

一类干扰有界约束非线性系统的鲁棒模型预测控制

秦伟伟^{1,2}, 马建军¹, 刘刚², 郑志强¹

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073; 2. 第二炮兵工程学院 自动控制工程系, 陕西 西安 710025)

摘要: 针对一类干扰有界约束非线性系统设计了基于控制不变集切换策略的鲁棒模型预测控制算法. 针对非线性系统线性化之后的结果, 给出了平衡点的非线性标称系统控制不变集的计算方法. 然后在考虑线性化误差和加性有界干扰影响的基础上, 构造了平衡点附近最小鲁棒正不变集. 结合不变集切换策略和Tube不变集控制方法, 提出了干扰有界约束非线性系统的不变集切换策略. 最后将该算法应用到一类典型的非线性化工过程连续搅拌反应釜(CSTR)中, 仿真结果验证了算法的有效性.

关键词: 干扰有界约束非线性系统; 鲁棒模型预测控制; 不变集; 连续搅拌反应釜

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust model-predictive-control for a constrained nonlinear system with bounded disturbance

QIN Wei-wei^{1,2}, MA Jian-jun¹, LIU Gang², ZHENG Zhi-qiang¹

(1. College of Machtronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China;

2. Department of Automatic Control, The Second Artillery Engineering Institution, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: For a constrained nonlinear system with bounded disturbance, we develop a new robust model predictive controller(MPC) based on the switching strategy of control-invariant set. Firstly, we propose for the nominal nonlinear system an algorithm for calculating the control-invariant set through linearizing the nonlinear system around the equilibrium point. Secondly, considering the effect of linearization errors and additive bounded disturbances, we determine the minimal robust positively invariant set around the equilibrium point. The robust MPC algorithm is then developed for the constrained nonlinear system with bounded disturbances, based on the switching strategy of the control-invariant set and the control strategy of the Tube-invariant set. The method is tested in a typical nonlinear continuously stirring tank reactor(CSTR); the results show the feasibility of the proposed method.

Key words: constrained nonlinear system with bounded disturbance; robust model predictive control; invariant set; continuously stirring tank reactor(CSTR)

1 引言(Introduction)

模型预测控制(model predictive control, MPC)具有处理系统硬约束、在线优化等优点^[1], 广泛应用于石油、化工等领域. 在非线性模型预测控制(NMPC)中, 由于系统非线性动态, NMPC需要求解复杂的非凸非线性规划问题, 即使在变量较少的情况下, 计算也相当复杂, 限制了NMPC的应用, 因此降低在线优化计算量是NMPC的研究热点问题^[2,3].

在降低计算量的研究中, 不变集理论具有十分重要的作用. 文献[4]设计了基于椭圆不变集的NMPC, 之后为了扩大终端约束集, 文献[5]采用局部线性化方法, 研究了稳定的MPC算法; 文献[6,7]采用线性微分包含(LDI)设计了基于多面体集的NMPC; 另一方面, 文献[3]基于线性化的思想, 将系统在有限的平衡点处线性化, 设计相互重叠的椭圆控制不变集, 扩

大了终端约束集, 降低了在线优化计算量. 基于文献[3], 文献[2]给出了基于多面体不变集的不变集切换控制策略.

本文受文献[3, 8]启发, 针对一类干扰有界约束非线性系统, 设计了多面体不变集切换策略; 首先基于线性化方法, 讨论非线性系统控制不变集的计算方法; 在考虑有界干扰和线性化误差的基础上, 引入最小鲁棒正不变集, 设计覆盖系统平衡面的相互重叠的多面体不变集序列, 并以此结合Tube不变集方法, 设计基于不变集切换的鲁棒控制策略. 最后以连续搅拌反应釜(CSTR)为例验证算法的控制效果.

2 问题描述(Problem statement)

考虑一类干扰有界的约束非线性时不变系统:

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k), \quad (1)$$

其中: $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示控制输入、系统状态. 输入和状态约束满足

$$x(k) \in X \triangleq \{x(k) | A_x x(k) \leq \bar{1}\}, \forall k \geq 0, \quad (2)$$

$$u(k) \in U \triangleq \{u(k) | A_u u(k) \leq \bar{1}\}, \forall k \geq 0, \quad (3)$$

式中: $\bar{1}$ 表示元素全为1的列向量, 且维数与式中的矩阵相对应; X 和 U 为包含原点的集合.

有界干扰 $w(k) \in \mathbb{R}^n$ 满足如下约束:

$$w(k) \in W \triangleq \{w | \|w\|_\infty \leq \chi, \chi \geq 0\}, \quad (4)$$

W 是包含原点的紧集.

