

## 基于模糊干扰观测器的自适应二阶动态滑模控制

蒲 明, 吴庆宪, 姜长生, 程 路

(南京航空航天大学 自动化学院 模式识别与智能控制实验室, 江苏 南京 210016)

**摘要:** 针对一类存在不确定性和外干扰的非线性系统滑模控制的抖振问题, 本文首先证明了以高斯函数为隶属度函数的模糊基向量对状态向量的偏导在任意情况下有界, 解决了模糊辨识同二阶动态滑模结合的关键问题. 然后设计了二阶动态Terminal滑模, 有效克服了滑模抖振, 且能保证滑模面上的滑动在有限时间内收敛. 再基于模糊干扰观测器的输出设计自适应鲁棒补偿项. 基于李雅普诺夫理论证明了系统稳定性. 最后将本文提出的控制方案用于近空间飞行器姿态角跟踪仿真, 并分析了高阶动态滑模收敛时间增加的问题. 结果表明本文提出的控制方案跟踪速度快、精度高, 且有效去除了抖振. 与常规Terminal滑模相比, 二阶动态Terminal滑模增加的收敛时间非常有限, 适于工程应用.

**关键词:** 近空间飞行器; 滑模; 克服抖振; 模糊干扰观测器; 自适应

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Adaptive second-order dynamic sliding-mode control based on fuzzy disturbance-observer

PU Ming, WU Qing-xian, JIANG Chang-sheng, CHENG Lu

(Lab of Pattern Recognition and Intelligent Control, College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing Jiangsu 210016, China)

**Abstract:** In the sliding-mode control of nonlinear systems with uncertainties and disturbances, we prove that the partial derivative of the Gaussian fuzzy basic function vector with respect to the state vector is bounded under any condition, thus resolving the key problem in combining a second-order dynamic sliding-mode control with the fuzzy identification. In addition, we design a second-order dynamic terminal-sliding-mode control which converges in a finite period of time without chattering. The output of the fuzzy disturbance-observer is employed as the compensation signal for the adaptive robust control. The stability of the system is proved by using Lyapunov theorem. The proposed control scheme is applied to the attitude-angles tracking of a near space vehicle; the increment of the convergence time in this application of higher-order sliding-mode control has been analyzed. Results show that this control scheme effectively suppresses the chattering and is with strong robustness, fast tracking speed, and high precision. Compared with the conventional terminal-sliding-mode control, the second-order dynamic terminal-sliding-mode control causes limited increment of the convergence time, demonstrating the efficacy of this control scheme in engineering application.

**Key words:** near space vehicle; sliding-mode; suppress chattering; fuzzy disturbance-observer; adaptive

### 1 引言(Introduction)

滑模设计简单、概念清晰, 是一种有效的非线性控制方法. 但滑模的抖振问题是制约滑模应用的一大障碍. 现有的消除抖振的方法中, 饱和函数降低了控制效果; Terminal滑模理论上不存在抖振<sup>[1]</sup>, 但是由于Terminal滑模自身不含不连续项而具有的特性, 对于自适应项等辅助控制项中的不连续函数造成的滑模抖振则无法解决<sup>[2,3]</sup>.

高阶动态滑模<sup>[4~6]</sup>将所有不连续项放在控制器的导数项之中. 经过积分将不连续项变为连续项, 能

很好地消除抖振<sup>[7,8]</sup>. 文献[9,10]分别将二阶动态滑模应用于飞机俯仰角控制和机械臂跟踪控制. 但均未考虑不确定性和外扰动对系统的影响; 文献[7]针对一类具有干扰的多变量系统, 首先设计辅助控制系统, 等效地略去不确定项, 再设计二阶动态滑模控制器. 该方法对于快时变高度非线性系统在强烈外扰动作用下的情况, 仍然不能很好地解决问题.

自然地, 可以考虑采用观测器对不确定性和干扰进行逼近, 形成反馈, 能有效地抵消不确定性和干扰的影响, 极大增强系统的鲁棒性. 模糊干扰观测器

(fuzzy disturbance observer, FDO)早已被证明能够任意精度逼近对象<sup>[11]</sup>. 但动态滑模设计中存在控制项的导数, 因此也会出现FDO输出的导数. 这对二者的结合造成了很大的困难. 正是因为这样的困难, 目前仍未有文章将模糊辨识应用于高阶动态滑模控制. 本文将解决这个问题.

## 2 模糊干扰观测器(Fuzzy disturbance observer)

### 2.1 模糊干扰观测器的设计(Design of FDO)

考虑一类含有不确定性和扰动的非线性仿射系统

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}(t), \quad (1)$$

其中:  $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$  为系统状态;  $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$  为控制器输入向量;  $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  分别为已知光滑非线性函数向量和矩阵, 且满足局部Lipschitz条件;  $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$  一阶导数存在且可逆;  $\Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为系统未知不确定项;  $\boldsymbol{d}(t) \in \mathbb{R}^n$  为未知外界扰动.

**注1** 本文假设 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 是方阵. 若 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ 不是方阵, 则考虑用伪逆方法设计控制器.

将式(1)改写为

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{x}), \quad (2)$$

其中 $\boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{x}) = \Delta\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \Delta\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}(t)$ 为复合干扰项, 包含了系统所有未知不确定性和干扰.

**假设1** 式(2)中复合干扰 $\boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{x})$ 有界, 且其变化率 $\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t, \boldsymbol{x})$ 有界, 但界均未知.

