

# 基于焦元支持度的合成规则

张捍东, 王翠华, 强克坤

(安徽工业大学 电气信息学院, 安徽 马鞍山 243002)

**摘要:** 为了有效地融合高度冲突的证据, 本文在焦元相似度和矛盾焦元的基础上提出了一种新的证据组合规则. 该规则综合了Dempster-Shafer证据理论及加性融合两者的优点, 首先从焦元冲突程度的角度对证据进行冲突检验, 然后对冲突证据进行加性合成, 从而消除证据之间的冲突. 为了避免计算量过大的现象将焦元分为矛盾焦元和正常焦元两部分. 仿真结果表明, 与D-S组合规则及其它方法相比, 新的合成规则可以合理地处理证据高度冲突的问题, 而且可以避免一票否决的现象, 同时具有较好的鲁棒性.

**关键词:** Dempster-Shafer证据理论; 矛盾焦元; 焦元支持度

**中图分类号:** TP274      **文献标识码:** A

## Combination rule based on support of the focal elements

ZHANG Han-dong, WANG Cui-hua, QIANG Ke-kun

(School of Electrical Engineering and Information, Anhui University of Technology, maanshan Anhui 243002, China)

**Abstract:** To combine highly conflicting evidences efficiently, a new evidence combination rule based on the similarity of focal elements and the conflicting focal element is proposed. This combination rule utilizes the advantages of the Dempster-Shafer(D-S) evidence theory and the additive strategy. The conflicting evidence is first verified according to the extent of the focal element, and then, modified by the additive strategy. The focal elements are divided into normal focal elements and conflicting focal elements to mitigate the huge calculation. Compared with D-S combination rule and other methods by simulation, the new combination rule exhibits the ability in combining highly conflicting evidences rationally, and avoiding one-vote negation with good robustness.

**Key words:** Dempster-Shafer evidence theory; conflicting focal element; support of the focal element

### 1 引言(Introduction)

在各种推理算法中, 由于D-S证据理论不需要任何先验信息且推理规则简单, 故其作为不确定性推理和数据融合算法具有独特的优势<sup>[1,2]</sup>. 但由于D-S证据合成规则在处理冲突证据时存在不足, 使证据理论的应用受到了一定的限制.

针对冲突证据的合成, 国内外专家提出了各种各样的解决方法, 总的说来这些方法可以分为两大类. 第1类是以Lefevre等为代表提出修改融合规则的方法, 国内许多研究人员对冲突证据的融合提出了新方法, 但它们都没有超出Lefevre方法的框架, 实验表明这类方法的改进效果并不理想; 第2类是以Haenni为代表提出的修改模型的方法, 该方法取得了一定的效果.

上述两类改进算法都是从冲突系数 $k$ 的角度来判断证据之间是否发生冲突, 但目前国内外学者认为导致证据冲突的原因不仅与冲突系数 $k$ 有关, 还可能来源于证据集某个“异点”证据的不良影响. 所

以如何甄别这些失真的证据然后加以剔除, 或采用某种策略在证据融合时尽量消除甚至完全消除失真证据的影响以确保系统决策的正确性, 是一个具有现实意义且值得深入研究的课题.

基于此, 本文尝试从矛盾焦元的角度<sup>[3]</sup>来分析可能导致证据冲突的原因, 从而有效地处理证据高度冲突的问题.

### 2 D-S证据理论(D-S evidence theory)

#### 2.1 组合规则(Combination rule)

D-S证据理论是建立在一个非空集合 $U$ 上的理论,  $U$ 称为辨识框架,  $U$ 中的元素满足互不相容的条件. 若 $m: 2^U \rightarrow [0, 1]$ 满足下列条件:

$$\sum_{A \subset 2^U} m(A) = 1, \quad (1)$$

且 $m(\varphi) = 0$ , 其中 $\varphi$ 表示空集.