本文的研究对象是一类存在连续平衡面的非线性系统, 首先给出非线性系统平衡面的定义.

定义 1 如果存在 $x^{eq} \in X$ 和 $u^{eq} \in U$, 使得 $x^{eq} = f(x^{eq}, u^{eq})$, 则 x^{eq} 为非线性系统的平衡点, 由所有平衡点构成的集合称为平衡面. 如果平衡面是连续的, 则称非线性系统具有连续平衡面.

不考虑干扰时, 非线性系统在第 i 个平衡点 (x_i^{eq}, u_i^{eq}) 的线性化模型为

$$\Delta x(k+1) = A_i \Delta x(k) + B_i \Delta u(k), \quad (5)$$

其中 $\Delta x(k) = x(k) - x_i^{eq}$ 和 $\Delta u(k) = u(k) - u_i^{eq}$ 表示差分变量,

$$A_i = \frac{\partial f}{\partial x} |_{(x_i^{eq}, u_i^{eq})}, B_i = \frac{\partial f}{\partial u} |_{(x_i^{eq}, u_i^{eq})}. \quad (6)$$

假设约束非线性系统满足以下条件:

A1) 非线性系统 $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 二阶连续可微;

A2) 非线性系统存在连续的平衡面;

A3) 非线性系统的任一平衡点 (x_i^{eq}, u_i^{eq}) 处的雅可比线性化模型 (A_i, B_i) 是可镇定的.

预测控制目标是将系统状态驱动到期望平衡点 (x_0^{eq}, u_0^{eq}) , 并最小化性能指标:

$$J_\infty(k) = \sum_{j=0}^{\infty} \{ \|x(k+j) - x_0^{eq}\|_{Q_1}^2 + \|u(k+j) - u_0^{eq}\|_R^2 \}, \quad (7)$$

其中: Q_1 和 R 为正定的加权矩阵. $x(k+j)$, $u(k+j)$ 分别表示在 k 时刻对 $k+j$ 时刻状态和输入的预测.

对于非线性系统(1), 若给定状态反馈控制 $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 可定义集合

$$X_v \triangleq \{x \in X | v(x) \in U\}, \quad (8)$$

定义 2 对于干扰有界离散系统(1), 在状态反馈 $u(k) = v(x(k))$ 的作用下构成闭环系统. 非空集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 称为闭环系统的鲁棒正不变集, 当且仅当任意 k 时刻, $\forall x(k) \in \Omega$, $\Omega \subseteq X_v$, 对于 $\forall w(k) \in W$ 均满足

$$x(k+1) = f(x(k), v(x(k))) + w(k) \in \Omega. \quad (9)$$

定义 3 鲁棒正不变集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是干扰有界离散系统(1)的最小鲁棒正不变集当且仅当 Ω 是所有闭鲁棒不变集的交集.

3 非线性系统的控制不变集(Control invariant set of nonlinear system)

本节主要讨论不含干扰的非线性系统的控制不变集构造方法.

不考虑干扰, 平衡点 (x^{eq}, u^{eq}) 处线性化模型表示为式(5), 给定反馈控制 $\Delta u(k) = K \Delta x(k)$, 式(5)改写为

$$\Delta x(k+1) = (A+BK) \Delta x(k) = A_K \Delta x(k). \quad (10)$$

系统约束转化为 $\Delta x + x^{eq} \in X_K$, 其中

$$X_K = \{\Delta x + x^{eq} \in X | H \Delta x \leq P, \Delta x \in \mathbb{R}^n\}, \quad (11)$$

其中:

$$P = \bar{1} - [(A_x x^{eq})^T \quad (A_u u^{eq})^T]^T, \\ H = [A_x^T \quad (A_u K)^T]^T.$$

基于此, 利用文献[9]算法3可得到中心点位于 (x^{eq}, u^{eq}) 的多面体不变集 S .

下面讨论如何根据平衡点处线性化模型得到非线性系统的控制不变集. 首先定义

$$L_r = \sup_{x \in B_r} \|\Phi(x)\| / \|x\|, \quad (12)$$

其中: $B_r = \{x : \|x\| \leq r\}$, $\Phi(x) = f(x, Kx) - A_K x$ 表示非线性系统的线性化误差.

注 1 为了便于多面体不变集运算, B_r 中 x 的范数一般选择1-范数或者 ∞ -范数.

算法 1 非线性系统控制不变集的构造.