**假设2** 系统(1)中状态变化率 $\dot{\boldsymbol{x}}$ 有界, 且未知.

设计FDO逼近该复合干扰 $\boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{x})$ <sup>[12]</sup>, 为此考虑以下动态系统:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) &= -\sigma\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \sigma\boldsymbol{x} + \\ &\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u} + \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}}), \end{aligned} \quad (3)$$

其中:

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) \quad (4)$$

为FDO输出;  $\sigma > 0$  为设计参数;  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{r \times n}$  为可调参数向量;  $r$  为模糊规则数;  $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^r$  为模糊基函数向量, 其隶属度函数取为如下高斯函数:

$$\begin{aligned} \xi_i(\boldsymbol{x}) &= \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}^i(x_j)}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}^i(x_j)} = \\ &\frac{\prod_{j=1}^n \exp(-(x_j - c_j^i)^2 / (b_j^i)^2)}{\sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^n \exp(-(x_j - c_j^i)^2 / (b_j^i)^2)}, \end{aligned} \quad (5)$$

$i = 1, \dots, r$ .  $c_j^i$  为第 $i$ 条规则下, 第 $j$ 个变量对应隶属度函数的中心,  $b_j^i$  为其宽度, 这里取 $b_j^i = b_w, \forall i, j$ ,  $b_w$  为某一正数.

设 $\boldsymbol{\theta}^*$ 为最优参数向量, 其定义为

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta} \in M_\theta} \left| \sup_{\boldsymbol{x} \in M_x} \|\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{x}) - \hat{\boldsymbol{\Psi}}(\boldsymbol{x}|\hat{\boldsymbol{\theta}})\| \right|,$$

其中 $M_\theta, M_x$ 分别为 $\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{x}$ 的可行域. 因此复合干扰可以表示为

$$\boldsymbol{\Psi}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\theta}^{*T} \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{x}), \quad (6)$$

$\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{x})$ 为FDO的最佳逼近下的误差向量. 现有文献已经证明了 $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{x})$ 可以任意小<sup>[11]</sup>. 设 $\|\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{x})\| \leq E_\varepsilon$ , 且 $E_\varepsilon > 0$ 未知. 事实上FDO中并不能得到 $\boldsymbol{\theta}^*$ . 因此可以采用自适应律来估计 $\boldsymbol{\theta}$ , 在线调整其值. 把 $\boldsymbol{\theta}$ 的实际估计值 $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ 同最优值 $\boldsymbol{\theta}^*$ 之差记作

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (7)$$

再令 $\boldsymbol{\zeta}(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ 为动态系统(3)的误差, 则动态误差系统为 $\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ , 代入式(6)(7)整理后有

$$\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = -\sigma\boldsymbol{\zeta}(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{x}). \quad (8)$$

考虑上式, 因为 $\boldsymbol{\varepsilon}(t, \boldsymbol{x})$ 可以任意小, 所以当 $\tilde{\boldsymbol{\theta}} \rightarrow 0$ 时, 式(8)就变为 $\dot{\boldsymbol{\zeta}}(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}}) = -\sigma\boldsymbol{\zeta}(t, \boldsymbol{x}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ . 观测误差系统指数收敛.

### 2.2 问题的提出(Presentation of questions)

控制器设计目的在于使式(1)所示系统跟踪上标称值 $\boldsymbol{x}_d$ . 令 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_d$ , 取快速Terminal滑模面

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{e} + \int_0^t \boldsymbol{a}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{e}^{\frac{q}{p}} dt. \quad (9)$$

有 $\dot{\boldsymbol{s}} = \dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{a}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{e}^{\frac{q}{p}} = \dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\boldsymbol{x}}_d + \boldsymbol{a}\boldsymbol{e} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{e}^{\frac{q}{p}}$ , 再取新的切换函数

$$\boldsymbol{\Sigma} = \dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{c}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{d}\boldsymbol{s}^{\frac{k}{l}}, \quad (10)$$

则有

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} &= \ddot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{s}^{\frac{k}{l}})' = \\ &\ddot{\boldsymbol{x}} - \ddot{\boldsymbol{x}}_d + \boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}^{\frac{q}{p}})' + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{s}^{\frac{k}{l}})' = \\ &\dot{\boldsymbol{f}} + \dot{\boldsymbol{g}}\boldsymbol{u} + \dot{\boldsymbol{g}}\dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{\Psi}} - \ddot{\boldsymbol{x}}_d + \boldsymbol{a}\dot{\boldsymbol{e}} + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{e}^{\frac{q}{p}})' + \boldsymbol{c}\dot{\boldsymbol{s}} + \boldsymbol{d}(\boldsymbol{s}^{\frac{k}{l}})'. \end{aligned}$$

用指数趋近律保证到达条件

$$\dot{\boldsymbol{\Sigma}} = -\lambda_1 \boldsymbol{\Sigma} - \lambda_2 \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma}. \quad (11)$$

以上设计参数满足 $\boldsymbol{\chi} = \text{diag}\{\chi_1, \chi_2, \chi_3\}$ ,  $\chi_i > 0 (i =$

$1, 2, 3)$ .  $\boldsymbol{\chi}$ 分别代表 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \lambda_1, \lambda_2$ .  $\frac{1}{2} < \frac{q}{p} < 1$ ,  $\frac{1}{2} < \frac{j}{k} < 1$ , 且 $p, q, j, k$ 均为奇数.

从上面的滑模面设计过程可以看出, 动态滑模控制中, 存在FDO输出的导数 $\dot{\boldsymbol{\Psi}}$ . 代入式(6)有

$$\dot{\Psi}(t, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\theta}^{*\top} \frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t, \mathbf{x}). \quad \frac{-2(x_j - c_j^i)}{(b_j^i)^2} \in [-2M_{ij}, 2M_{ij}],$$

显然, 系统稳定性证明中, 需要保证  $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  和  $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}(t, \mathbf{x})$  是有界的. 事实上两者是相互关联的. 其中关键是证明模糊基向量对状态向量的偏导  $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  有界. 为此, 有如下定理.

