

面向控制的分数阶微分模型的快速数值计算

曹红亮, 李 曦, 邓忠华, 秦 忆

(1. 华中科技大学 控制科学与工程系自动化研究所, 湖北 武汉 430074;

2. 华中科技大学 图像信息处理与智能控制教育部重点实验室, 湖北 武汉 430074)

摘要: 求解分数阶控制系统的关键在于如何快速精确地计算分数阶微分. 针对短记忆法和变步长记忆法的计算精度和计算复杂性顾此失彼的矛盾, 本文提出了一种恒权重记忆法, 它不舍弃历史数据, 而是采用常值权重后全部记忆. 在每个后继的采样周期, 只需把新的数据简单叠加到历史数据上来考虑, 从而极大地提高了计算精度和降低了计算复杂性, 且有效地化解了两者之间的矛盾. 数值结果表明恒权重记忆法在分数阶控制系统设计中的可行性和优越性.

关键词: 分数阶微分; 数字滤波器; 短记忆法; 变步长记忆法; 恒权重记忆法

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Control-oriented fast numerical approaches of fractional-order models

CAO Hong-liang, LI Xi, DENG Zhong-hua, QIN Yi

(1. Institute of Automation, Department of Control Science and Technology,

Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China;

2. Key Laboratory of Education Ministry for Image Processing and Intelligent Control,

Huazhong University of Science and Technology, Wuhan Hubei 430074, China)

Abstract: In the computation of fractional order derivatives, the crucial point is to balance the computation speed and the computation accuracy. The existing short memory principle or variable memory principle helps little in relaxing the contradiction. To deal with this problem, we proposed an equal-weight memory principle, in which an equal-weight is applied to all past data in history, and the result is reserved instead of being discarded. In each subsequent sampling period, only one new data is collected for consideration with the historical data. Therefore, the computation accuracy is improved and the computation complexity is reduced, thus, the contradiction is effectively relaxed. Results in numerical examples demonstrate the feasibility and superiority in applying the proposed principle to the design of fractional-order control systems.

Key words: fractional-order derivatives; digit filters; short memory principle; variable memory principle; equal weight memory principle

1 引言(Introduction)

分数阶微积分已有300多年的研究历史. 近30年其成功应用于诸多工程、科学领域. 例如, 电化过程^[1,2]、热传导^[3]、粘弹性材料^[4]、分数阶电容^[5]等. 随着微处理器技术的飞速发展, 分数阶微积分同样受到了控制学科的高度关注. 分数阶微积分能够更精确地建立被控对象的动态模型^[6~8], 以及设计出较整数阶控制器具有更多自由度的分数阶控制器^[9~12]的这一特性, 使其能进一步提高控制系统的动态性能.

分数阶控制系统数字实现的关键是分数阶微分 s^r ($r \in \mathbb{R}$, 分数阶微分阶次)的离散近似. 分数阶微分的离散近似法一般分为间接离散和直接离散.

间接离散, 即在给定的频率带宽内, 先采用整数阶传递函数对 s^r 的频率特性近似, 然后对整数阶传递函数离散化^[13]. 直接离散是直接利用发生函数 $\omega(z^{-1})$ 替换拉斯变换 s , $s^r = (\omega(z^{-1}))^r$, 对分数阶微分离散. 由于离散后的分数阶微分为无限维数字滤波器, 所以实际设计数字微分器时必须对其采取有限维近似. 采用连分式展开(continued fraction expansion, CFE)和幂级数展开(power series expansion, PSE)后, 可分别近似得到IIR滤波器(infinite impulse response)^[14, 15]和FIR滤波器(finite impulse response)^[16~18]. 已有许多学者从发生函数的角度, 对如何提高数字滤波器的近似精度进行了研究. 主要有Euler法、Tustin法、Al-Alaoui法、广义均值法等^[15, 16, 19~21].

由于连分式展开法近似分数阶微分时,其频率收敛速度快,且在复频面的收敛范围大,所以相应的IIR滤波器在分数阶控制系统的实现中得到了广泛的运用^[15,16,21].而采用幂级数展开法设计的FIR滤波器频率收敛速度相对较慢,所以,其数值计算精度需要通过提高滤波器的阶次得以保证.但是,随着滤波器阶次的升高,数据存储量增大,其不利于计算机实现,且数值计算时间相应变长,从而满足不了控制系统的实时性要求.如何有效地化解以上矛盾,一直是控制科学工作者们关注的焦点^[22~27].