Step 1 在平衡点处线性化, 模型简记为 $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$;

Step 2 根据文献[10]中方法计算最大的椭圆不变集 Ξ , 反馈增益 K 及优化变量 P ;

Step 3 选择适当的常数 γ , 使之满足 $0 < \gamma < \lambda_{\min}(Q_1 + K^T R K)$;

Step 4 确定 L_r 的上界 L_r^{upper} , 使之满足约束

$$\lambda_{\min}(Q_1 + K^T R K) - \gamma \geq 2L_r \|P\| \|A_K\| + L_r^2 \|P\|. \quad (13)$$

Step 5 选择适当的常数 r , 使之满足 $L_r < L_r^{\text{upper}}$;

Step 6 增加约束 $x \in B_r$ 和式(11), 利用文献[8]算法3计算反馈增益 K 的控制不变集 Π_K (其中 λ_{\min} 表示矩阵最小特征值).

上述过程即得到非线性系统的控制不变集.

证 根据文献[10]方法得到满足输入和状态约束的最大椭圆不变集 Ξ , 以及优化变量 Q, P, K . 在

椭圆集 Ξ 内部定义 Lyapunov 函数

$$V(k) = x(k)^T P x(k).$$

非线性系统的控制不变集 Π_K 需要满足

$$f^T(x, Kx) P f(x, Kx) - x^T P x \leq -\gamma x^T x. \quad (14)$$

将 $\Phi(x)$ 代入式(14),

$$2\Phi(x)^T P A_K x + \Phi(x)^T P \Phi(x) + x^T A_K P A_K x - x^T P x \leq -\gamma x^T x. \quad (15)$$

由于在集合 Ξ 中存在不等式约束 $A_K^T P A_K - P + K^T R K + Q_1 \leq 0$, 因此下列不等式成立:

$$2\Phi(x)^T P A_K x + \Phi(x)^T P \Phi(x) \leq x^T [Q_1 + K^T R K] x - \gamma x^T x, \quad (16)$$

可保证不等式(15)成立. 又因为

$$\lambda_{\min}(Q_1 + K^T R K) I \leq Q_1 + K^T R K, \quad (17)$$

$$x^T [Q_1 + K^T R K] x - \gamma x^T x \geq [\lambda_{\min}(Q_1 + K^T R K) - \gamma] \|x\|^2, \quad (18)$$

则对于 $\forall x \in B_r$, 由式(12)可知

$$\begin{aligned} & \|2\Phi(x)^T P A_K x + \Phi(x)^T P \Phi(x)\| \leq \\ & \|\Phi(x)\|^2 \|P\| + 2\|\Phi(x)\| \|P\| \|A_K\| \|x\| \leq \\ & \{2L_r \|P\| \|A_K\| + L_r^2 \|P\|\} \|x\|^2. \end{aligned} \quad (19)$$

由式(18)(19)可知, 不等式(20)成立:

$$\begin{aligned} & [\lambda_{\min}(Q_1 + K^T R K) - \gamma] \|x\|^2 \geq \\ & \{2L_r \|P\| \|A_K\| + L_r^2 \|P\|\} \|x\|^2, \end{aligned} \quad (20)$$

可保证不等式(16)成立. 即如果满足不等式(21):

$$\begin{aligned} & \lambda_{\min}(Q_1 + K^T R K) - \gamma \geq \\ & 2L_r \|P\| \|A + BK\| + L_r^2 \|P\|, \end{aligned} \quad (21)$$

则不等式(15)成立. 事实上, 因为 $\lambda_{\min}(Q_1 + K^T R K) - \gamma > 0$, 当 $r \rightarrow 0$ 时, $L_r \rightarrow 0$, 则一定存在 r 满足条件(21). 因此在状态反馈 K 和满足约束 $x \in B_r$ 和式(11)的条件下构造不变集 Π_K 能够保证不等式(14)成立. 控制不变集 Π_K 即为非线性系统的控制不变集.

4 基于不变集切换策略的鲁棒 NMPC (Robust NMPC with invariant set switch)

干扰有界约束非线性系统在平衡点 (x_i^{eq}, u_i^{eq}) 线性化, 状态方程可描述为

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + \Phi(x) + w(k). \quad (22)$$

由 L_r 定义可知, $\|\Phi(x)\| \leq L_r \|x\|, \sim \forall x \in B_r$. 因此, $\forall w(k) \in W, \forall x(k) \in B_r$,

$$\|\Phi(x) + w(k)\| \leq$$

$$\|\Phi(x)\| + \|w(k)\| \leq L_r r + \chi. \quad (23)$$

由此可知 $\forall x(k) \in B_r$, 干扰和线性化误差之和有界, 系统动态表示为平衡点处的干扰有界线性系统

$$x(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + w'(k), \quad (24)$$

其中 $w'(k) = \Phi(x) + w(k)$, 且满足

$$w'(k) \in W' \triangleq \{w' \mid \|w'\| \leq L_r r + \chi\}. \quad (25)$$

线性化模型(24)对应的标称系统定义为

$$x'(k+1) = A_i x'(k) + B_i u'(k), \quad (26)$$

其中 $x'(k), u'(k)$ 分别表示标称系统状态和输入.

