

## 调速泵结构配置协调分解优化算法及实现

张贵军, 洪 榛, 俞 立, 郭海锋

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

**摘要:** 建立多级调速泵结构配置连续非线性规划和整数非线性规划二阶段模型. 非线性整数规划子问题采用外逼近算法求解. 针对连续非线性规划主问题, 提出基于割角法的可行域协调分解优化算法, 证明割角法陷阱问题并建立判断准则排除已知的陷阱区域, 在此基础上构建系列松弛问题得到原优化问题渐进收紧的下界估计, 并最终收敛到原优化问题全局最优解. 三级调速泵结构配置实例验证了算法的有效性, 并给出与其他算法的比较结果.

**关键词:** 结构优化; 协调分解; 割角法; 外逼近法; 泵

**中图分类号:** TP391      **文献标识码:** A

## Harmonious decomposition algorithm and its application in global optimization of pump configurations

ZHANG Gui-jun, HONG Zhen, YU Li, GUO Hai-feng

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310023, China)

**Abstract:** A two-stage model, which consists of nonlinear continuous programming and nonlinear integer programming sub-problems, is proposed for solving the multi-level pumps configuration problem. The integer nonlinear programming subproblem is solved by using a traditional outer approximation algorithm; the continuous nonlinear programming main-problem is optimized using a novel harmonious decomposition algorithm based on the cutting angle method (CAM). Some properties of cutting angle method (CAM) are studied and the ill-posed trap limitation is found and proved theoretically. In view of the deficiencies of CAM, we propose a harmonious decomposition algorithm using judgement criterions to exclude the known trap regions in feasible domain; and then, compute the gradually tightening lower bounds on the main optimization problem by building a sequence of piecewise linear relaxation problems. The sequence of solutions to these relaxation problems converges to the global minimum of the optimization problem. Experiment results from a 3-level pump configuration instance show that the proposed method provides better performances than the other optimization methods listed in paper.

**Key words:** configuration optimization; harmonious decomposition; cutting angle method; outer approximation algorithm; pump

### 1 引言(Introduction)

合理配置调速泵使其费用最小在生产中有重要意义. 针对该类问题, T. Westerlund等提出一种基于调速泵的混合整数非线性规划(MINLP)多级泵配置模型<sup>[1]</sup>. 基于分解原理, F. Pettersson等<sup>[2]</sup>提出0-1分离规划算法(BSP), 将模型分解为二级优化问题: 混合整数线性规划(MILP)主问题和整数非线性(INLP)规划子问题, MILP主问题包含离散的流量变量, 每一个离散点通过求解对应一级泵配置INLP子问题来得到, 由于算法将连续变量离散为一定精度的整数变量, 只能得到问题的次最优解; 此外随着问题规模的增大及离散精度的提高, 计算复杂性急剧增加

也限制了其在高维问题中的应用. 应用扩展割平面法(ECP)<sup>[3]</sup>、外逼近法(OA)<sup>[4]</sup>等传统MINLP算法对该问题进行求解, 则不能保证其解的全局最优性. 另外, 一些随机全局优化算法, 如遗传算法<sup>[5]</sup>也应用于多级泵模型的求解, 但是随着问题规模的增大这些算法极容易陷入某个局优解; 同时由于随机算法缺乏全局收敛理论依据及解的不确定性, 进一步限制了它们在实际问题中的应用.

抽象凸(abstract convexity)<sup>[6]</sup>理论的发展为全局优化提供了有力的理论依据, 作为抽象凸理论的应用, 1999年A. Rubinov提出的割角法(CAM)在确定性非凸连续优化领域受到越来越多的关注<sup>[7~11]</sup>. 对于

非凸优化问题, CAM算法通过求解一系列松弛问题得到原优化问题不断收紧的下界, 并逐渐收敛至原优化问题的全局最优解. 近年来, CAM算法已成功应用于分子构像预测及蛋白质构像分析等难解问题<sup>[12]</sup>, 但是随着问题规模的增大, 急剧增长的空间复杂度和时间复杂度成为CAM的算法的瓶颈.

论文针对多级调速泵结构配置问题建立两阶段优化模型, 包括单位单纯形约束连续规划(CNLP)主问题和整数非线性规划(INLP)子问题: 主问题采用基于CAM的协调分解优化算法求解, INLP子问题采用传统的OA算法求解. 通过从理论上分析CAM算法的下界估计的几何特性, 协调分解算法采用判断准则排除探知陷阱区域, 有效减少算法的计算时间和内存消耗, 显著改善了算法的时间复杂性和空间复杂性.

## 2 两阶段优化模型 (Two-stage optimization model)

调速泵结构配置优化目标是在考虑泵的投资费用和运行费用前提下, 通过调节调速泵的转速寻求总费用最低的泵并行/串行结构并保证满足指定的压力和流量要求. 假定有 $M$ 种调速泵, 同一种调速泵具有相同的运行参数(即具有相同的转速、流量和压降). 在上述假定的前提下可将调速泵配置问题抽象成如图1所示的 $M$ 级超结构模型. 每一级泵配置结构均为相同型号的调速泵,  $M$ 级泵配置结构对应 $M$ 种不同类的调速泵, 每一级包含 $N_{P_i}$ 条并联泵线, 每条并联泵线都包含了 $N_{S_i}$ 台相同类型的调速泵, 这样每一级的压降就等于总压降,  $M$ 级流量之和就等于指定的总流量.

