

4.1 网络拓扑图(Network topology figure)

为说明算法性能, 建立网络拓扑图, 本文采用17网络节点的网络结构模型进行实验仿真, 如图1所示.

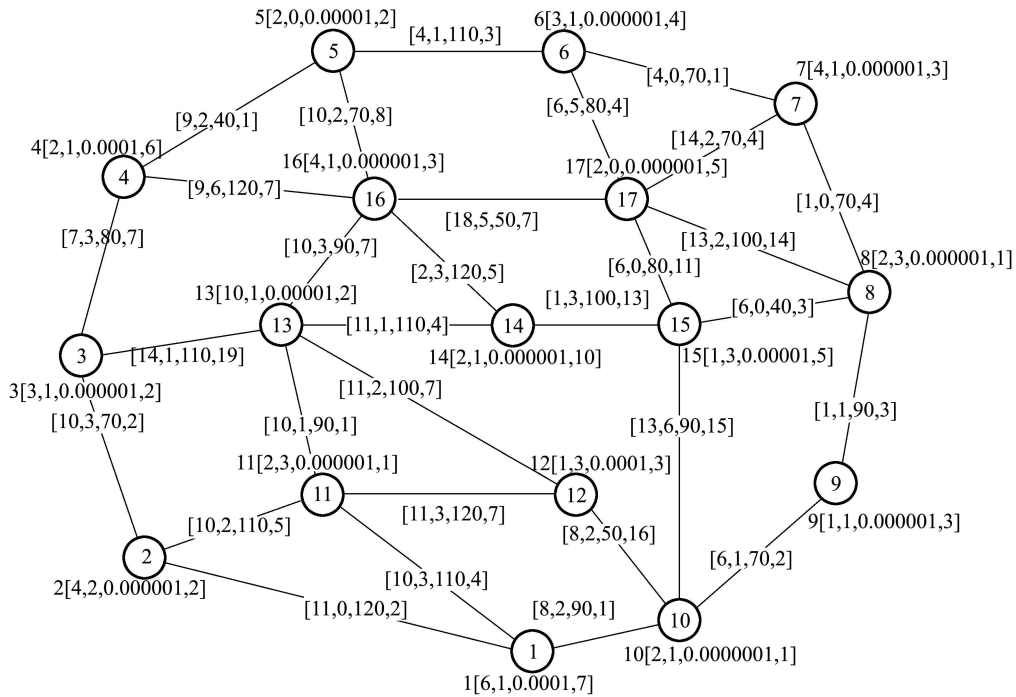


图1 网络拓扑结构

Fig. 1 Network topology structure

图中每个顶点用(delay, delay-jitter, packet-loss, cost)表示, 其中的元素分别代表节点延迟、延迟抖动、丢失率和费用; 每条边用[delay, delay-jitter, bandwidth, cost]表示, 其中的元素分别代表链路延迟、延迟抖动、边的带宽和费用.

4.2 实验算法参数设定(Parameter setting of experiment algorithm)

在仿真实验中, 取 $\Delta D = 58$, $\Delta J = 20$, $\Delta P = 0.001$, $\Delta B = 70$. 为了验证实验效果, 对其值进

行了适当调整. 按照蚁群优化算法的基本流程, 先根据系统对带宽的要求($\text{bandwidth}(P_T(s, u)) \geq \Delta B$)简化网络拓扑图1, 由于边4-5, 10-12, 16-17被删掉, 得到图2. 下面的实验数据都由图2计算得到, 源点为1, 目的节点为5. QoS需求决定加权系数 a, b, c 的大小, 在本实验中, 设定 $a = b = c = 1$, 即在满足QoS限制下, 考虑费用函数的制约作用.

网络剔除不满足QoS路径后的网络拓扑, 见图2所示.