由于有界干扰持续存在, 使得控制器无法保证系统收敛到平衡点, 只能收敛到平衡点附近的邻域内. 为了克服不确定性带来的影响, 提高算法鲁棒性, 考虑线性化误差, 引入 Tube 不变集控制策略^[8]和最小鲁棒正不变集(MRPIS)^[11], 设计干扰有界约束非线性系统不变集切换控制策略.

算法 2 基于不变集切换策略的鲁棒 NMPC.

I) 离线部分.

Step 1 给定期望平衡点 (x_0^{eq}, u_0^{eq}) , 进行线性化得到线性模型矩阵 A_0, B_0 , 令 $i = 0$;

Step 2 在平衡点 (x_i^{eq}, u_i^{eq}) 处线性化, 计算最大椭圆不变集 Ξ_i 以及反馈增益 K_i ; 再根据性能指标参数 Q_1, R 计算标称系统的 LQR 反馈控制律 K_i^{LQR} ; 利用算法 1 确定适当的参数 γ, L_r 和 r , 将式(24)中的 $w'(k)$ 作为范数有界未知干扰, 计算最小鲁棒正不变集的外近似 Ω_i^{\min} ^[10].

Step 3 将 $\bar{X}_i (\bar{X}_i = X \ominus \Omega_i^{\min})$ 表示 Pontryagin 集差) 作为新状态约束, $\bar{U}_i (\bar{U}_i = U \ominus K_i^{LQR} \Omega_i^{\min})$ 作为输入约束, 在满足约束 $x \in B_r$ 的条件下, 计算反馈增益 K_i 在平衡点处的控制不变集 $P_i^l; P_i^l$ 即为线性化标称系统的控制不变集;

Step 4 在 P_i^l 内部选择一个适当的平衡点 $(x_{i+1}^{eq}, u_{i+1}^{eq})$ 进行线性化; 重复 Step 2, 计算 LQR 反馈控制律 K_{i+1}^{LQR} , 以及最小鲁棒正不变集 Ω_{i+1}^{\min} ; 如果 $\Omega_{i+1}^{\min} \not\subset P_i^l$, 该平衡点无效, 重新选择距离 (x_i^{eq}, u_i^{eq}) 更近的平衡点 $(x_{i+1}^{eq}, u_{i+1}^{eq})$, 返回 Step 4; 如果 $\Omega_{i+1}^{\min} \subset P_i^l$, 该平衡点有效, 进入下一步;

Step 5 得到新的平衡点 $(x_{i+1}^{eq}, u_{i+1}^{eq})$, 令 $i = i + 1$, 返回 Step 2; 若多面体不变集序列并集 $S = \bigcup_{i=1}^L P_i^l$ 对非线性系统平衡面完全覆盖, 则离线部分结束.

II) 在线部分.

Step 6 给定初始状态 $x(0) = x'(0)$;

Step 7 $\forall x'(k) \in S = \bigcup_{i=0}^L P_i^l$,

$$u(k) = K_j \Delta x'(k) + K_j^{LQR} (\Delta x(k) -$$

$$\Delta'x(k) + u_j^{\text{eq}}, \quad (27)$$

其中 $j = \min\{i : x'(k) \in P_i^1\}$.

如果 $x(k) \in \Omega_0^{\text{min}}$ (或 $x'(k) = x_0^{\text{eq}}$),

$$u(k) = K_0^{\text{LQR}} \Delta x(k) + u_0^{\text{eq}}, \quad (28)$$

其中: $\Delta x'(k) = x'(k) - x_j^{\text{eq}}$, $\Delta x(k) = x(k) - x_j^{\text{eq}}$. 标称系统状态 $x'(k)$ 和输入 $u'(k)$, 由初始状态 $x'(0)$, 根据式(26)和 $u'(k) = K_j \Delta x'(k) + u_j^{\text{eq}}$ 计算得到.

算法示意图如图1所示, 虚线表示系统平衡面, 细实线包裹区域为控制不变集, 粗实线表示系统轨迹曲线, 灰色区域表示包含平衡点的最小鲁棒正不变集.