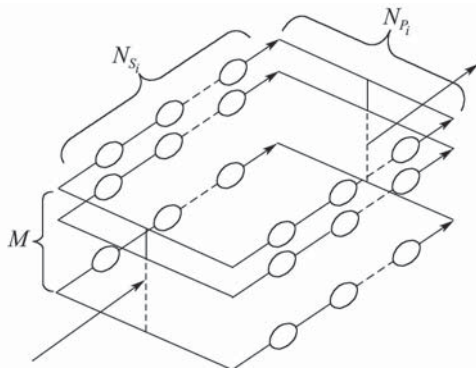


图1  $M$ 级泵配置模型

Fig. 1  $M$  level pump configuration model

数学描述如下<sup>[1]</sup>:

$$\begin{aligned} \min f &= \sum_{i=1}^M (C_i + C'_i P_i) N_{P_i} N_{S_i}, & (1) \\ P_i &= f_{1,i}(\dot{V}_i, \omega_i, \rho_i), \\ \Delta p_i &= f_{2,i}(\dot{V}_i, \omega_i, \rho_i), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_i - \omega_{\max,i} &\leq 0, \quad \dot{V}_i = x_i \dot{V}_T / N_{P_i}, \\ \Delta p_i &= \Delta p_T / N_{S_i}, \quad \sum_{i=1}^M x_i = 1. \end{aligned}$$

式中:  $M$ 为结构配置级数;  $N_{P_i}$ 为第 $i$ 级结构并联泵条数,  $N_{S_i}$ 为第 $i$ 级配置结构串联泵台数;  $C_i$ 为第 $i$ 种调速泵的投资费用;  $C'_i$ 为电价;  $P_i$ 为第 $i$ 种调速泵的单台能耗;  $\dot{V}_i$ 为第 $i$ 级调速泵单台流量;  $\omega_i$ 为第 $i$ 级调速泵转速;  $\omega_{\max,i}$ 为第 $i$ 级调速泵最大转速;  $x_i$ 为第 $i$ 级流量比例;  $\Delta p_i$ 为第 $i$ 级单台调速泵压降;  $\rho_i$ 为流体密度;  $\dot{V}_T$ 为指定的总流量;  $\Delta p_T$ 为指定的总压降;  $f_{1,i}(\cdot)$ 和 $f_{2,i}(\cdot)$ 是关于第 $i$ 种泵流量 $\dot{V}_i$ 、转速 $\omega_i$ 及流体密度 $\rho_i$ 的功率和压降隐式函数.

调速泵厂商提供额定转速 $\omega_{m,i}$ 、额定流量 $\dot{V}_{m,i}$ 和指定流体 $\rho_{m,i}$ 条件下的额定压降函数和额定功率函数. 第 $i$ 种调速泵的额定功率函数 $P_{m,i}$ 和额定压降函数 $\Delta p_{m,i}$ 可分别表示为

$$P_{m,i} = \bar{g}_{1,i}(\dot{V}_{m,i}, \omega_{m,i}, \rho_{m,i}), \quad (2)$$

$$\Delta p_{m,i} = \bar{g}_{2,i}(\dot{V}_{m,i}, \omega_{m,i}, \rho_{m,i}). \quad (3)$$

其中:  $\bar{g}_{1,i}(\cdot)$ 和 $\bar{g}_{2,i}(\cdot)$ 是关于第 $i$ 种调速泵额定流量 $\dot{V}_{m,i}$ 、额定转速 $\omega_{m,i}$ 及流体密度 $\rho_{m,i}$ 的额定功率和额定压降隐式函数. 利用 Coulson-Richardson 定律<sup>[13]</sup>, 可以得到下列关系:

$$\dot{V}_i = \omega_i \dot{V}_{m,i} / \omega_{m,i}, \quad (4)$$

$$\Delta p_i = (\omega_i / \omega_{m,i})^2 (\rho_i / \rho_{m,i}) \Delta p_{m,i}, \quad (5)$$

$$P_i = (\omega_i / \omega_{m,i})^3 (\rho_i / \rho_{m,i}) P_{m,i}. \quad (6)$$

在给定额定转速 $\omega_{m,i}$ 及流体为水( $\rho_i = \rho_{m,i}$ )时, 将式(4)~(6)代入式(2)(3), 则 $P_{m,i}$ 和 $\Delta p_{m,i}$ 可分别表示为

$$P_{m,i} = g_{1,i}(\dot{V}_i, \omega_i), \quad (7)$$

$$\Delta p_{m,i} = g_{2,i}(\dot{V}_i, \omega_i). \quad (8)$$

$g_{1,i}(\cdot)$ 和 $g_{2,i}(\cdot)$ 是关于第 $i$ 种泵流量 $\dot{V}_i$ 、转速 $\omega_i$ 的额定功率和额定压降隐式函数. 根据式(5)~(8), 则 $P_i$ 和 $\Delta p_i$ 可分别表示为

$$P_i = (\omega_i / \omega_{m,i})^3 g_{1,i}(\dot{V}_i, \omega_i), \quad (9)$$

$$\Delta p_i = (\omega_i / \omega_{m,i})^2 g_{2,i}(\dot{V}_i, \omega_i). \quad (10)$$

调速泵配置模型(1)中包含连续变量 $x_i$ , 整数变量 $N_{P_i}$ ,  $N_{S_i}$ ,  $\omega_i$ , 属于非凸MINLP规划问题. 根据分离原理, 建立如下单位单纯形约束连续规划(CNLP)主问题、整数非线性规划(INLP)子问题二级优化模型, 分别用式(11)(12)表示:

$$\min f(x) = \sum_{i=1}^M f_i(x_i), \quad x \in S, \quad (11)$$

$$\min f_i(x_i) = (C_i + C'_i P_i) N_{P_i} N_{S_i}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} P_i &= (\omega_i/\omega_{m,i})^3 g_{1,i}(\dot{V}_i, \omega_i), \\ \Delta p_i &= (\omega_i/\omega_{m,i})^2 g_{2,i}(\dot{V}_i, \omega_i), \\ \omega_i - \omega_{\max,i} &\leq 0, \\ \dot{V}_i &= x_i \dot{V}_T / N_{P_i}, \\ \Delta p_i &= \Delta p_T / N_{S_i}. \end{aligned}$$

其中:  $x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, M; S = \{x | \sum_{i=1}^M x_i = 1\}$ .

INLP是凸规划子问题, 应用传统整数规划算法容易得到问题最优解<sup>[2]</sup>. 关键是如何求解CNLP主问题, 如果将连续变量 $x_i$ 离散化为一定精度的整数变量, 只能得到原问题的次最优解; 另外, 随着问题规模增大和离散精度的提高, 计算量呈指数增长的趋势. 因此本文中CNLP主问题采用基于CAM的协调分解算法求解, INLP子问题采用传统的OA算法<sup>[4]</sup>求解(GAMS/DICOPT++软件包, 其中minlp = dicopt, nlp = minos5, mi = xa).