**2.3 FDO 中  $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$  有界性证明 (Prove of boundary)**

**定理 1** 设计模糊干扰观测器系统(3)(4), 逼近系统(2)中的复合干扰, 隶属度函数取为式(5)所示的高斯函数, 则系统(4)中模糊基向量对系统(2)中的状态向量的偏导

$$\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{i,j}$$

在任意情况下有界.

**证** 因为对于任意  $i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, n$ , 令

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^n \exp\left(\frac{-(x_j - c_j^i)^2}{(b_j^i)^2}\right). \quad (12)$$

上式对  $x_j$  求偏导有

$$\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{-2(x_j - c_j^i)}{(b_j^i)^2} \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (13)$$

将式(12)(13)代入式(5)中, 得到  $\xi_i(\mathbf{x})$  对  $x_j$  的偏导

$$\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x}) - \varphi_i(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^r \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}}{\left(\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})\right)^2}. \quad (14)$$

上式也可记作如下形式:

$$\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \frac{-2(x_j - c_j^i)}{(b_j^i)^2} \xi_i(\mathbf{x}) + \xi_i(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^r \frac{2(x_j - c_j^i)}{(b_j^i)^2} \xi_i(\mathbf{x}). \quad (15)$$

在上述准备工作的基础上, 以下分两步证明有界.

**Step 1** 当  $\mathbf{x}$  有界时.

此时任意  $x_j$  有界. 记

$$\frac{-(x_j - c_j^i)^2}{(b_j^i)^2} \in [-\bar{M}_{ij}, 0],$$

其中  $\bar{M}_{ij}$  为某一正数, 则

$$\exp\left(\frac{-(x_j - c_j^i)^2}{(b_j^i)^2}\right) \in [e^{-\bar{M}_{ij}}, 1].$$

由式(12)易知  $\varphi_i(\mathbf{x}) \in [e^{-N_i}, 1]$ . 其中  $N_i = \sum_{j=1}^n \bar{M}_{ij}$ .

记式(13)中

$M_{ij}$  为某一正数, 则有  $\frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \in [-2M_{ij}, 2M_{ij}]$ .

式(14)中:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x}) &\in \left[ \sum_{i=1}^r e^{-N_i}, r \right], \\ \sum_{i=1}^r \frac{\partial \varphi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} &\in \left[ \sum_{i=1}^r -2M_{ij}, \sum_{i=1}^r 2M_{ij} \right]. \end{aligned}$$

进一步可以得到  $\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \in [\Xi_{ij}, \Omega_{ij}]$ , 其中:

$$\begin{aligned} \Xi_{ij} &= \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^r e^{-N_i}} \right)^2 (-2rM_{ij} - \sum_{i=1}^r 2M_{ij}), \\ \Omega_{ij} &= \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^r e^{-N_i}} \right)^2 (2rM_{ij} + \sum_{i=1}^r 2M_{ij}). \end{aligned}$$

至此, 当  $\mathbf{x}$  有界时,  $\frac{\partial \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right)_{i,j}$  有界得证.

**Step 2** 当  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  时.

此时至少存在一个状态分量趋于无穷, 现设存在  $k$  个分量趋于无穷,  $1 \leq k \leq n$ . 为方便分析, 令  $x_1, x_2, \dots, x_k \rightarrow \infty, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  有界. 易知

$$\lim_{x_j \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{(x_j - c_j^i)^2}{(b_j^i)^2}\right) \rightarrow 0, \quad 1 \leq j \leq k.$$

再以  $x_j \rightarrow +\infty$  为例考虑对于任意  $1 \leq i \leq r, 1 \leq \bar{i} \leq r$ , 有

$$\begin{aligned} \lim_{x_j \rightarrow \infty} \frac{\exp\left(-\frac{(x_j - c_j^i)^2}{(b_j^i)^2}\right)}{\exp\left(-\frac{(x_j - c_j^{\bar{i}})^2}{(b_j^{\bar{i}})^2}\right)} &= \\ \lim_{x_j \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{(b_w)^2} (2(c_j^{\bar{i}} - c_j^i)x_j + (c_j^{\bar{i}})^2 - (c_j^i)^2)\right) &= \\ \begin{cases} 0, & c_j^i < c_j^{\bar{i}}, \\ 1, & c_j^i = c_j^{\bar{i}}, \\ +\infty, & c_j^i > c_j^{\bar{i}}. \end{cases} \end{aligned}$$

当  $x_j \rightarrow -\infty$  时, 有类似结论, 不再赘述. 定义

$$\begin{aligned} \varphi_i(\mathbf{x}) &= I_{1i\bar{i}} + I_{2i\bar{i}}, \\ \varphi_i(\mathbf{x}) & \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} I_{1i\bar{i}} &\triangleq \frac{\prod_{j=1}^k \exp\left(-\frac{(x_j - c_j^i)^2}{(b_j^i)^2}\right)}{\prod_{j=1}^k \exp\left(-\frac{(x_j - c_j^{\bar{i}})^2}{(b_j^{\bar{i}})^2}\right)}, \\ I_{2i\bar{i}} &\triangleq \frac{\prod_{j=k+1}^n \exp\left(-\frac{(x_j - c_j^i)^2}{(b_j^i)^2}\right)}{\prod_{j=k+1}^n \exp\left(-\frac{(x_j - c_j^{\bar{i}})^2}{(b_j^{\bar{i}})^2}\right)}. \end{aligned}$$

注意到 $I_{1\bar{i}\bar{i}}$ 中各 $x_j$ 符号可能有正有负,因此

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_{1\bar{i}\bar{i}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \sum_{j=1}^k \left( \frac{1}{(b_w)^2} (2(c_j^i - c_j^{\bar{i}})x_j + (c_j^{\bar{i}})^2 - (c_j^i)^2) \right) = \begin{cases} 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^i - c_j^{\bar{i}})x_j \rightarrow -\infty, \\ 1, & c_j^i = c_j^{\bar{i}}, 1 \leq j \leq k, \\ R_{1\bar{i}\bar{i}}, & c_j^i \neq c_j^{\bar{i}} \text{ 且} \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^i - c_j^{\bar{i}})x_j = 0, \\ +\infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^i - c_j^{\bar{i}})x_j \rightarrow +\infty, \end{cases}$$

其中 $R_{1\bar{i}\bar{i}} = \exp \sum_{j=1}^k \left( \frac{1}{(b_w)^2} ((c_j^{\bar{i}})^2 - (c_j^i)^2) \right)$ .