$m(A)$ 称为 $A$ 的基本可信度分配函数, 当 $A \neq U$ 时,  $m(A)$ 表示表示对命题 $A$ 的精确信任程度; 当 $A =$

$U$ 时,  $m(U)$ 表示 $m$ 不知怎么分配; 当 $A$ 为 $U$ 的子集且 $m(A) \neq 0$ 时, 称 $A$ 为 $m$ 的焦点。

证据理论提供了一个有用的合成公式来合成多个证据源提供的证据. 设 $m_1$ 和 $m_2$ 是同一辨识框的两个证据所对应的基本可信度分配, 焦点分别为:  $A_1, A_2, \dots, A_n$ 和 $B_1, B_2, \dots, B_n$ , 则由下式定义的函数 $m: 2^U \rightarrow [0, 1]$ 是两证据联合后的基本概率分配:

$$m(A) = \begin{cases} 0, & A = \varphi, \\ \frac{\sum_{A_i \cap B_j = A} m_1(A_i)m_2(B_j)}{1 - \sum_{A_i \cap B_j = \varphi} m_1(A_i)m_2(B_j)}, & A \neq \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

令 $k = \sum_{A \cap B = \varphi} m_1(A_i)m_2(B_j)$ , 它反映了证据间的冲突大小.  $k$ 越接近1, 说明证据间的冲突越大, 此时会得出有悖常理的结论; 而 $k = 1$ 则表示证据完全冲突, 此时无法进行融合。

## 2.2 组合规则的改进(Improved combination rule)

针对D-S合成结果存在有悖常理的情况, 国内外学者主要从组合规则和融合模型两方面来对证据理论进行改善. 其中有些方法也得到了较好的效果, 但总的来说, 这些方法大多没有考虑到系统实际的应用背景, 不能保证融合结果向确定和可靠的方向收敛. 下面简单介绍一些典型的证据理论的改进方法。

Yager<sup>[4]</sup>最早提出了D-S理论失效的问题, 并对组合规则进行了改进, 认为既然对于冲突的证据无法作出合理的抉择, 就应该将冲突证据全部付给未知项, 虽然该改进规则能合成高度冲突的证据, 但结果不理想。

2000年, 孙全等<sup>[5]</sup>提出的合成公式所存在的不足, 使证据理论的应用受到了一定的限制. Yager对此作了改进, 但是改进后合成公式又存在以下新的问题: 1) 结论过于保守, 抗干扰能力较弱; 2) 新组合规则的鲁棒性不好。

2000年, Murphy<sup>[6]</sup>提出一种修改模型而不改变组合规则的方法. 他分析了已有的改进方法, 并提出了一种证据平均组合规则, 与其它方法相比, 该组合规则可以处理冲突证据, 并且收敛速度快. 但是Murphy方法的不足之处在于只是将多源信息进行简单的平均, 没有考虑到各证据之间的相关性。

邓勇, 施文康, 朱振福<sup>[7]</sup>在Murphy的基础上提出了一种有效地处理冲突证据的组合方法, 该方法考虑了证据之间的相互关联程度, 通过证据之间的距离来确定证据的可信度, 进而对证据进行加权平均, 最后按照D-S组合规则迭代得出融合结果; 王一军, 罗大庸<sup>[8]</sup>提出了采用信度分级的证据理论合成

规则; 林志贵, 徐立中, 周金陵<sup>[9]</sup>提出了一种基于修改模型的冲突证据组合方法; 张盛刚, 李巍华, 丁康<sup>[10]</sup>采用基于证据可信度的证据合成新方法来处理证据之间的冲突问题。

组合规则和融合模型的主要区别可以做如下的描述: 针对“模型 $X$ 利用规则 $Y$ 得到有悖常理的结论 $Z$ ”的问题, 坚持修改组合规则的一方认为规则 $Y$ 是不对的, 而坚持修改融合模型的一方则认为规则 $Y$ 本身没有问题, 只是模型 $X$ 出了问题。