### 3 协调分解优化算法(Harmonious decomposition method)

#### 3.1 理论分析(Theory analysis)

**引理 1** 假设 $g(x)$  为单位单纯形 $S$ 上的有界函数, 则 $g(x)$ 是正齐次递增(IPH)函数, 当且仅当

$$g(x) = \max_{x \in S} \left\{ \min_{i \in I(l)} \frac{x_i}{l_i} \right\}. \quad (13)$$

如果 $g(x^0) > 0, x^0 \in S, x \in S$ , 则满足如下关系:

$$\min_{i \in I(l)} \frac{x_i}{l_i^0} \leq g(x), \quad (14)$$

$$\min_{i \in I(l)} \frac{x_i^0}{l_i^0} = g(x^0). \quad (15)$$

其中:  $I(l) = \{1, 2, \dots, M\}, l_i = x_i/g(x_i), l_i^0 = x_i^0/g(x_i^0)$ .

**定理 1** 假定CNLP主问题式(11)满足

$$|f(x^1) - f(x^2)| \leq \bar{L} \sum_{i=1}^M |x_i^1 - x_i^2|. \quad (16)$$

其中:  $\bar{L}$ 为Lipschitz常数, 任意两个采样点 $x^1, x^2 \in S$ , 则存在足够大的正数 $\bar{M} > 0$ 使得 $g(x) = f(x) + \bar{M}$ 为IPH函数.

**证** 由式(11)可知,  $\min_{x \in S} f(x) \geq C > 0, C$ 为常数, 则 $\min_{x \in S} g(x) \geq C + \bar{M} > 0$ . 选择 $\bar{M} \geq 2\bar{L} - C$ , 由文献[14]可知

$$g(x) = \left( \sum_{i=1}^M x_i \right) f(x / \sum_{i=1}^M x_i) + \bar{M} \quad (17)$$

为IPH函数. 由于 $x \in S$ , 即  $\sum_{i=1,2,\dots,M} x_i = 1$ , 可得 $g(x) = f(x) + \bar{M}$ 为IPH函数. **证毕.**

给定 $K$ 个支撑点 $(x^k, g(x^k)), x^k \in S$ , 第 $k$ 个支撑

向量 $l^k$ 和第 $k$ 个支撑函数 $h^k(x)$ 及 $H^K(x)$ 定义如下:

$$h^k(x) \equiv \min_{i \in 1, \dots, M} \frac{x_i}{l_i^k}, \quad (18)$$

$$H^K(x) \equiv \max_{i \in 1, \dots, K} h^k(x). \quad (19)$$

其中

$$l_i^k = x_i^k / g(x^k), k = 1, 2, \dots, K.$$

由引理1式(14)(15)可知

$$h^k(x) \leq g(x^k), h^k(x^k) = g(x^k). \quad (20)$$

由引理1式(13)可知

$$H^K(x) \leq g(x), \lim_{K \rightarrow \infty} H^K(x) = g(x). \quad (21)$$

$H^K(x)$ 提供 $g(x)$ 函数的下界估计,  $g(x)$ 和目标函数 $f(x)$ 仅相差常数项, 在数学上是等价的. 从式(21)可看出, 随着 $K \rightarrow \infty$ 下界估计 $H^K(x)$ 逼近原函数 $g(x)$ , 这样通过选择采样点 $\min_{x \in S} H^K(x)$ 构建 $H^K(x)$ 可得到 $g(x)$ 不断收紧的下界, 理论上得到 $g(x)$ 的精确全局最优解. 下界估计函数 $H^K(x)$ 形成极不规则的超平面图形, 为了能精确逼近原优化问题需要大量的采样点. 单变量优化情况下典型求解算法有Pijavski-Shubert方法<sup>[15]</sup>; 在多变量优化情况下属于非常难解的超锥覆盖问题, 远超出了现代计算机的处理能力. CNLP主问题协调分解算法主要解决两方面的问题: 1) 如何求解松弛问题 $\min_{x \in S} H^K(x)$ ; 2) 如何选择采样点 $x^k$ .

针对问题1), 近年来Bagirov, Rubinov及Beliakov等学者的研究表明通过组合优化技巧可实现对 $H^K(x)$ 所有局优解的快速枚举<sup>[8~11]</sup>, 从而确定其全局最优解. 考虑支撑向量矩阵 $L = \{l^{k_1}, l^{k_2}, \dots, l^{k_M}\}$ , 即设

$$L = \begin{pmatrix} l_1^{k_1} & l_2^{k_1} & \dots & l_M^{k_1} \\ l_1^{k_2} & l_2^{k_2} & \dots & l_M^{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1^{k_M} & l_2^{k_M} & \dots & l_M^{k_M} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

$H^K(x)$ 所有的局优解对应于满足以下两个条件的所有矩阵 $L$ 集合:

- I)  $\forall i, j \in \{k_1, k_2, \dots, k_M\}, i \neq j: l_i^{k_i} > l_i^{k_j}$ ,
- II)  $\forall \nu \in \{l^1, l^2, \dots, l^K\}$ 且 $\nu \notin \{l^{k_1}, l^{k_2}, \dots, l^{k_M}\}$ , 则 $\exists i \in \{k_1, k_2, \dots, k_M\}$ 使得 $l_i^{k_i} \leq \nu_i$ .

对应矩阵 $L$ 的局优解和局优值分别为

$$x_{\min}(L) = \text{diag}\{L\} / \text{tr } L, \quad (23)$$

$$d(L) = H^K(x_{\min}(L)) = 1 / \text{tr } L. \quad (24)$$

满足条件I)II) 矩阵 $L^n$  对应于每一个子区域 $\mathbb{R}^n$

( $n = 1, 2, \dots, N$ ), 其中 $N$ 为下界估计曲面 $H^K(x)$ 的局优解数量. 形成 $N$ 个子区域 $\mathbb{R}^n$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ )满足 $\bigcup_{n=1}^N \mathbb{R}^n = S, \bigcap_{n=1}^N \mathbb{R}^n = \phi$ ; 此外, 在每一个子区域 $\mathbb{R}^n$ 上 $H^K(x)$ 存在唯一的局部最优解 $x_{\min}(L^n)$ .