$I_{2\bar{i}\bar{i}}$ 中分子分母中各因式均有界,且分子不可能为0,因此 $I_{2\bar{i}\bar{i}}$ 有界.令 $R_{2\bar{i}\bar{i}} = \lim_{x \rightarrow \infty} I_{2\bar{i}\bar{i}}$ .则有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\varphi_{\bar{i}}(\mathbf{x})} = \begin{cases} 0, & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^i - c_j^{\bar{i}})x_j \rightarrow -\infty, \\ 1, & c_j^i = c_j^{\bar{i}}, 1 \leq j \leq k, \\ R_{1\bar{i}\bar{i}}R_{2\bar{i}\bar{i}} \triangleq R_{\bar{i}\bar{i}}, & c_j^i \neq c_j^{\bar{i}} \text{ 且} \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^i - c_j^{\bar{i}})x_j = 0, \\ +\infty, & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^i - c_j^{\bar{i}})x_j \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

由上面结论有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \xi_i(\mathbf{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sum_{i=1}^r \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\varphi_i(\mathbf{x})}} = \begin{cases} 1, & \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^{\bar{i}} - c_j^i)x_j \rightarrow -\infty \forall \bar{i} \neq i, \\ 0, & \exists \bar{i} \text{ 使 } \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^{\bar{i}} - c_j^i)x_j \rightarrow +\infty, \\ \frac{1}{1 + \sum_{\bar{i}=1}^k R_{\bar{i}\bar{i}}} \triangleq \bar{R}_{\bar{i}\bar{i}}, & \\ \text{其他, 且假设 } \exists \bar{k}, c_j^{\bar{i}} \text{ 使 } c_j^i \neq c_j^{\bar{i}} \text{ 且} \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(b_w)^2} 2(c_j^{\bar{i}} - c_j^i)x_j = 0, 0 \leq \bar{k} < r. \end{cases} \quad (16)$$

下面又分 $x_j \rightarrow \infty$ ,  $x_j$ 有界两种情况证明 $\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j}$ 有界.

i) 当 $x_j \rightarrow \infty$ 时.

将式(10)代入式(11)有

$$\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = I_{1ij} + I_{2ij},$$

其中:

$$I_{1ij} = -\frac{2x_j}{(b_j^i)^2} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} + \frac{2x_j \varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^r \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{(b_j^i)^2 \sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})},$$

$$I_{2ij} = \frac{2c_j^i}{(b_j^i)^2} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} - \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^r \frac{2c_j^i \varphi_i(\mathbf{x})}{(b_j^i)^2 \sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})},$$

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_{1ij} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(b_w)^2} \left( -\frac{2x_j \varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} + \frac{2x_j \varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^r \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(b_w)^2} \left( -2x_j \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} + 2x_j \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \right) = 0.$$

对于 $I_{2ij}$ ,考虑式(13)所示结论有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} I_{2ij} = \frac{1}{(b_w)^2} \left( \frac{2c_j^i \varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} - \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^r \frac{2c_j^i \varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \right) \triangleq R_{I2ij} = f \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})} \right),$$

这里 $R_{I2ij}$ 为与 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})}$ 有关的某一确定值.

因此 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{x \rightarrow \infty} I_{2ij} = R_{I2ij}$ 有界.

ii) 当 $x_j$ 有界时,

可知 $\frac{2(x_j - c_j^i)}{(b_j^i)^2}$ 有界,记 $R_{ij} = \frac{2(x_j - c_j^i)}{(b_j^i)^2}$ ,式(15)

写为

$$\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = -R_{ij} \xi_i(\mathbf{x}) + \xi_i(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^r R_{ij} \xi_i(\mathbf{x}).$$

再考虑式(16)结论易知

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{x \rightarrow \infty} (-R_{ij} \xi_i(\mathbf{x}) + \xi_i(\mathbf{x}) \sum_{i=1}^r R_{ij} \xi_i(\mathbf{x})) = f(R_{ij}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi_i(\mathbf{x})}{\sum_{i=1}^r \varphi_i(\mathbf{x})})$$

有界.

至此, 当  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  时,  $\frac{\partial \xi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j})_{i,j}$  有界得证.

综上, 可知任意情况下  $\frac{\partial \xi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = (\frac{\partial \xi_i(\mathbf{x})}{\partial x_j})_{i,j}$  有界. 证毕.

**注 2** 类似于 Lyapunov 大范围稳定定理的证明思路<sup>[13]</sup>, 这里  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$  是为证明大范围状态下本定理均成立. 并非认为实际系统中状态会出现无穷大的情况.

由式(4)(6)有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \dot{\Psi}(t, \mathbf{x}) - \dot{\Psi}(\mathbf{x} | \hat{\boldsymbol{\theta}}^*) = \\ \dot{\Psi}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}^{*T} \dot{\xi}(\mathbf{x}) &= \dot{\Psi}(t, \mathbf{x}) - \boldsymbol{\theta}^{*T} \frac{\partial \xi(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

根据定理1、假设1和假设2, FDO对复合干扰逼近误差向量的变化率有界, 记为  $\|\dot{\mathbf{e}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})\| \leq E_{d\epsilon}, E_{d\epsilon} > 0$  且未知.