蚁群参数设定: $\alpha, \beta, \rho, \lambda, \tau$ 等参数的取值主要通过实验的方法来确定其最优的组合, 还没有形成完整的理论体系. 以下的实验结果是采用 10 次实验的平均值, 蚁群数为 20, 迭代 40 次, 超过迭代

次数时系统结束. 然后对其值进行适当的调整. 经过多次实验得到:

$$\alpha = 1, \beta = 2, \rho = 0.8,$$

$$\lambda = 0.9, \tau = 80, Q_1 = Q_2 = 1000.$$

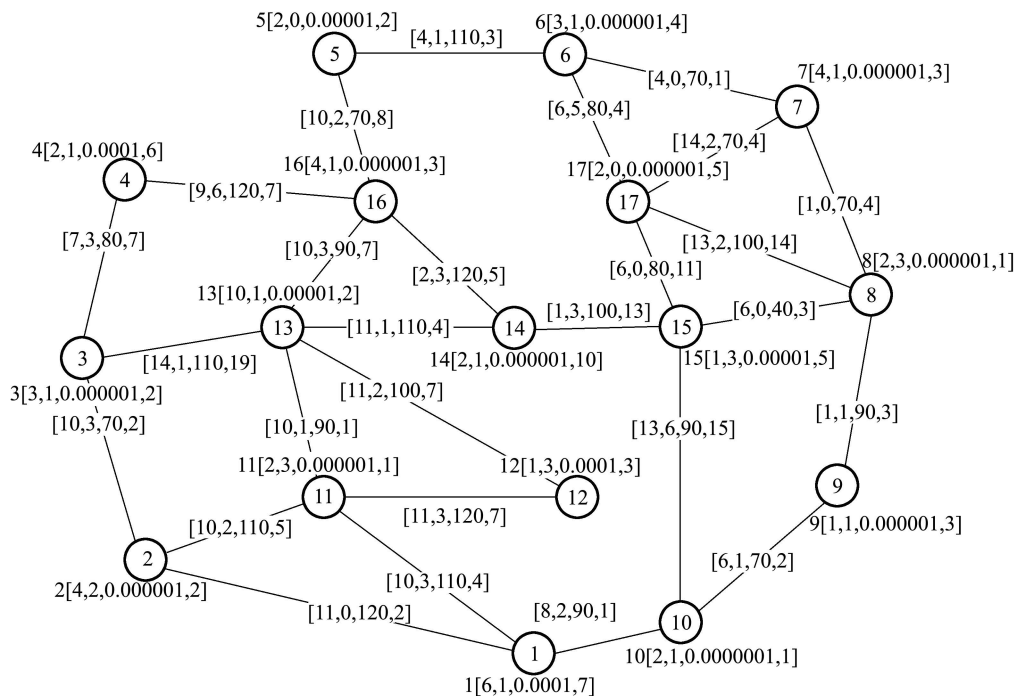


图 2 网络拓扑简化结构

Fig. 2 Network topology facilitation structure

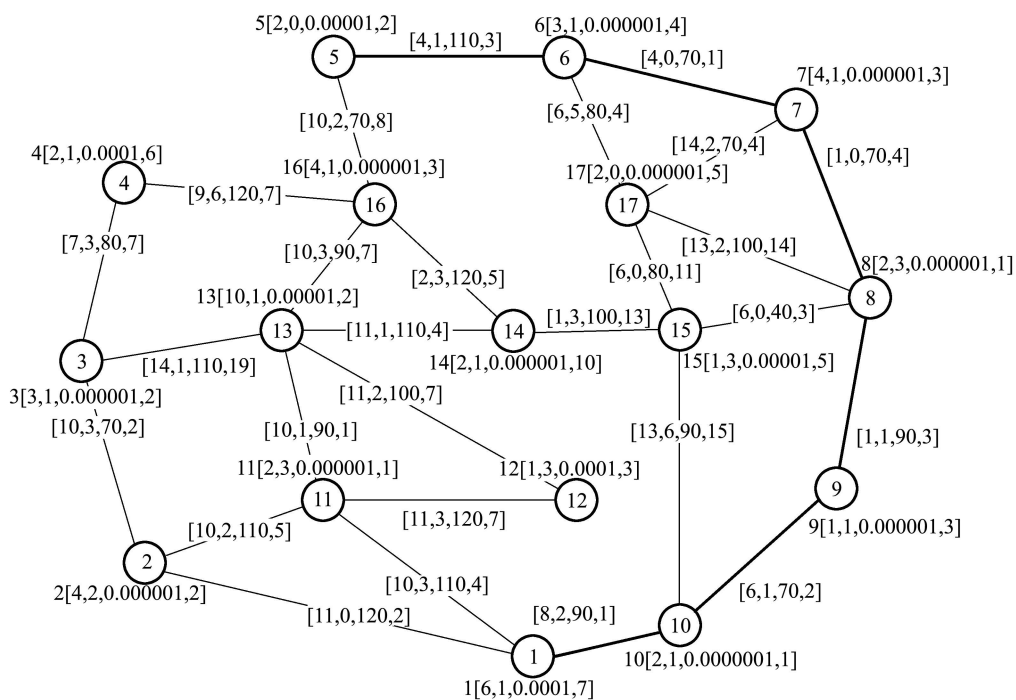


图 3 蚁群优化算法发现的路由

Fig. 3 Routing finding of ant colony optimization algorithm

4.3 实验结果和说明(Experiment result and explanation)