**3.2 陷阱问题(Trap problem)**

CAM 求解  $\min_{x \in S} H^K(x)$  具体步骤参见文献[10], 篇幅所限, 在此不再列出. 假定 CAM 选择采样点  $x_{\text{sample}} = \arg \min_{x \in S} H^K(x)$ , 给出以下定理.

**定理 2** 设CAM算法中 $M$ 维优化问题 $g(x)$ 根节点 $L^1$ 表示为

$$L^1 = \begin{pmatrix} l_1^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_2^{k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_M^{k_M} \end{pmatrix},$$

其中:  $l_i^{k_i} = x_i^{k_i} / g(x^{k_i}) > 0; x_i^{k_i} = 1, i = k_i; x_i^{k_i} = 0, i \neq k_i; g(x^{k_i})$ 为第 $k_i$ 个采样点 $x^{k_i}$ 处的目标函数值;  $i = 1, 2, \dots, M$ , 设

$$\bar{d} \equiv \left(\sum_{i=2}^M l_i^{k_i}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=2}^M g(x^{k_i})^{-1}\right)^{-1}, \quad (25)$$

$$\bar{x} \equiv (0, g(x^{k_2})^{-1}\bar{d}, \dots, g(x^{k_M})^{-1}\bar{d}). \quad (26)$$

如 $\bar{d} < g(\bar{x})$ , 则

$$\min_{K=M+1, \dots, +\infty} H^K(x) = \bar{d}, x \in S. \quad (27)$$

**证** 由式(23)(24)得出对应 $L^1$ 局优解 $d(L^1)$ 和局优值 $x_{\min}(L^1)$ , 分别表示为

$$d(L^1) = \left(\sum_{i=1}^M l_i^{k_i}\right)^{-1},$$

$$x_{\min}(L^1) = (l_1^{k_1} d(L^1), l_2^{k_2} d(L^1), \dots, l_M^{k_M} d(L^1)).$$

从而下一个支撑向量 $l^{k_{M+1}}$ 表示为

$$l^{k_{M+1}} = \frac{d(L^1)}{g(x_{\min}(L^1))} (l_1^{k_1}, l_2^{k_2}, \dots, l_M^{k_M}).$$

支撑向量 $l^{k_{M+1}}$ 形成满足条件I)和II)节点 $L^2$ 为

$$L^2 = \begin{pmatrix} \frac{l_1^{k_1} d(L^1)}{g(x_{\min}(L^1))} & \frac{l_2^{k_2} d(L^1)}{g(x_{\min}(L^1))} & \dots & \frac{l_M^{k_M} d(L^1)}{g(x_{\min}(L^1))} \\ 0 & l_2^{k_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & l_M^{k_M} \end{pmatrix}.$$

$L^2$ 对应局优解 $d(L^2)$ 和局优值 $x_{\min}(L^2)$ 表示为

$$d(L^2) = \left(\frac{d(L^1)}{g(x_{\min}(L^1))} l_1^{k_1} + \sum_{i=2}^M l_i^{k_i}\right)^{-1},$$

$$x_{\min}(L^2) = d(L^2) \left(\frac{l_1^{k_1} d(L^1)}{g(x_{\min}(L^1))} l_1^{k_1}, l_2^{k_2}, \dots, l_M^{k_M}\right).$$

由 $d(L^1) < g(x_{\min}(L^1))$ 得出:  $d(L^1) < d(L^2) < \bar{d}$ . 不失一般性, 设 $\min_{x \in S} H^K(x) = d(L^2)$ , 按照上述过程构造 $L^3, \dots, L^K$ 子区域. 归纳得出 $K = 3, 4, \dots$ 时:

$$d(L^K) = \left(A l_1^{k_1} + \sum_{i=2}^M l_i^{k_i}\right)^{-1},$$

$$x_{\min}(L^K) = d(L^K) (A l_1^{k_1}, l_2^{k_2}, \dots, l_M^{k_M}).$$

其中

$$A = \frac{d(L^1)d(L^2)\dots d(L^{K-1})}{g(x_{\min}(L^1))g(x_{\min}(L^2))\dots g(x_{\min}(L^{K-1}))}.$$

因为  $\lim_{k \rightarrow +\infty} A = 0$ , 故

$$\lim_{K \rightarrow \infty} d(L^K) = \lim_{K \rightarrow \infty} \left(A l_1^{k_1} + \sum_{i=2}^M l_i^{k_i}\right)^{-1} = \bar{d},$$

$$\lim_{K \rightarrow \infty} x_{\min}(L^K) = \lim_{K \rightarrow \infty} \bar{d} (A l_1^{k_1}, l_2^{k_2}, \dots, l_M^{k_M}) = \bar{x},$$

即

$$\min_{K=M+1, \dots, +\infty} H^K(x) = \bar{d} < g(\bar{x}), x \in S.$$

证毕.

定理2证明如果 $g(\bar{x}) - \bar{d} > \varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1 > 0$ 定义为上下界误差系数), CAM算法则存在陷阱点 $\bar{x}$ . 导致CAM算法无法在该点得到不断收紧的下界, 从而使CAM算法失效.

**推论 1** 对于  $M$  维优化问题  $g(x)$ , 设

$$\bar{d}_j \equiv \left(\sum_{i=1, i \neq j}^M l_i^{k_i}\right)^{-1},$$

定义 $M$ 维向量 $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^M$ , 其中 $\bar{x}_i^j$  ( $i = 1, 2, \dots, M, j = 1, 2, \dots, M$ )定义为

$$\bar{x}_i^j = \begin{cases} g(x^{k_i})^{-1}\bar{d}_j, & i \neq j, \\ 0, & i = j. \end{cases} \quad (28)$$

如果

$$|g(\bar{x}^j) - \bar{d}_j| > \varepsilon_1, j \in \{1, 2, \dots, M\},$$

则 $\bar{x}_j$ 为探知陷阱点.