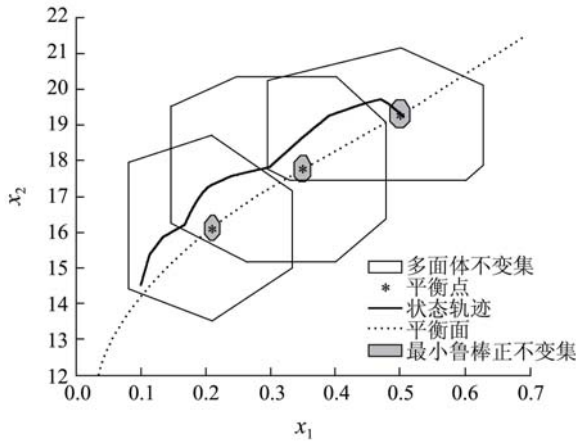


图1 算法2示意图

Fig. 1 General view of Algorithm 2

给出算法稳定性证明之前, 先给出相关的两个引理:

引理1 非线性系统(1), 满足输入和状态约束(2)(3). 对于平衡点 $(x_i^{\text{eq}}, u_i^{\text{eq}})$, 采用算法2得到反馈控制 K_i , 及其对应的标称系统控制不变集 P_i^1 , Ω_i^{min} 为 K_i^{LQR} 对应的最小鲁棒正不变集. 若 $\forall x'(k) \in P_i^1$, $\forall w'(k) \in W'$, 采用控制输入式(27)作用于实际非线性系统可保证其状态收敛到 Ω_i^{min} .

证 P_i^1 表示以 $(x_i^{\text{eq}}, u_i^{\text{eq}})$ 为中心的标准系统(26)的控制不变集, 即若 $\forall x'(k) \in P_i^1$, 则

$$(A_i + B_i K_i) \Delta x'(k) + x_i^{\text{eq}} \in P_i^1.$$

因为 $P_i^1 \subset \bar{X}_i$, 则

$$P_i^1 \oplus \Omega_i^{\text{min}} \subset \bar{X}_i \oplus \Omega_i^{\text{min}} = X \Rightarrow P_i^1 \oplus \Omega_i^{\text{min}} \subset X,$$

其中 \oplus 表示Minkowski集和.

又

$$K_i \Delta x'(k) + u_i^{\text{eq}} \in \bar{U}_i, \quad \bar{U}_i \oplus K_i^{\text{LQR}} \Omega_i^{\text{min}} = U,$$

则

$$K_i \Delta x'(k) + u_i^{\text{eq}} + K_i^{\text{LQR}} (\Delta x(k) - \Delta x'(k)) \in U,$$

因此, P_i^1 作为控制不变集满足文献[8]的假设A1). 所

以根据Tube控制策略, 若 $\forall x'(k) \in P_i^1$, 设计控制输入式(27), 有 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus \Omega_i^{\text{min}}$. 因此非线性系统最终收敛到最小鲁棒正不变集 Ω_i^{min} .

引理2 在利用算法2设计基于多面体不变集切换策略的非线性模型预测控制器时, 保证不变集切换策略顺利实施的充分必要条件是在多面体不变集 P_i^1 中选择下一个平衡点 $(x_{i+1}^{\text{eq}}, u_{i+1}^{\text{eq}})$ 时, 其最小鲁棒正不变集 $\Omega_{i+1}^{\text{min}}$ 满足约束 $\Omega_{i+1}^{\text{min}} \subset P_i^1$.

证 假设非线性系统在平衡点 $(x_i^{\text{eq}}, u_i^{\text{eq}})$ 处线性化得到线性模型 A_i, B_i , 利用算法2的Step 2和Step 3得到标称系统的多面体不变集 P_i^1 . 在 P_i^1 内部恰当的选择一平衡点 $(x_{i+1}^{\text{eq}}, u_{i+1}^{\text{eq}})$, 进行线性化并计算 K_{i+1}^{LQR} 及最小鲁棒正不变集 $\Omega_{i+1}^{\text{min}}$.

I) 充分条件. 由引理1可知, 若 $x'(k) \in P_i^1$, 采用控制输入

$$u(k) = K_{i+1} \Delta x'(k) + K_{i+1}^{\text{LQR}} (\Delta x(k) - \Delta x'(k)) + u_{i+1}^{\text{eq}}$$

可保证 $\forall w(k) \in W$, 非线性系统在有限的步数内收敛到最小鲁棒正不变集 $\Omega_{i+1}^{\text{min}}$. 因为 $\Omega_{i+1}^{\text{min}} \subset P_i^1$, 则非线性系统状态一定会进入控制不变集 P_i^1 , 即可实施不变集控制策略的切换.