## 3 改进规则中的基本概念(Conception of the improved rule)

### 3.1 焦点距离(Focal elements distance)

设辨识框架 $U$ 上焦点集 $A$ 所对应的证据体 $i$ 对其的基本可信度函数为 $m_i(A)$ 则 $m_i(A)$ 和 $m_j(A)$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ )的距离为<sup>[10]</sup>

$$d_{ij}(A) = |m_i(A) - m_j(A)|. \quad (3)$$

### 3.2 矛盾焦点的定义(Definition of conflict focal elements)

设辨识框架 $U$ 上有 $n$ 个证据体和 $m$ 个焦点, 设证据体 $i$ 对焦点 $A$ 的基本可信度为 $m_i(A)$ 与大多数证据体对焦点 $A$ 的基本可信度分配存在较大出入, 则证据 $i$ 所对应的元素 $A_i$ 就定义为焦点集 $A$ 中的矛盾焦点, 而证据 $i$ 为矛盾证据。

### 3.3 矛盾焦点的确定(Determine conflict focal elements)

设证据体 $i$ 对焦点 $A$ 的基本可信度为 $m_i(A)$ . 在分布图中能够反映分布结构的参数主要是: 中位数 $X_M$ 、上四分位数 $F_u$ 、下四分位数 $F_l$ 、四分位数离散度 $dF$ 和淘汰点 $\rho$ , 其定义和用法如下:

1) 假设对 $m_i(A)$ 已按从小到大的顺序排列的测量列:  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , 则 $X_1$ 称为下极限,  $X_N$ 称为上极限。

2) 定义中位值 $X_M$ 为:  $X_M = X_{\frac{N+1}{2}}$  ( $N$ 为奇数);  $X_M = \frac{X_{\frac{N}{2}+1} + X_{\frac{N}{2}}}{2}$  ( $N$ 为偶数)。

3) 在分位图中, 上四分位数 $F_u$ 被定义为区间 $[X_M, X_N]$ 的中位数, 而下四分位数 $F_l$ 则为区间 $[X_1, X_M]$ 的中位数。

4) 四分位数的离散度 $dF$ 定义为:  $dF = F_u - F_l$ .

在 $[X_1, X_M]$ 区间内选择与中位数的距离大于 $\beta dF$ : 即满足 $|X_M - X_i| > \beta dF$ 的焦点为矛盾焦点, 式中取 $\beta = 2$ 值. 淘汰点的定义为:

$$\rho_1 = F_l - \frac{\beta}{2}dF, \quad \rho_2 = F_u + \frac{\beta}{2}dF,$$

则不在区间 $[\rho_1, \rho_2]$ 内的焦点为矛盾焦点。

### 4 改进规则的实现 (Procedure of the improved rule)

**Step 1** 判断是否存在矛盾焦元及其所对应的冲突证据, 若存在执行 Step 2, 否则按公式(2)来进行计算.

**Step 2** 若存在矛盾焦元的焦元集  $k$ , 计算焦元距离  $d_{ij}(k)$ , 建立支持度矩阵

$$R_{ij}(k) = \begin{bmatrix} r_{11}(k) & r_{12}(k) & \cdots & r_{1n}(k) \\ r_{21}(k) & r_{22}(k) & \cdots & r_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{n1}(k) & r_{n2}(k) & \cdots & r_{nn}(k) \end{bmatrix}, \quad (4)$$

其中

$$r_{ij}(k) = -\frac{d_{ij}(k)}{\max\{d_{ij}(k)\}} + 1, \\ d_{ij}(k) \geq 0.$$

**Step 3** 由  $W = R_{ij}(k)V$  算出焦元  $k_i$  在焦元集  $k$  中关于其自身的权系数为:

$$w_i(k) = \frac{v_i(k)}{v_1(k) + v_2(k) + \cdots + v_n(k)}, \quad (5)$$

其中:

$$W = [w_1(k) \ w_2(k) \ \cdots \ w_n(k)]^T, \\ V = [v_1(k) \ v_2(k) \ \cdots \ v_n(k)]^T.$$

**Step 4** 对冲突证据体所对应的不存在矛盾焦元的焦元集  $l$ , 调整后的基本概率赋值为

$$m_i(l^*) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i(l)}{n}. \quad (6)$$