**证** 显然, 矩阵 $L$ 有 $M$ 种不同排列方式, 由定理2证明过程得证. 证毕.

以  $g(x) = 1$  为例, 问题维数为  $M$ . 由推论1可知 CAM算法存在 $M$ 个探知陷阱点:

$$\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \dots = \bar{d}_M = 1/(M - 1),$$

$$\bar{x}^1 = (0, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_M),$$

$$\bar{x}^2 = (\bar{d}_1, 0, \dots, \bar{d}_M),$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}^M = (\bar{d}_1, \bar{d}_2, \dots, \bar{d}_{M-1}, 0).$$



$M = 3, 5, 7, 9 (K = 100)$ 时数值计算结果如图2所示,  $\min_{x \in S} H^K(x)$ 理论陷阱点全局极小值分别为0.5, 0.25, 0.167及0.125, 与实验完全吻合. 图3给出了 $M = 3$ 时,  $K = 10000$ 时9997个采样点在单位单纯性可行域 $S$ 中的分布情况, 绝大多数采样点都陷入在 $\bar{x}^1 = (0, 0.5, 0.5)$ ,  $\bar{x}^2 = (0.5, 0, 0.5)$ 和 $\bar{x}^3 = (0.5, 0.5, 0)$ 三点附近, 下界 $\bar{d}_1 = \bar{d}_2 = \bar{d}_3 = 0.5$ , 小于上界 $g(\bar{x}^1) = g(\bar{x}^2) = g(\bar{x}^3) = 1$ .

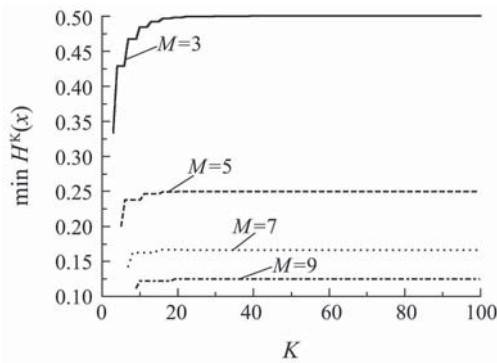


图2  $H^K(x)$ 全局极小值( $M = 3, 5, 7, 9$ )

Fig. 2 The global minimum of  $H^K(x)$  ( $M = 3, 5, 7, 9$ )

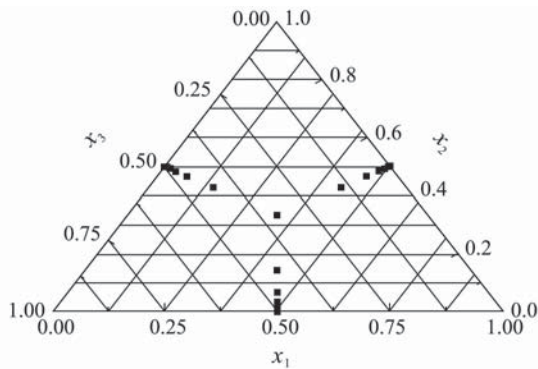


图3  $g(x) = 1$ 采样点分布( $M = 3; K = 10000$ )

Fig. 3 The sample points distribution of  $g(x) = 1$

( $M = 3; K = 10000$ )

根据定理2和推论1, 给定满足条件D)II)的支撑向量矩阵 $L = \{l^{k_1}, l^{k_2}, \dots, l^{k_M}\}$ , 建立如下陷阱判断准则III) (以过程描述):

- 1) 计算 $d(L) = (\sum_{i=1}^M l_i^{k_i})^{-1}$ .
- 2) 计算 $x_{\min}(L) = (l_1^{k_1}, l_2^{k_2}, \dots, l_M^{k_M})d(L)$ .
- 3) 设 $l_t^{k_t} = \min\{l_1^{k_1}, l_2^{k_2}, \dots, l_M^{k_M}\}$ ,  $t \in \{1, 2, \dots, M\}$ . 如 $l_t^{k_t} d(L) > \varepsilon_2$ , 则转至8), 其中 $\varepsilon_2 > 0$ 为指定坐标误差系数.
- 4) 计算 $\bar{d}_t = (\sum_{i=1, i \neq t}^M l_i^{k_i})^{-1}$ .
- 5) 定义 $\bar{x}^t$ . 其中:  $\bar{x}_i^t = g(x^{k_i})^{-1} \bar{d}_t$ ,  $i \neq t$ ;  $\bar{x}_i^t = 0$ ,  $i = t$ ;  $i = 1, 2, \dots, M$ .
- 6) 如果 $\|\bar{x}^t - x_{\min}(L)\|_2 > \varepsilon_3$ , 则转至8), 其中 $\varepsilon_3 > 0$ 为指定距离误差系数.

7) 如果 $|g(\bar{x}^t) - \bar{d}(L)| > \varepsilon_1$ , 其中 $\varepsilon_1 > 0$ 为指定上下界误差系数. 则 $L$ 是探知陷阱点, 结果输出, 结束.

8)  $L$ 不是探知陷阱点, 结果输出, 结束.

### 3.3 算法设计(Algorithm design)

协调分解算法(即改进的CAM方法)主要流程如下(以最小值优化为例).