II) 必要条件. 为了保证非线性系统的不变集切换控制策略, 必须满足 $P_{i+1}^1 \cap P_i^1 \neq \emptyset$ (\emptyset 表示空集). 假设 $P_{i+1}^1 \cap P_i^1 = \Xi$ (Ξ 表示一个集合). 由Tube不变集控制策略可知, 若 $x'(k) \in P_{i+1}^1$, 采用控制输入

$$u(k) = K_{i+1} \Delta x'(k) + K_{i+1}^{\text{LQR}} (\Delta x(k) - \Delta x'(k)) + u_{i+1}^{\text{eq}},$$

非线性系统状态必然收敛到最小鲁棒正不变集 $\Omega_{i+1}^{\text{min}}$, 因此为了保证不变集切换策略切实可行, 必须满足约束 $\Omega_{i+1}^{\text{min}} \subseteq \Xi$. 因为 $P_{i+1}^1 \cap P_i^1 = \Xi$, 则 $\Omega_{i+1}^{\text{min}} \subset P_i^1$.

综上所述, $\Omega_{i+1}^{\text{min}} \subset P_i^1$ 是干扰有界非线性系统实施不变集切换策略的充分必要条件. 证毕.

由引理2可知, MRPIS在干扰有界非线性系统不变集切换策略中具有十分重要的作用. 但是由于MRPIS的计算复杂性较大, 限制了其应用, 为此给出如下推论.

推论1 对于给定的干扰有界非线性系统, 假设某一平衡点为 $(x_{i+1}^{\text{eq}}, u_{i+1}^{\text{eq}})$ ($i \geq 0$), 在设计不变集切换控制策略时, 如果存在以 $(x_{i+1}^{\text{eq}}, u_{i+1}^{\text{eq}})$ 为中心的鲁棒正不变集 $\Omega_{i+1}^{\text{robust}}$, 满足 $\Omega_{i+1}^{\text{robust}} \subset P_i^1$, 即可保证不变集切换策略的实施.

证 由MRPIS性质 $\Omega_{i+1}^{\text{min}} \subseteq \Omega_{i+1}^{\text{robust}}$ 可知推论成立.

由此可知, 在算法2的Step 2中选择MRPIS的外近似代替MRPIS是合理的.

定理 1 算法2的稳定性定理.

对于系统(1), 状态和输入约束满足式(2)(3), 采用算法2设计的控制器可保证系统渐近稳定到期望平衡点为中心的最小鲁棒正不变集.

证 对于期望的系统平衡点 (x_0^{eq}, u_0^{eq}) , 可计算得到基于多面体不变集的初始状态容许集 $S = \bigcup_{i=0}^L P_i^l$. 对于 $\forall x'(k) \in S$, 可设计控制输入式(27)作用于非线性系统. 由引理1可知非线性系统状态收敛到最小鲁棒正不变集 Ω_j^{min} . 如果 $j > 0$, 因为 $\Omega_j^{min} \subset P_{j-1}^l$, 则系统状态进入控制不变集 P_{j-1}^l , 切换到 P_{j-1}^l 对应的控制策略

$$u(k) = K_{j-1} \Delta x'(k) + K_{j-1}^{LQR} (\Delta x(k) - \Delta x'(k)) + u_{j-1}^{eq},$$

可保证系统状态收敛到以平衡点 $(x_{j-1}^{eq}, u_{j-1}^{eq})$ 为中心的最小鲁棒正不变集 Ω_{j-1}^{min} ; 如果 $j = 1$, 达到控制目标; 如果 $j > 1$, 重复上述过程, 直至收敛到以平衡点 (x_0^{eq}, u_0^{eq}) 为中心的最小鲁棒正不变集 Ω_0^{min} .

证毕.

5 在 CSTR 中的仿真验证 (Simulation on CSTR)

以连续搅拌反应釜CSTR为例, 设计控制器:

$$\begin{aligned} \dot{C}_A &= \frac{Q_f}{V} (C_{Af} - C_A) - k_0 C_A \exp\left(-\frac{E_a}{R_1 T}\right) + w_{CA}, \\ \dot{T} &= \frac{Q_f}{V} (T_f - T) - \frac{k_0 C_A}{C_p} (-\Delta H) \exp\left(-\frac{E_a}{R_1 T}\right) - \frac{UA_h}{VC_p} (T - T_c) + w_T. \end{aligned}$$

式中各参数的物理意义可参见文献[13]. 将系统模型标准化以及离散化($T_s = 0.1$ s):

$$x(k+1) = f(x(k)) + g(x(k))u(k) + [w_1(k) \ w_2(k)]^T,$$

其中 $f(x), g(x)$ 的详细描述参见文献[13]. 标准化后的模型系数为

$$\begin{aligned} \alpha &= 1, \beta = 1, \gamma = 32, \\ B &= 25.6, D_a = 5.9648 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

状态和输入约束转化为标准形式:

$$\begin{aligned} X &= \{(x_1, x_2)^T \mid 0 \leq x_1 \leq 0.7, 12.08 \leq x_2 \leq 20.48\}, \\ U &= \{u \mid 0 \leq u \leq 14.08\}. \end{aligned}$$

假设期望平衡点为 $[0.5 \ 19.726]^T$, 初始状态为 $[0.02 \ 14.7]^T$. 性能指标函数参数 $Q_1 = I, R = 1$.