**Step 5** 从而可以得出矛盾证据体  $i$  关于矛盾焦元  $k$  的焦元集  $k_i$  和非矛盾焦元  $i$  的焦元集  $l_i$  基本可信度分配调整后其值分别为:

$$m_i(k^*) = \frac{\sum_{i=1}^n w_i(k)m_i(k)}{\sum_{k_1}^{k_L} \sum_{i=1}^n w_i(k)m_i(k) + \sum_{k=1, k \neq k_L}^m (\sum_{i=1}^n m_i(k)/n)}, \quad (7)$$

$$m_i(l^*) = \frac{\sum_{k=1}^l (\sum_{i=1}^n m_i(k)/n)}{\sum_{k_1}^{n-l} \sum_{i=1}^n w_i(k)m_i(k) + \sum_{k=1}^l (\sum_{i=1}^n m_i(k)/n)}. \quad (8)$$

**Step 6** 将由该算法所得到新的证据与证据集中的已有的好证据, 利用公式(2)计算得出融合结果.

### 5 算例分析 (Examples analysis)

设有4个证据如表1所示,  $m(A), m(B), m(C)$  表示各个证据对识别目标  $A, B, C$  的基本可信度分配. 对目标  $A$ , 2号证据对它的指派为0, 其它证据对它的指派都较高, 正常推断的结果应该是  $A$ .

表 1 4个证据3个目标的BPA

Table 1 The BPA of three objects for four evidences

	1	2	3	4
$m(A)$	0.5	0.0	0.55	0.55
$m(B)$	0.2	0.9	0.10	0.10
$m(C)$	0.3	0.1	0.35	0.35

利用分布图法找出焦元中存在矛盾焦元  $A_2$  和  $B_2$ . 利用本文的方法对证据2中的焦元重新进行基本可信度分配得到  $m_2(A) = 0.52, m_2(B) = 0.19, m_2(C) = 0.29$ . 使用D-S组合规则、Yager组合规则、文献[7~9]中的方法和本文的方法对表1数据进行融合, 结果见表2.

表 2 6种算法的结果比较

Table 2 The comparison of result for six algorithms

	1, 2	1, 2, 3	1, 2, 3, 4
经典D-S	$m(A)=0.000$ $m(B)=0.857$ $m(C)=0.143$	$m(A)=0.000$ $m(B)=0.631$ $m(C)=0.369$	$m(A)=0.00000$ $m(B)=0.32880$ $m(C)=0.6712$
Yager规则	$m(A)=0.000$ $m(B)=0.182$ $m(C)=0.035$	$m(A)=0.000$ $m(B)=0.018$ $m(C)=0.010$	$m(A)=0.00000$ $m(B)=0.00180$ $m(C)=0.00368$
文献[7]	$m(A)=0.154$ $m(B)=0.764$ $m(C)=0.092$	$m(A)=0.582$ $m(B)=0.243$ $m(C)=0.175$	$m(A)=0.80600$ $m(B)=0.04820$ $m(C)=0.14580$
文献[8]	$m(A)=0.154$ $m(B)=0.765$ $m(C)=0.081$	$m(A)=0.761$ $m(B)=0.051$ $m(C)=0.188$	$m(A)=0.85520$ $m(B)=0.00970$ $m(C)=0.13510$
文献[9]	$m(A)=0.424$ $m(B)=0.373$ $m(C)=0.203$	$m(A)=0.737$ $m(B)=0.061$ $m(C)=0.2013$	$m(A)=0.84890$ $m(B)=0.00910$ $m(C)=0.14200$
本文	$m(A)=0.693$ $m(B)=0.092$ $m(C)=0.217$	$m(A)=0.820$ $m(B)=0.037$ $m(C)=0.143$	$m(A)=0.89840$ $m(B)=0.01610$ $m(C)=0.08550$

从表2的融合结果可以看出, 经典D-S方法和Yager组合规则都存在一票否决的问题且Yager组合规则的融合结果中未知项的概率占主导, 系统无法作出决策, 故融合的意义不大. 文献[7~9]是对murphy方法的改进, 但这些方法都需要至少收集到3个证据时才能正确识别目标, 表明它们正确组合效率较低. 本文在收集到两个证据就可以准确判断

目标, 原因在于本方法考虑了相同焦元之间的关联特性, 有效地降低了“冲突焦元”对最后结果的影响.