1) 参数初始化. 设置参数 $M, K, \bar{M}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ , 计算可行域 $S$ 顶点处 $x^1, x^2, \dots, x^M$ 目标函数值 $f(x^1), f(x^2), \dots, f(x^M)$ , 计算初始支撑向量集合 $\Lambda^M = \{l^1, l^2, \dots, l^M\}$ ,  $L = \{l^1, l^2, \dots, l^M\}$ , 矩阵集合 $V^K = \{L\}$ , 探知陷阱点 $T^K = \phi$ ;

2) 生成新的支撑向量 $l^K$ .

a) 选择 $L = \min(V^K \setminus T^K)$ ;

b) 计算 $x_{\min}(L)$ ;

c) 计算 $g(x_{\min}(L)) = f(x_{\min}(L)) + \bar{M}$ ;

d)  $K = K+1$ ;

e) 计算 $l^K, l_i^K = x_{\min,i}(L)/g(x_{\min}(L))$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ .

f)  $\Lambda^K = \Lambda^{K-1} \cup l^K$ ;

3) 更新 $V^K$ .

a) 设置 $v = l^K$ ; 测试所有的 $L \in V^K$ 是否满足条件II);

b) 如果存在 $L$ 不满足条件II), 则将 $L$ 从 $V^K$ 删除相应 $L$ ; 否则转至步骤4);

c) 拷贝 $M$ 个 $L$ , 得到 $\bar{L}^i, i = 1, 2, \dots, M$ ; 用 $l^K$ 取代 $\bar{L}^i$ 的第 $i$ 个支撑向量 $l^{k_i}$ 生成 $\bar{L}^i$ ; 对每一个 $\bar{L}^i$ 判断是否满足条件I), 如不满足则删除该 $\bar{L}^i$ ;

d) 判断剩余每一个 $\bar{L}^i$ 是否满足陷阱判断准则III). 如果为探知陷阱点, 则删除对应 $\bar{L}^i$ , 更新 $T^K = T^K \cup \bar{L}^i$ ;

e) 将剩余的 $\bar{L}^i$ 添加 $V^K$ 中;

4) 终止条件.

a) 如果 $K < K_{\max}$ 或上界与下界之差大于 $\varepsilon_1$ 为时转至2);

b) 结果输出, 结束.

**注1** 1) 应保证 $\bar{M} \geq 2\bar{L} - C$ , 使CNLP主问题目标函数 $f(x) + \bar{M}$ 为IPH函数. 数值结果表明协调分解算法对 $\bar{M}$ 取值并不敏感, 由于CNLP主问题的 $\bar{L}$ 很难解析确定, 而且 $C$ 是先验未知的, 因此 $\bar{M}$ 应偏大, 案例实现中 $\bar{M} = 50000$ ; 另外如果 $\bar{M}$ 偏小, 由于采样点的上界低于下界估计, 算法能检测到这种行为并提醒用户输入一个更大的 $\bar{M}$ 值.

2) 在多变量优化的情况下, 常规CAM及改进算法在陷阱点附近搜索异常缓慢, 导致在陷阱点附近构造了大量满足条件D)II)的矩阵 $L$ 及一系列支撑向量 $l^K$ , 造成计算机内存空间和计算时间上的浪费. 协调优化算法检测已知的陷阱点, 通过协调分解算法-3)-d)排除探知陷阱区域, 降低算法计算时间和减少内存空间浪费, 显著改善了CAM算法的整体性能.

3) 3)-a)~3)-c)枚举所有满足条件I)II)的矩阵 $L$ 从而得到 $H^K(x)$ 所有的局优解,其计算复杂度为 $O(M(|V^{K-1}|))$ , $|V^{K-1}|$ 表示 $H^{K-1}(x)$ 局优解的数量.具体算法实现中通过在外存空间保存 $V^1, V^2, \dots, V^{K-2}$ 可将计算复杂度降低至 $O(\log_M(V^{K-1}))$ ;另外,采用带优先级的堆数据结构保存 $H^K(x)$ 可使2)-a)的时间复杂度达到 $O(1)$ .

4) 目标函数计算代价不大时,可对2)-c)中 $x_{\min}(L)$ 进行局部最优化处理,可减少算法中的迭代次数 $K$ ,这种局部最优化处理并不影响待解问题的全局最优性.

综上所述,CNLP主问题的协调分解算法本质上是一种的分枝定界算法(分枝:将可行域划分成子区间;定界:计算每一个子区间的下界;探测:排除探知陷阱区域及下界大于已知最小上界区域).算法系统地将可行域区间 $S$ 切割细分,同时不断将不包含最优解的子区间分割出去,从而得到

优化问题不断收紧的下界,并最终收敛至其全局最优解.

#### 4 案例研究(Case study)

调速泵结构优化实例级数 $M = 3$ ,总流量 $\dot{V}_T = 350 \text{ m}^3/\text{h}$ ,总压降 $\Delta p_T = 400 \text{ kPa}$ ,使用年限为10年,年利率为10%,工作时间为6000h/年,电费价格为0.3元/kWh.3种调速泵最大转速 $\omega_{\max} = 2950 \text{ r/min}$ .流体为 $20^\circ\text{C}$ 的水,额定转速 $\omega_{m,i} = 2950 \text{ r/min}$ ( $i = 1, 2, 3$ )条件下,额定功率曲线和额定压降曲线如式(29)(30)所示,3种调速泵的价格 $P$ 以及压力曲线和功率曲线参数列于表1.

$$P_{m,i} = \alpha + \beta \dot{V}_{m,i} + \gamma \dot{V}_{m,i}^2, \quad (29)$$

$$\Delta p_{m,i} = a + b \dot{V}_{m,i} + c \dot{V}_{m,i}^2. \quad (30)$$

表1 3种类型的调速泵参数数据  
Table 1 Parameters for the 3 pumps

级数	参数						
	$a$	$b$	$c$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$P$
1	629.0	0.696	-0.01160	19.9	0.1610	-0.000561	38900
2	215.0	2.950	-0.11500	1.21	0.0644	-0.000564	15300
3	361.0	0.530	-0.00946	6.52	0.1020	-0.000232	20700

将式(4)带入式(29)(30),可得到

$$g_{1,i}(\dot{V}_i, \omega_i) = \alpha + \beta_1 \left(\frac{\dot{V}_i}{\omega_i}\right) + \gamma_1 \left(\frac{\dot{V}_i}{\omega_i}\right)^2, \quad (31)$$

$$g_{2,i}(\dot{V}_i, \omega_i) = a + b_1 \left(\frac{\dot{V}_i}{\omega_i}\right) + c_1 \left(\frac{\dot{V}_i}{\omega_i}\right)^2. \quad (32)$$

式中: $\beta_1 = \beta \cdot \omega_{m,i}$ , $\gamma_1 = \gamma \cdot \omega_{m,i}^2$ , $b_1 = b \cdot \omega_{m,i}$ , $c_1 = c \cdot \omega_{m,i}^2$ , $i = 1, 2, 3$ .