在期望平衡点计算最大椭圆不变集对应的反馈控制律 $K = [2.2408 \ -0.54]^T$, 以及LQR局部反馈控制律 K_0^{LQR} ; 然后确定适当的参数 $\gamma = 0.5, L_r = 0.027$ 和 $r = 1.7407$ 及最小干扰不变集 Ω_0^{min} . 之后计算多面体不变集 P_0^l . 在 P_0^l 内部选择新的平衡点, 重复算法1和算法2, 直至不变集序列完全覆盖平衡面.

首先讨论不含干扰的情况, 采用本文算法2和文献[3]方法设计控制输入. 仿真结果如图2~4所示, 结果表明相对于文献[3], 算法2扩大了初始状态允许集. 从期望平衡点, 文献[3]方法需要17个相互重叠的椭圆不变集覆盖初始状态; 而算法2需要14个多面体不变集; 由此可知算法2得到的控制不变集大, 需要的控制不变集个数少. 仿真结果表明, 本文方法还具有响应时间短, 收敛速度快, 切换次数少的特点. 依据式(7), 定义 k 时刻性能指标:

$$\|x(k) - x^{eq}\|_{Q_1}^2 + \|u(k) - u^{eq}\|_R^2.$$

从而得到系统性能指标的演化情况如图4所示, 表明本文方法在一定程度上提高了控制性能.

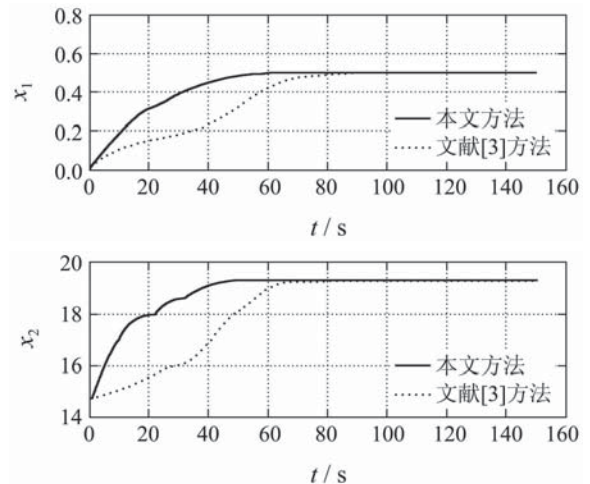


图 2 状态响应曲线

Fig. 2 The response curve of states

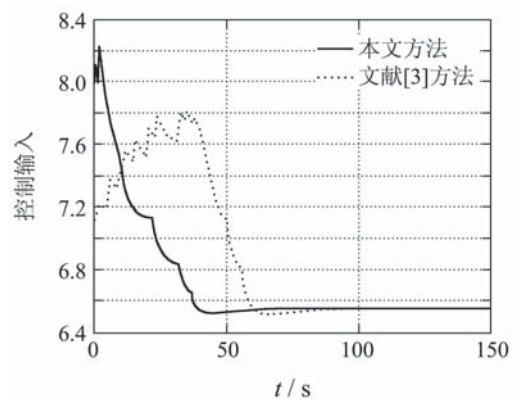


图 3 控制输入

Fig. 3 The control input

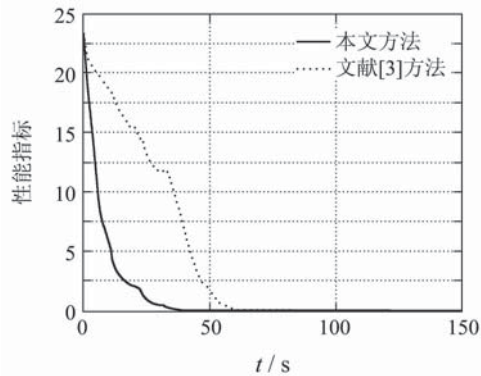


图4 性能指标曲线

Fig. 4 The cost index

为了检验算法2的鲁棒性,给定初始状态 $[0.02 \ 14.7]^T$,范数有界干扰满足 $\|w_1\| \leq 0.01$, $\|w_2\| \leq 0.1$.仿真结果如图5所示.结果表明本文方法能够在满足约束和持续干扰作用的条件下将系统状态驱动到期望的平衡点周围,对干扰产生了有效的抑制,提高了算法的鲁棒性.