本文采用测试平台为C语言和WindowsXP, 机器主频为P4 (1.73 G), 内存为512 M. 在仿真实验中, 随机生成网络拓扑图(图1), 图中共有17个节点, 30条边. 其中: 1为源节点, 5为目的节点.

采用蚁群优化算法对系统进行仿真时: 当参数由系统实验的结果代入, 即 $\tau = 80$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\rho = 0.8$, $\lambda = 0.9$, 蚁群数为20; 系统经过迭代32次就找到全局最优解 $1 \rightarrow 10 \rightarrow 9 \rightarrow 8 \rightarrow 7 \rightarrow 6 \rightarrow 5$ (见图3).

采用蚁群算法寻优结果, 见表1.

表1 基蚁群优化算法的实验结果

Table 1 Results of experiment of ant colony optimization algorithm

连接请求	路由	延时	延时抖动	丢包率	费用开销	最小带宽
1→5	1 → 10 → 9 → 8 → 7 → 6 → 5	36	12	0.000014	28	70

将蚁群算法与同类算法进行比较, 本文采用与遗传算法(GA)进行比较得到以下结论:

从图4和图5来看, 将ACO的收敛过程同遗传算法进行比较. 通过实验发现: 一般的GA接近82代才完全收敛, 而ACO算法仅用32代左右就完全收敛, 且优化后得到的系统稳定性远大于常规GA得到的系统稳定性. 因此, ACO算法比其他优化算法简单、优化效果好、收敛速度快, 得到全局最优点的能力更强.

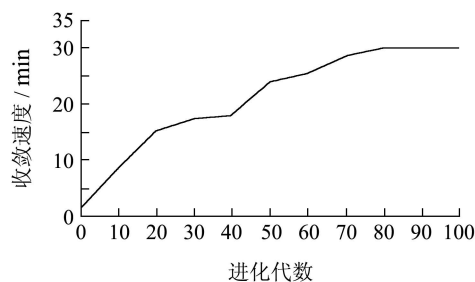


图4 遗传算法(GA)收敛过程

Fig. 4 Convergence process of GA

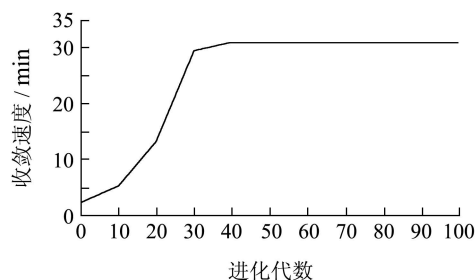


图5 蚂蚁群优化算法(ACO)的收敛过程

Fig. 5 Convergence process of ACO

图6和图7中, 上下分别为用遗传算法、ACO算法逐次迭代时路径的delay和cost的变化情况. 从图中可以看出: 本文中ACO算法的费用和传输延时较小, 可以快速有效地搜索到系统最优解.

ACO算法的执行时间少于GA算法的执行时间, 从进化迭代次数可以看出, ACO算法能够在较短的时间内找到最优解; 因此, 其全局搜索能力强于GA, 收敛速度也较GA更快.

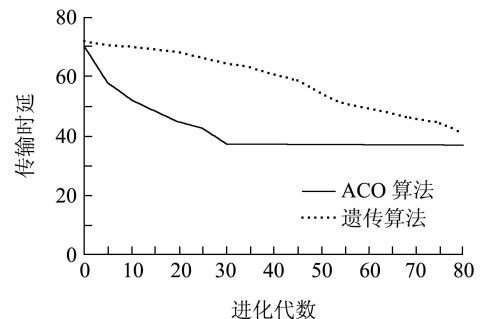


图6 遗传算法、ACO逐次迭代时路径的传输延时的变化曲线

Fig. 6 Variation curves of delay with iterative algorithms

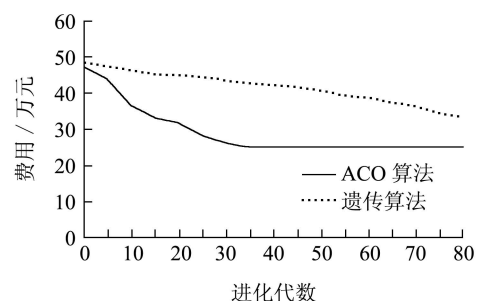


图7 遗传算法、ACO逐次迭代时路径的费用的变化曲线

Fig. 7 Variation curves of cost with iterative algorithms

5 结论(Conclusion)