将式(31)(32)代入式(12)可得到 $f_1(x_1)$ , $f_2(x_2)$ , $f_3(x_3)$ 3个INLP子问题,将变量 $x_1, x_2$ 离散化为100个等距的点(即离散精度为0.01),通过计算5050个一级最优配置子问题可绘制出目标函数 $f(x_1, x_2)$ (将 $x_3 = 1 - x_1 - x_2$ 带入 $f(x_1, x_2, x_3)$ 得到)关于变量 $x_1$ 和 $x_2$ 的三级泵配置费用图形,如图4所示.

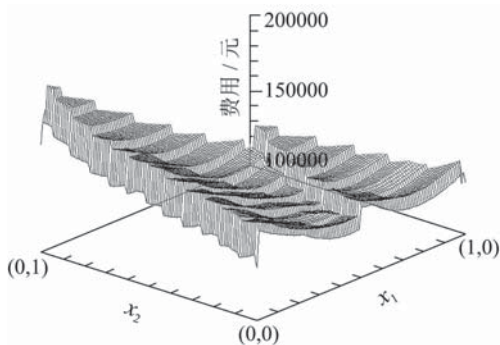


图4 三级泵配置问题目标函数

Fig. 4 Objective function for the three levels pump optimization problem

图中交界点代表单级泵配置费用,边界线代表二级泵配置费用.三级泵配置问题在其定义域上存在37个局部最优解.

协调分解算法(改进CAM算法)参数设置: $M = 3$ , $\bar{M} = 50000$ , $K_{\max} = 30000$ , $\varepsilon_1 = 10$ , $\varepsilon_2 = 0.01$ , $\varepsilon_3 = 0.01$ .算法终止( $K = K_{\max}$ )时三级调速泵结构配置实例生成如图5所示的上界和下界平面,从图5可以直观看出构造下界平面逼近上界平面.

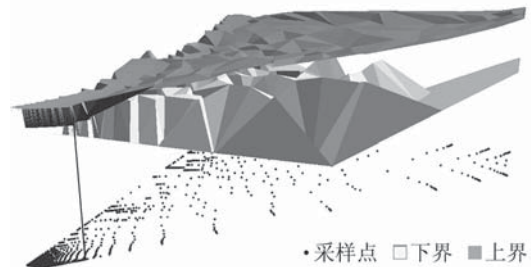


图5 三级泵配置目标函数上界和下界逼近平面( $K = 30000$ )

Fig. 5 The 3D scene of upperbound and underestimate surface ( $K = 30000$ )

图6给出目标函数上界和下界收敛曲线,同时在表2列出部分数据,其中 $L$ 表示采样点所生成的子区域(即矩阵)数.需要注意的是 $K = 10000$ 和 $K = 15000$ 都具有相同的 $x_1, x_2, x_3$ ,导致不同的上下界是由于数据精度所造成的(实现采用Double类型数据,表2中只给出4位精度);算法运行到 $K =$

10000 时, 误差为 0.00023, 费用为 128 888 元, 经过 20000 次迭代费用仅减少 7 元, 算法在最优值附近搜索速度异常缓慢. 也进一步说明了协调分解算法采用判断陷阱点机制将极大改善算法的收敛速度和降低内存消耗. 图 7 给出了算法终止时, 三级泵配置模型目标函数  $f(x)$  采样点分布情况.

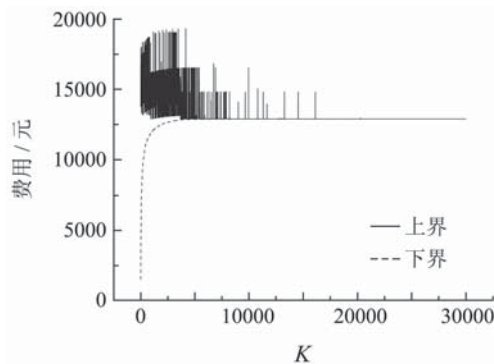


图 6 三级泵配置目标函数上界和下界收敛曲线  
Fig. 6 The convergence profiles of upperbound and underestimate for 3-level pump configuration problem

表 2 三级调速泵结构配置实例求解结果  
Table 2 The run results of three-level pump configuration case

K	参 数			
	L	上界/元	下界/元	误差/%
3	1	47 404	15 086	68.18
100	166	155 415	82 420	46.97
1000	1783	147 471	119 413	19.03
5000	8513	165 262	128 658	22.15
10000	15891	128 888	128 859	0.023
15000	24328	128 886	128 869	0.013
20000	34205	128 882	128 872	0.008
30000	53918	128 881	128 875	0.005

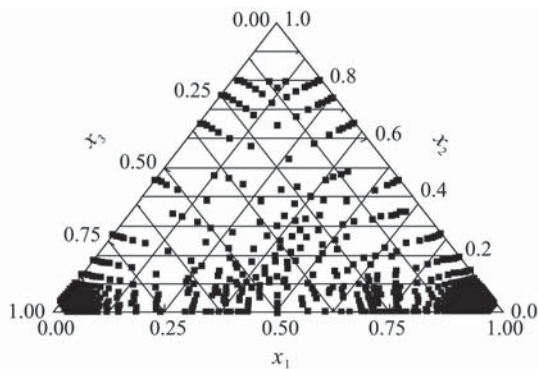


图 7 三级泵配置模型目标函数  $f(x)$  采样点分布  
( $M = 3; K = 30000$ )

Fig. 7 The sample points distribution of object function  $f(x)$   
( $M = 3; K = 30000$ )

作者在文献 [5] 应用 GAMS/DICOPT++ (基于 OA 算法, 其中 minlp = dicopt, nlp = minos5, mip = xa) 软件求解三级泵最优配置问题的迭代过程得到最好的解为 134471.56050; 应用 ECGA 算法求解三级泵配置问题 80% 陷入局部最优解. 表 3 给出了协调分解优化算法 (HDM) 与扩展割平面算法 (ECP)、Min-Min 算法 (MM)、外逼近算法 (OA)、扩展拥挤遗传算法 (ECGA) 的比较结果.