### 3 控制器设计及系统稳定性证明(Controller design and stability proof)

**定理 2** 为使非线性系统(1)跟踪标称值  $\mathbf{x}_d$ , 设计以式(5)所示高斯函数为隶属度函数的FDO动态观测系统(18), 取快速Terminal滑模面为(9)(10), 取二阶动态Terminal滑模控制律为(17), 自适应律分别取为式(19)~(22), 则跟踪误差系统大范围渐进稳定.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, \tag{17}$$

$$\mathbf{u}_0 = (\mathbf{g})^{-1}(-\mathbf{f} - \hat{\Psi} + \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{a}\mathbf{e} - \mathbf{b}\mathbf{e}^{\frac{q}{p}} - \mathbf{c}\mathbf{s} - \mathbf{d}\mathbf{s}^{\frac{j}{k}}),$$

$$\mathbf{u}_1 = (\mathbf{g})^{-1} \int_0^t \mathbf{v} dt,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= -\dot{\mathbf{g}}(\mathbf{x})\mathbf{u} - \lambda_1 \boldsymbol{\Sigma} - \lambda_2 \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} - \\ &\hat{E} \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma} - \hat{E}_{d\epsilon} \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma}, \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} &= -\sigma \boldsymbol{\mu} + \sigma \mathbf{x} + \mathbf{f} + \mathbf{g}\mathbf{u} + \hat{\Psi} + \hat{E}_{\epsilon} \text{sgn} \boldsymbol{\zeta}, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}\mathbf{u}) \boldsymbol{\Sigma}^T + \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\zeta}^T, \tag{19}$$

$$\dot{\hat{E}} = k_E \|\boldsymbol{\Sigma}\|, k_E > 0, \tag{20}$$

$$\dot{\hat{E}_{d\epsilon}} = k_{E_{d\epsilon}} \|\boldsymbol{\Sigma}\|, k_{E_{d\epsilon}} > 0, \tag{21}$$

$$\dot{\hat{E}_{\epsilon}} = k_{E_{\epsilon}} \|\boldsymbol{\zeta}\|, k_{E_{\epsilon}} > 0. \tag{22}$$

**证** 自适应律可以采用投影算子等方法保证可调参数有界<sup>[12]</sup>, 限于篇幅, 本文不再具体讨论. 再由定理1和假设1可知  $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \Psi$  有界, 记

$$\|\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \Psi\| \leq E, \tag{23}$$

其中  $E > 0$  且未知. 取李雅普诺夫函数为

$$V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^T \boldsymbol{\Sigma} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta} + \frac{1}{2} \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}) + \frac{1}{2k_E} \hat{E} \hat{E} +$$

$$\frac{1}{2k_{E_{d\epsilon}}} \hat{E}_{d\epsilon} \hat{E}_{d\epsilon} + \frac{1}{2k_{E_{\epsilon}}} \hat{E}_{\epsilon} \hat{E}_{\epsilon},$$

其中:  $\tilde{E} = E - \hat{E}$ ,  $\tilde{E}_{d\epsilon} = E_{d\epsilon} - \hat{E}_{d\epsilon}$ ,  $\tilde{E}_{\epsilon} = E_{\epsilon} - \hat{E}_{\epsilon}$ . 对  $V$  求导, 并将式(9)~(11)(17)~(23)代入得到

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \boldsymbol{\Sigma}^T (\dot{\Psi} - \dot{\Psi} - \lambda_1 \boldsymbol{\Sigma} - \lambda_2 \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma} + \hat{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} - \\ &\hat{E} \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma} - \hat{E}_{d\epsilon} \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma}) + \boldsymbol{\zeta}^T (-\sigma \boldsymbol{\zeta} + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\epsilon} - \\ &\hat{E}_{\epsilon} \text{sgn} \boldsymbol{\zeta}) - \text{tr}(\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}\mathbf{u}) \boldsymbol{\Sigma}^T + \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\zeta}^T) - \\ &\hat{E} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \hat{E}_{d\epsilon} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \hat{E}_{\epsilon} \|\boldsymbol{\zeta}\|, \end{aligned}$$

再代入式(4)(6)(7), 并考虑  $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = -\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ ,  $\tilde{E} = -\tilde{E}$ ,  $\tilde{E}_{d\epsilon} = -\tilde{E}_{d\epsilon}$ ,  $\tilde{E}_{\epsilon} = -\tilde{E}_{\epsilon}$ . 整理后有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}\mathbf{u}) + \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \Psi + \\ &\boldsymbol{\Sigma}^T \dot{\mathbf{e}} - \boldsymbol{\Sigma}^T \lambda_1 \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^T \lambda_2 \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} - \\ &\boldsymbol{\Sigma}^T \hat{E} \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\Sigma}^T \hat{E}_{d\epsilon} \text{sgn} \boldsymbol{\Sigma} - \boldsymbol{\zeta}^T \sigma \boldsymbol{\zeta} + \\ &\boldsymbol{\zeta}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\zeta}^T \hat{E}_{\epsilon} \text{sgn} \boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} (\mathbf{f} + \\ &\mathbf{g}\mathbf{u}) - \boldsymbol{\zeta}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} - \tilde{E} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \tilde{E}_{d\epsilon} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \tilde{E}_{\epsilon} \|\boldsymbol{\zeta}\|. \end{aligned}$$