对于多约束条件的蚁群算法, 往往约束条件的取舍及函数的设计尤为重要, 本文针对QoS条件下蚁群算法的收敛性展开讨论, 重新定义其信息素的选取, 从理论上证明该算法的收敛性; 并且还论证在带QoS约束条件的蚁群算法中, 信息素发生变

化的时间点, 以及信息素的取值范围, 从而证明该类蚁群优化算法收敛的可控制性, 通过实验仿真说明该算法的实用性.

参考文献(References):

- [1] COLORNI A, DORIGO M, MANIEZZO V. An investigation of some properties of an ant algorithm[C] // *Proceedings of the Parallel Problem Solving from Nature Conference(PPSN'92)*. Brussels, Belgium: Elsevier Publishing, 1992: 509 – 520.
- [2] DORIGO M, GAMBARDELLA L M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*(S1089-778X), 1997, 1(1): 53 – 66.
- [3] GUTJAHR W J. A graph-based ant system and its convergence[J]. *Future Generation Computer Systems*, 2000, 16(8): 873 – 888.
- [4] BADR A, FAHMY A. A proof of convergence for ant algorithms[J]. *International Journal of Intelligent Computing and Information*, 2003, 3(1): 22 – 32.
- [5] GUTJAHR W J. ACO algorithms with guaranteed convergence to the optimal solution[J]. *Information Processing Letters*, 2002, 82(3): 145 – 153.
- [6] STUTZLE T, DORIGO M. A short convergence proof for a class of ant colony optimization algorithm[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computations*, 2002, 6(4): 358 – 365.
- [7] 段海滨, 王道波. 蚁群算法的全局收敛性研究及改进[J]. *系统工程与电子技术*, 2004, 26(10): 1506 – 1509.
(DUAN Haibin, WANG Daobo. Research and improvement on the global convergence of ant colony algorithm[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2004, 26(10): 1506 – 1509.)
- [8] 段海滨, 王道波, 于秀芬. 基本蚁群算法的A.S.收敛性研究[J]. *应用基础与工程科学学报*, 2006, 14(2): 297 – 301.
(DUAN Haibin, WANG Daobo, YU Xiufen. Research on the a.s.convergence properties of basic ant colony algorithm[J]. *Journal of Basic Science and Engineer*, 2006, 14(2): 297 – 301.)
- [9] 石立宝, 郝晋. 随机摄动蚁群算法的收敛性及其数值特性分析[J]. *系统仿真学报*, 2004, 16(11): 2421 – 2424.
(SHI Libao, HAO Jin. The numerical characteristics analysis and convergence proof for ant colony optimization algorithm with random perturbation behavior[J]. *Journal of System Simulation*, 2004, 16(11): 2421 – 2424.)
- [10] 孙焱, 王秀坤, 刘业欣, 等. 一种简单蚂蚁算法及其收敛性分析[J]. *小型微型计算机系统*, 2003, 24(8): 1524 – 1527.
(SUN Tao, WANG Xiukun, LIU Yexin, et al. Ant algorithm and analysis on its convergence[J]. *Mini-Micro Systems*, 2003, 24(8): 1524 – 1527.)
- [11] STUTZLE T, HOOS H. MAX-MIN ant system[J]. *Future Gener Computer Systems*, 2000, 16(8): 889 – 914.

作者简介:

金 劲 (1969—), 男, 博士研究生, 主要研究领域通信与网络控制、计算机控制, E-mail: jinjin_2000@163.com;

洪 毅 (1954—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事复杂系统的建模与控制研究, E-mail: hongyi_lz@sohu.com;

赵付青 (1977—), 男, 副教授, 博士, 主要研究领域为数据挖掘、数据库系统、模糊集理论与应用, E-mail: fzhao2000@sohu.com;

余冬梅 (1955—), 女, 教授, 主要研究领域为数字通信与网络通信系统、计算机网络、网络协议与测试、网络体系结构, E-mail: yudongmlz@sohu.com.