表 3 求解结果比较

Table 3 Comparison of algorithms

配置	方 法				
	ECP	MM	OA	ECGA	HDM
$N_{P1}$	1	2	—	2	2
$N_{S1}$	1	1	—	1	1
$\omega_1$	2836	2694	—	2856	2855
$x_1$	0.449	0.769	—	0.915	0.9143
$N_{P2}$	—	—	—	1	1
$N_{S2}$	—	—	—	2	2
$\omega_2$	—	—	—	2944	2950
$x_2$	—	—	—	0.085	0.0857
$N_{P3}$	2	1	3	—	—
$N_{S3}$	2	2	2	—	—
$\omega_3$	2434	2344	2574	—	—
$x_3$	0.551	0.231	1	—	—
费用/元	131 514	131 760	134 471	128 905	128 881

## 5 结论 (Conclusion)

针对多级调速泵结构配置问题建立两阶段优化模型, 包括单位单纯形约束域连续规划 (CNLP) 主问题和整数非线性规划 (INLP) 子问题: 主问题采用基于 CAM 的协调分解优化算法求解, INLP 子问题采用 OA 算法求解. 通过分析 CAM 的下界估计的几何特性, 协调分解算法采用判断准则排除探知陷阱区域, 有效减少算法的计算时间和内存消耗, 显著改善了算法的时间复杂度和空间复杂度性能指标. 该算法为求解多级调速泵结构配置模型及其他非凸连续优化问题提供了一种有效的手段.

## 参考文献 (References):

- [1] WESTERLUND T, PETERSSON F, GROSSMANN I E. Optimization of pump configurations as a MINLP problem[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1994, 18(9): 845 - 858.
- [2] PETERSSON F, WESTERLUND T. Global optimization of pump configurations using binary separable programming[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1997, 21(5): 521 - 529.
- [3] PETERSSON F, WESTERLUND T. An extended cutting plane method for solving convex MINLP problems[J]. *Computers and Chemical Engineering*, 1995, 19(S): 131 - 136.

- [4] DURAN M A, GROSSMANN I E. An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs[J]. *Mathematical Programming*, 1986, 36(3): 307 – 339.
- [5] ZHANG G J, WU T H, YE R. Global optimization of pump configuration problem using extended crowding genetic algorithm[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2004, 17(2): 247 – 252.
- [6] RUBINOV A M. *Abstract Convexity and Global Optimization, Non-convex Optimization and Its Applications*[M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 2000.
- [7] ANDRAMONOV M, RUBINOV A, GLOVER B. Cutting angle methods in global optimization[J]. *Applied Mathematical Letters*, 1999, 12(3): 95 – 100.
- [8] BAGIROV A M, RUBINOV A M. Global minimization of increasing positively homogeneous functions over the unit simplex[J]. *Annals of Operations Research*, 2000, 98(1/4): 171 – 187.
- [9] BATTEN L M, BELIAKOV G. Fast algorithm for the cutting angle method of global optimization[J]. *Journal of Global Optimization*, 2002, 24(2): 149 – 161.
- [10] BELIAKOV G. Geometry and combinatorics of the cutting angle method, Optimization[J]. *Optimization*, 2003, 52(4): 379 – 394.
- [11] BELIAKOV G. Cutting angle method—a tool for constrained global optimization[J]. *Optimization Methods and Software*, 2004, 19(2): 137 – 151.
- [12] BELIAKOV G, LIM K F. Challenges of continuous global optimization in molecular structure prediction[J]. *European Journal of Operational Research*, 2007, 181(3): 1198 – 1213.
- [13] COULSON J M, RICHARDSON J F. *Chemical Engineering*[M]. Oxford, England: Pergamon, 1985.
- [14] RUBINOV A M, ANDRAMONOV M Y. Minimizing increasing star-shaped functions based on abstract convexity[J]. *Journal of Global Optimization*, 1999, 15(1): 19 – 39.
- [15] HANSEN P, JAUMARD B. *Handbook of Global Optimization*[M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer, 2000.

### 作者简介:

**张贵军** (1974—), 男, 副教授, 硕士生导师, 目前研究方向为智能信息处理、优化调度等, E-mail: zgj@zjut.edu.cn;

**洪榛** (1983—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为优化、无线传感网络等, E-mail: hongzhen614@126.com;

**俞立** (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为网络控制系统、无线传感网络等, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

**郭海锋** (1977—), 男, 讲师, 目前研究方向为智能交通系统等, E-mail: guohf@zjut.edu.cn.

## 下 期 要 目

- 加权观测融合非线性无迹卡尔曼滤波算法 ..... 郝 钢, 叶秀芬, 陈 亭
- 多星系统相对轨道的自适应协同控制 ..... 马广富, 梅 杰
- 双回路复杂波网络的镇定 ..... 王 雷, 许跟起
- 采用鲁棒容许集对有约束的不确定系统作鲁棒模型预测控制 ..... 秦伟伟, 马建军, 郑志强, 刘 刚
- 应用必需信标的Petri网死锁预防策略 ..... 李绍勇, 王安荣
- 利用不确定度的冲突证据组合 ..... 韩德强, 邓 勇, 韩崇昭, 杨 艺, 蒋 雯, 侯志强
- 支持向量机的进化多核设计 ..... 李仁兵, 李艾华, 白向峰, 蔡艳平, 王德生
- 热轧带钢自动厚度控制鲁棒预测模型与控制策略 ..... 杨斌虎, 杨卫东, 曲 蕾
- 新型小脑模型关联控制器复合控制在电动加载系统中的结构及算法 ..... 杨 波, 王 哲
- 基于模糊干扰观测器的自适应二阶动态滑模控制 ..... 蒲 明, 吴庆宪, 姜长生, 程 路
- 矩阵变换器交流励磁系统的非线性最优控制 ..... 李 辉, 阳春华, 邓文浪
- 信息传输对网络采样控制系统输入/输出的影响 ..... 邓 亮, 陈抱雪, 隋国荣, 张建彬, 王关德