令  $\lambda_{fi} = \min(\lambda_{fij}) (i = 1, 2, j = 1, 2, 3)$  并考虑式(23)所得结论, 有

$$\begin{aligned} \dot{V} &\leq \\ &-\boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}\mathbf{u}) + \|\boldsymbol{\Sigma}\| \|\tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} \Psi\| + \\ &\|\boldsymbol{\Sigma}\| \|\dot{\mathbf{e}}\| - \lambda_1 \|\boldsymbol{\Sigma}\|^2 - \lambda_2 \|\boldsymbol{\Sigma}\| + \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} - \\ &\hat{E} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \hat{E}_{d\epsilon} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \sigma \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + \boldsymbol{\zeta}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} + \\ &\|\boldsymbol{\zeta}\| \|\boldsymbol{\epsilon}\| - \hat{E}_{\epsilon} \|\boldsymbol{\zeta}\| - \boldsymbol{\Sigma}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \boldsymbol{\omega}} (\mathbf{f} + \mathbf{g}\mathbf{u}) - \\ &\boldsymbol{\zeta}^T \tilde{\boldsymbol{\theta}}^T \boldsymbol{\xi} - \tilde{E} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \tilde{E}_{d\epsilon} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \tilde{E}_{\epsilon} \|\boldsymbol{\zeta}\| \leq \\ &E \|\boldsymbol{\Sigma}\| + E_{d\epsilon} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \lambda_1 \|\boldsymbol{\Sigma}\|^2 - \lambda_2 \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \hat{E} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \\ &\hat{E}_{d\epsilon} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \sigma \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + E_{\epsilon} \|\boldsymbol{\zeta}\| - \hat{E}_{\epsilon} \|\boldsymbol{\zeta}\| - \\ &\tilde{E} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \tilde{E}_{d\epsilon} \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \tilde{E}_{\epsilon} \|\boldsymbol{\zeta}\| = \\ &-\lambda_1 \|\boldsymbol{\Sigma}\|^2 - \lambda_2 \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \sigma \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 + (E - \hat{E} - \tilde{E}) \|\boldsymbol{\Sigma}\| + \\ &(E_{d\epsilon} - \hat{E}_{d\epsilon} - \tilde{E}_{d\epsilon}) \|\boldsymbol{\Sigma}\| + (E_{\epsilon} - \hat{E}_{\epsilon} - \tilde{E}_{\epsilon}) \|\boldsymbol{\zeta}\| = \\ &-\lambda_1 \|\boldsymbol{\Sigma}\|^2 - \lambda_2 \|\boldsymbol{\Sigma}\| - \sigma \|\boldsymbol{\zeta}\|^2 < 0. \end{aligned}$$

误差系统运动轨迹只要尚未进入滑模面  $\boldsymbol{\Sigma} = 0$ , 则  $\dot{V}$  始终小于零,  $\boldsymbol{\Sigma}$  持续收敛. 进入滑模面后, 在两层滑模面上依次滑动至  $\mathbf{e} = 0$  点. 误差系统渐进稳定.

系统大范围渐进收敛的证明参考文献[13]. 不再赘述. 证毕.

**注 3** 控制器设计中用到状态的一阶导数. 理论上可以用足够精度的速度传感器获得, 实际应用中, 也可由微分估计器等获得. 不再具体讨论.

**注4** 定理2中所取的两个滑模面均为Terminal滑模面, 能保证在各个滑模面上均是有限时间收敛的, 因此系统整体是有限时间收敛的. 限于篇幅不再给出Terminal滑模面有限时间收敛的证明, 参见文献[14,15]. 而对于任意的初始误差, 由于采用式(16)的指数趋近律, 所以能保证有限时间内进入滑模面. 具体证明见文献[16].

#### 4 高阶动态滑模收敛时间增加问题分析 (Increased convergence time analysis for higher-order sliding mode)

本文中二阶动态Terminal滑模引入了新的滑模面, 使原来的一个趋近滑模面的过程和一个滑模面上的收敛过程变成了一个趋近滑模面的过程和两个滑模面的收敛过程, 比常规滑模增加了收敛时间. 在相同初始条件下, 比较普通快速Terminal滑模和二阶动态Terminal滑模的收敛时间, 结果如表1所示. 这里设计参数相同,  $\lambda_1$ 取为3,  $\lambda_2$ 取为1.  $e(0)$ 代表误差初始值;  $T$ 既代表Terminal滑模的收敛时间;  $R$ 代表趋近律作用下趋近滑模面的收敛时间.

表1 不同初始误差下FTSMC和SODTSMC收敛时间对比

Table 1 The comparison of SODTSMC convergence time with FTSMC convergence time

	$e(0) = 1$	$e(0) = 0.1$
$T/s$	1.6174	1.0939
$R/s$	0.2824	0.0507
FTSMC总收敛时间 $t = 2T/s$	3.2348	2.1878
SODTSMC总收敛时间 $t = 2T + R/s$	3.5172	2.2385
时间增加百分比/%	8.73	2.32

从表1可以看出本文所提出的二阶动态Terminal滑模增加的收敛时间, 即使在初始误差较大的情况下, 多耗时间也极为有限. 而对于抖振等可视为初始误差极小的情况, 多耗时间可以忽略不计. 因此消除抖振的时间代价在工程上是完全能接受的.

虽然高阶动态滑模阶次越高, 消除抖振的效果越好, 但从表1中结论也可以看出, 在离滑模面较近时, 指数趋近律收敛速度要远快于Terminal滑模收敛速度. 因此三阶及三阶以上的动态滑模增加的Terminal滑模面会大大增加收敛时间. 因此应避免选用不必要的高阶动态滑模.