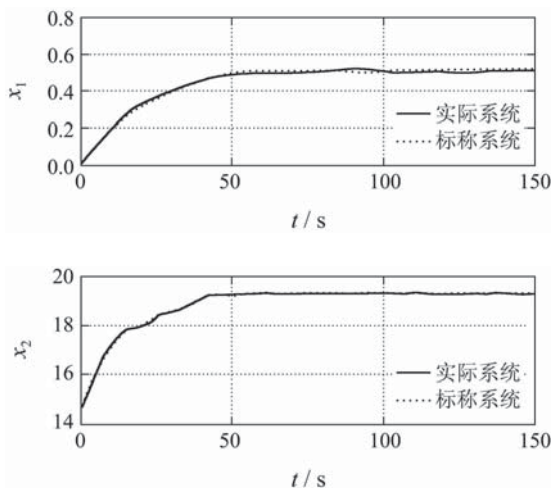


图5 性能指标曲线

Fig. 5 The cost index

6 结论(Conclusion)

本文针对干扰有界非线性系统设计了基于控制不变集切换策略的鲁棒模型预测控制算法.首先给出了基于平衡点的非线性标称系统的控制不变集计算方法.然后在考虑线性化误差和加性有界干扰影响的条件下,得到了平衡点附近的干扰不变集.结合非线性系统线性化,不变集切换策略,以及Tube不变集控制方法,提出了干扰有界约束非线性系统的不变集切换策略.最后将该算法应用于一类典型的非线性系统CSTR,仿真结果验证算法的有效性.

参考文献(References):

[1] 席裕庚,李德伟.预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J].自动化学报,2008,34(10):1225-1234.

(XI Yugeng, LI Dewei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(10): 1225 - 1234.)

[2] 赵敏,李少远.非线性系统双模鲁棒预测控制:不变集切换方法[J].系统科学与数学,2007,27(3):365-377.

(ZHAO Min, LI Shaoyuan. Dual-mode robust predictive control for nonlinear systems: a switching method between polyhedral invariant sets[J]. *Journal Systems Science & Mathematical Sciences*, 2007, 27(3): 365 - 377.)

[3] ZOU T, LI S Y, DING B C. A dual-mode nonlinear model predictive control with the enlarged terminal constraint set[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(1): 22 - 28.

[4] CHEN H, ALLGOWER F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability[J]. *Automatica*, 1998, 34(10): 1205 - 1217.

[5] MAGNI L, NICOLAO G D, MAGNANI L, et al. A stabilizing model-based predictive control algorithm for nonlinear systems[J]. *Automatica*, 2001, 37(9): 1351 - 1362.

[6] CANNON M, DESHMUKH V, KOUVARITAKIS B. Nonlinear model predictive control with polytopic invariant sets[J]. *Automatica*, 2003, 39(8): 1487 - 1494.

[7] CANNON M, KOUVARITAKIS B, DESHMUKH V. Enlargement of polytopic terminal region in NMPC by interpolation and partial invariance[J]. *Automatica*, 2004, 40(2): 311 - 317.

[8] MAYNE D Q, SERON M M, RAKOVIC S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances[J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 219 - 224.

[9] PLUYMERS B, KOTHARE M V, SUYKENS J A K, et al. Robust synthesis of constrained linear state feedback using LMIs and polyhedral invariant sets[C] // *Proceedings of the 2006 American control conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: IEEE, 2006: 881 - 886.

[10] WAN Z Y, KOTHARE M V. Effective robust constrained model predictive control with a time varying terminal constraint set[J]. *Systems & Control Letters*, 2003, 48(5): 375 - 383.

[11] RAKOVIC S V, KERRIGAN E C, KOURAMAS K I, et al. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 406 - 410.

[12] 于树友,陈虹,张鹏,等.一种基于LMI的非线性模型预测控制终端域优化方法[J].自动化学报,2008,34(7):798-804.

(YU Shuyou, CHEN Hong, ZHANG Peng, et al. An LMI optimization for enlarge the terminal region of MPC for nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2008, 34(7): 1225 - 1234.)

[13] BACIC M, CANNON M, KOUVARITAKIS B. Invariant sets for feedback linearization based nonlinear predictive control[J]. *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, 2005, 152(3): 259 - 265.

作者简介:

秦伟伟 (1982—),男,博士研究生,目前研究方向为约束系统控制、精确制导与控制,E-mail: qww_1982@163.com;

马建军 (1980—),男,博士,讲师,目前研究方向为控制分配与容错控制,E-mail: mjjcl1@yahoo.com.cn;

刘刚 (1964—),男,博士生导师,目前研究方向为精确制导与控制,E-mail: hb830513@126.com;

郑志强 (1965—),男,教授,博士生导师,目前研究方向为精确制导与控制、多机器人协同控制等,E-mail: xzyzheng@sohu.com.