## 6 结论(Conclusions)

由于人为或自然环境的因素, 收集到的证据经常存在较大的冲突, 而传统的Dempster组合规则无法有效地处理这些冲突. 针对一票否决、鲁棒性差等冲突证据的合成问题, 本文尝试从产生冲突的根本原因(矛盾焦元)入手, 通过消除矛盾焦元的影响达到解决冲突的目的, 对比融合结果表明本文提出的方法是处理冲突较为有效、直接的方法. 考虑到计算量的问题, 文中将焦元集分为矛盾焦元和正常焦元进行分别计算, 这样可以确保融合结果有效性的同时也大大减小了计算量, 增强了该算法的应用前景.

## 参考文献(References):

- [1] RICHARD JOHN A, JIA XIUPING. A D-S relaxation approach to context classification[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2007, 45(5): 1422 – 1431.
- [2] 林志贵, 徐立中, 黄凤辰, 等. 基于D-S理论的多源水质监测数据融合处理[J]. *计算机工程与应用*, 2004, 40(10): 3 – 5.  
(LIN Zhigui, XU Lizhong, HUANG Fengchen, et al. Multi-source water quality monitoring data fusion based on D-S theory[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2004, 40(10): 3 – 5.)
- [3] 杨善林, 罗贺, 胡小建. 基于焦元相似性的证据理论合成规则[J]. *模式识别与人工智能*, 2009, 23(2): 169 – 175.  
(YANG Shanlin, LUO He, HU Xiaojian. A combination rule of evidence theory based on similarity of focal elements[J]. *Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, 2009, 23(2): 169 – 175.)
- [4] YAGER RONALD R. On the Dempster-Shafer framework and new combination rules[J]. *Information Sciences*, 1987, 41(2): 93 – 137.
- [5] 孙全, 叶秀清, 顾伟康. 一种新的基于证据理论的合成公式[J]. *电子学报*, 2000, 28(8): 117 – 119.  
(SUN Quan, YE Xiuqing, GU Weikang. A new combination rules of evidence theory[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2000, 28(8): 117 – 119.)
- [6] MURPHY C K. Combining belief functions when evidence conflicts[J]. *Decision Support Systems*, 2000, 29(1): 1 – 9.
- [7] 邓勇, 施文康, 朱振福. 一种有效处理冲突证据的组合方法[J]. *红外与毫米波学报*, 2004, 23(1): 27 – 32.  
(DENG Yong, SHI Wenkang, ZHU Zhenfu. Efficient combination approach of conflict evidence[J]. *Journal of Infrared Millimeter Waves*, 2004, 23(1): 27 – 32.)
- [8] 王一军, 罗大庸, 张航. 采用信度分级的证据理论合成规则[J]. *计算机工程与应用*, 2009, 45(15): 41 – 43.  
(WANG Yijun, LUO Dayong, ZHANG Hang. Modified combination rules of conflict evidences based on reliability[J]. *Computer Engineering and Applications*, 2009, 45(15): 41 – 43.)
- [9] 林志贵, 徐立中, 周金陵. 基于修改模型的冲突证据组合法[J]. *上海交通大学学报*, 2006, 40(11): 1964 – 1970.  
(LING zhigui, XU Lizhong, ZHOU Jinling. The combination method of conflict evidence based on modified model[J]. *Journal of Shanghai JiaoTong University*, 2006, 40(11): 1964 – 1970.)
- [10] 张盛刚, 李巍华, 丁康. 基于证据可信度的证据合成新方法[J]. *控制理论与应用*, 2009, 26(7): 812 – 814.  
(ZHANG Shenggang, LI Weihua, DING Kang. A novel approach to evidence combination based on the evidence credibility[J]. *Control Theory and Applications*, 2009, 26(7): 812 – 814.)

## 作者简介:

**张捍东** (1963—), 男, 教授, 博士研究生, 主要研究机器人路径规划及相关技术、工程优化技术与应用, E-mail: zhanghd0406@sina.com;

**王翠华** (1979—), 男, 硕士研究生, 从事数据融合方面的研究, E-mail: wangcuihua1451@163.com;

**强克坤** (1979—), 男, 硕士研究生, 从事数据融合方面的研究, E-mail: qiangekun111@sohu.com.