#### 5 近空间飞行器姿态角跟踪仿真(Simulation applied to NSV)

近空间飞行器6自由度式(12)中, 两组快慢回路

方程可以写为如下的形式<sup>[17]</sup>:

$$\dot{\Omega} = f_s + g_s \omega_c + \Psi_s(t, x), \quad (24)$$

$$\dot{\omega} = f_f + g_f u + \Psi_f(t, x), \quad (25)$$

其中: 姿态角  $\Omega = (\alpha, \beta, \mu)^T$ ;  $\alpha, \beta, \mu$  分别为迎角、侧滑角、绕速度矢量轴的滚转角;  $\omega = (p, q, r)^T$ ,  $p, q, r$  分别为滚转角速率、俯仰角速率、偏航角速率;  $\delta = (\delta_L, \delta_R, \delta_D)^T$  表示左、右升降副翼舵和方向舵的偏转;  $\Psi_s(t, x) = \Delta f_s + \Delta g_s \omega_c$ ,  $\Psi_f(t, x) = \Delta f_f + \Delta g_f u + d(t)$  为复合干扰,  $\omega_c$  是慢回路的虚拟控制量, 同时也作为快回路状态跟踪的标称值,  $\Delta f_f, \Delta g_f$  为系统不确定性,  $d(t)$  为外界扰动, 以力矩的形式作用在快回路. 将根据定理2设计控制器, 用于近空间飞行器姿态角跟踪控制仿真实验. 为进行对比, 分别采用基于FDO的趋近律Terminal滑模控制和本文提出的基于FDO的自适应二阶动态Terminal滑模控制用于NSV仿真实验. 得到图1~4所示结果. 各参数取值为:

$$V(0) = 4584.5 \text{ m/s}, M = 136820 \text{ kg},$$

$$\Omega_c = [1 \ 0 \ -1]^T, \Omega(0) = [0.1 \ 0 \ -0.06]^T,$$

$$H(0) = 33.5 \text{ km}, \omega(0) = [0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$a_s = b_s = \text{diag}\{3, 3, 3\},$$

$$c_s = d_s = \text{diag}\{1, 1, 1\},$$

$$a_f = b_f = \text{diag}\{2, 2, 2\},$$

$$c_f = \text{diag}\{5, 2, 4\}, d_f = \text{diag}\{5, 2, 3\},$$

$$\lambda_{f1} = \text{diag}\{4, 2, 3\},$$

$$\lambda_{f2} = \text{diag}\{0.15, 0.15, 0.4\},$$

$$\lambda_{s1} = \lambda_{s2} = \text{diag}\{0.5, 0.5, 0.5\}, \sigma_s = \sigma_f = 5,$$

$$k_{sE} = k_{fE} = k_{sE_{d\epsilon}} = k_{fE_{d\epsilon}} = k_{sE_{\epsilon}} = k_{fE_{\epsilon}} = 1,$$

$$\frac{q_s}{p_s} = \frac{j_s}{k_s} = \frac{q_f}{p_f} = \frac{j_f}{k_f} = \frac{7}{9}.$$

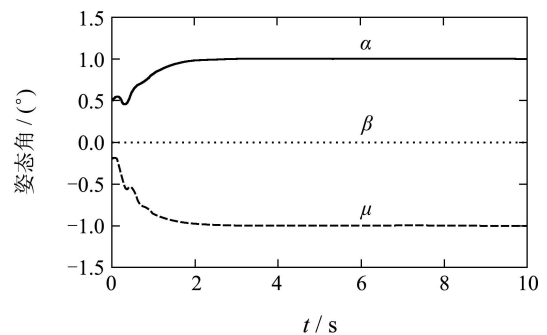


图1 基于二阶动态Terminal滑模控制的近空间飞行器姿态角跟踪仿真结果

Fig. 1 Simulation results of NSV attitude angle tracking based on second-order dynamic Terminal sliding mode control

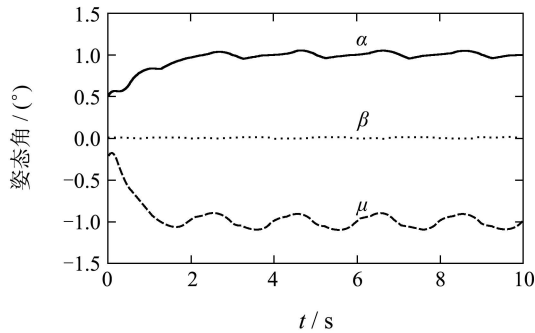


图 2 基于趋近律的Terminal滑模控制的近空间飞行器姿态角跟踪仿真结果

Fig. 2 Simulation results of NSV attitude angle tracking based on reaching law Terminal sliding mode control

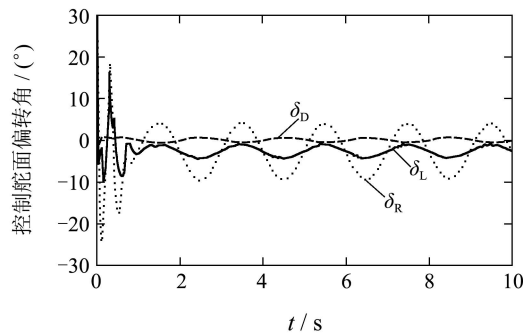


图 3 基于二阶动态Terminal滑模控制的近空间飞行器姿态角跟踪仿真舵面角

Fig. 3 Control surface of NSV based on second-order dynamic Terminal sliding mode control

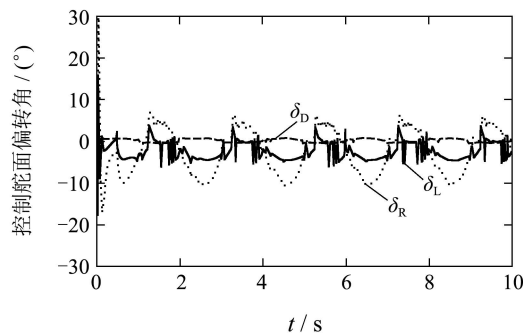


图 4 基于趋近律的Terminal滑模控制的近空间飞行器姿态角跟踪仿真舵面角

Fig. 4 Control surface of NSV based on reaching law Terminal sliding mode control

FDO的学习率取为300. 采用5个模糊语言变量: 负大、负小、零、正小、正大, 总共125条模糊规则. 隶属度函数中心分别取为-0.8, -0.2, 0, 0.2, 0.8, 宽度均取为1. 设定气动参数不确定性为-50%, 外界扰动为 $\mathbf{d}(t) = 10^6 \cdot \sin(\pi t)(0.2, 1, 1, 1)^T \text{ N} \cdot \text{m}$ .

从图1~图4中可以发现, 二阶动态Terminal滑模控制与基于趋近律的Terminal滑模控制相比, 姿态角跟踪速度较快、跟踪精度高、抖振也很好消除了.

## 6 结论(Conclusion)

针对传统滑模存在抖振和收敛时间无穷大的缺点, 本文提出了将二阶动态滑模与Terminal滑模相结合的控制方案. 用FDO逼近复合干扰, 进一步提高收敛精度和速度. 再采用自适应控制, 基于李雅普诺夫理论, 严格证明了系统的稳定性. 最后将本文提出的控制方案应用于具有强烈非线性特性的近空间飞行器的控制问题. 并分析了高阶动态滑模收敛时间增加的问题. 结果表明, 该控制方案收敛速度快、跟踪精度高、鲁棒性强, 并且有效消除了抖振. 二阶动态Terminal滑模收敛增加时间非常有限, 适于工程应用.

## 参考文献(References):

- [1] 刘金琨. 滑模变结构控制MATLAB仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.  
(LIU Jinkun. *MATLAB Simulation for Sliding Mode Control*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.)
- [2] 黄国勇. 基于Terminal滑模的空天飞行器再入鲁棒自适应控制[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2007.  
(HUANG Guoyong. *Robust adaptive control of aerospace vehicles re-entry based on terminal sliding mode control*[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2007.)
- [3] 胡剑波, 时满宏, 庄开宇, 等. 一类非线性系统的Terminal滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(3): 495 - 498.  
(HU Jianbo, SHI Manhong, ZHUANG Kaiyu, et al. Terminal sliding mode control for a class of nonlinear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(3): 495 - 498.)
- [4] LIN Fan, HUANG Chin, FU Li. Flight controller design for intercepting missiles with multiple TVC systems and DCS[C] // *Proceedings of the 2007 American Control Conference*. New York: IEEE, 2007: 5248 - 5253.
- [5] KUNG C C, KAO W J. GA-based grey fuzzy dynamic sliding mode controller design[C] // *Proceedings of the IEEE 1998 International Conference on Computational Intelligence*. New York: IEEE, 1998: 583 - 588.
- [6] 胡跃明. 变结构控制理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2003.  
(HU Yueming. *Variable Structure Control Theory and Applications*[M]. Beijing: Science Press, 2003.)
- [7] 王艳丽, 冯勇, 韩向东. 不确定多变量系统的高阶滑模控制[J]. 控制与决策, 2008, 23(4): 455 - 459.  
(WANG Yanli, FENG Yong, HAN Xiangdong. High-order sliding mode control of uncertain multivariable systems[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(4): 455 - 459.)
- [8] 吴红敏, 胡跃明, 吴忻生. 高阶滑模控制在非完整移动机器人鲁棒输出跟踪中的应用[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(2): 253 - 257.  
(HUANG Hongmin, HU Yueming, WU Xinsheng. Application of high-order sliding mode control to robust output tracking of nonholonomic mobile robots[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(2): 253 - 257.)
- [9] LEVANT A, PRIDOR A. Aircraft pitch control via second order sliding technique[J]. *Journal of Guidance Control and Dynamics*, 2000, 23(4): 586 - 594.
- [10] 吴香玉, 胡跃明. 二阶动态滑模控制在移动机械臂输出跟踪中的应用[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 411 - 415.  
(WU Xuyang, HU Yueming. Second order dynamic sliding mode control and its application to output tracking of mobile manipulators[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(3): 411 - 415.)

- [11] 曾珂, 徐立文, 张乃尧. 典型T-S模糊系统是通用逼近器[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(2): 294 – 297.  
(ZENG Ke, XU Liwen, ZHANG Naiyao. Typical T-S fuzzy systems are universal approximators[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(2): 294 – 297.)
- [12] EUNTAI K. A fuzzy disturbance observer and its application to control[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 2002, 10(1): 77 – 84.
- [13] 姜长生, 吴庆宪. 系统理论与鲁棒控制[M]. 北京: 航空工业出版社, 1998.  
(JIANG Changsheng, WU Qingxian. *Systems Theory and Robust Control*[M]. Beijing: Aviation Industry Press, 1998.)
- [14] 张军. 近空间飞行器非线性不确定飞行运动的鲁棒自适应控制[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2009.  
(ZHANG Jun. *Robust adaptive control for nonlinear uncertain flight moving systems of near space vehicle*[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2009.)
- [15] MAN Z H, PAPLINSKI A P, WU H R. A robust MIMO Terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2464 – 2469.
- [16] 高为炳. 变结构控制理论基础[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 1990.  
(GAO Weibing. *Theoretical Basis of Variable Structure Control*[M]. Beijing: China Science and Technology Press, 1990.)
- [17] 周丽. 基于回馈递推方法的近空间飞行器鲁棒自适应控制[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2008.  
(ZHOU Li. *NSV adaptive robust control based on backstepping*[D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2008.)

#### 作者简介:

**蒲明** (1981—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行控制、滑模控制, E-mail: msznuaa@163.com;

**吴庆宪** (1955—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非线性控制、神经网络控制理论与应用, E-mail: wuqingxian@nuaa.edu.cn;

**姜长生** (1942—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为飞行控制、非线性控制, E-mail: jiangcs@nuaa.edu.cn;

**程路** (1985—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为预测控制、飞行控制, E-mail: chenglu8848@163.com.