FIR滤波器的设计过程是:先将发生函数幂级数展开,然后依据短记忆法^[23]对其进行近似处理.短记忆法认为,虽然分数阶微分与过去所有历史信息相关(无限维系统),但过去很久的历史信息对现在的影响甚小,可以忽略(可以用有限维近似).然而,实际应用时发现,随着记忆时长的增加,数值计算的计算复杂性(时间和空间)变差^[22,24,25].针对短记忆法未能兼顾计算精度和计算复杂性的这一缺陷,相关学者提出了变步长记忆法^[22].变步长记忆法未丢弃短记忆法舍弃的所有历史信息,而是以变步长(计算步长为: $h, 2h, 3h, \dots$)的形式有选择性地记忆,以求实现计算精度与计算复杂性的平衡.还有学者提出了与变步长记忆法类似的对数记忆法^[24],是以对数的形式对历史数据进行记忆.变步长记忆法和对数记忆法都在一定程度上缓和了两者之间的矛盾,却未能彻底解除矛盾.因为随着微分时间的增加,其同样需要相应地增加记忆时长以确保计算精度.

本文在短记忆法和变步长记忆法的基础上,提出了一种恒权重记忆法.恒权重记忆法未舍弃过去很久的历史信息,而是对相应的权系数以一常值近似代替后全盘记忆,从而在计算精度上得到了极大的提高;同时,由于以恒权重的形式记录过去很久的历史信息,到下一个采样周期,只需在上一次历史信息之和的基础上进行简单的递加,就能很好地解决卷积导致的计算量之大的难题.所以,恒权重记忆法有效地化解了计算精度和计算复杂性之间的矛盾,为分数阶控制系统的设计提供了一个有效的途径.

2 数值计算方法(Numerical methods)

分数阶线性定常微分方程的一般形式如下:

$$\begin{cases} D^{\alpha_n} f(t) + a_{n-1} D^{\alpha_{n-1}} f(t) + \dots + \\ a_1 D^{\alpha_1} f(t) + a_0 D^{\alpha_0} f(t) = \\ b_m D^{\beta_m} u(t) + \dots + b_1 D^{\beta_1} u(t) + b_0 D^{\beta_0} u(t), \\ \alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0, \\ \beta_m > \dots > \beta_1 > \beta_0 \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

初始条件:

$$\begin{cases} [{}_0 D_t^{\alpha_n - k - 1} f(t)]_{t=0} = f_k, k = 0, 1, 2, \dots, n - 1, \\ [{}_0 D_t^{\beta_m - l - 1} u(t)]_{t=0} = u_l, l = 0, 1, 2, \dots, m - 1. \end{cases} \quad (2)$$

其中 $a_i (i = 0, 1, \dots, n - 1), b_j (j = 0, 1, \dots, m - 1)$ 为常系数. $D^p \equiv {}_0 D_t^p, p > 0$, 为分数阶微分算子. 0 和 t 分别表示分数阶微积分的上下限.同整数阶微分方程类似,若分数阶微分方程中导数项的最高阶次为 p , 则称其为 p 阶分数阶微分方程.当 p 为整数时,分数阶微分方程即为传统的整数阶微分方程.方程(1)中的分数阶微分具有多种分数阶导数定义,此处采用Grünwald-Letnicov(GL)定义^[23],

$${}_0 D_t^\alpha f(k) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^k \omega_j^\alpha f(k-j), \quad (3)$$

h 为采样步长, $k = \frac{t}{h}$, 为权重系数,

$$\begin{cases} \omega_0^\alpha = 1, \\ \omega_j^\alpha = (1 - \frac{\alpha+1}{j}) \omega_{j-1}^\alpha, j = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \quad (4)$$

将式(3)代入式(1),离散化分数阶微分方程:

$$\begin{aligned} & h^{-\alpha_n} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\alpha_n} f(k-j) + a_{n-1} h^{-\alpha_{n-1}} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\alpha_{n-1}} \cdot \\ & f(k-j) + \dots + a_1 h^{-\alpha_1} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\alpha_1} f(k-j) + \\ & a_0 h^{-\alpha_0} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\alpha_0} f(k-j) = \\ & b_m h^{-\beta_m} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\beta_m} u(k-j) + \dots + b_1 h^{-\alpha_1} \cdot \\ & \sum_{j=0}^k \omega_j^{\alpha_1} u(k-j) + b_0 h^{-\alpha_0} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\alpha_0} u(k-j). \end{aligned} \quad (5)$$

化简式(5),得分数阶微分方程的数值解:

$$\begin{aligned} f(k) = & \frac{\sum_{i=0}^m [b_i h^{-\beta_i} \sum_{j=0}^k \omega_j^{\beta_i} u(k-j)]}{h^{-\alpha_n} \omega_0^{\alpha_n} + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i h^{-\alpha_i} \omega_0^{\alpha_i}]} - \\ & \frac{h^{-\alpha_n} \sum_{j=1}^k \omega_j^{\alpha_n} f(k-j) + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i h^{-\alpha_i} \sum_{j=1}^k \omega_j^{\alpha_i} f(k-j)]}{h^{-\alpha_n} \omega_0^{\alpha_n} + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i h^{-\alpha_i} \omega_0^{\alpha_i}]} \end{aligned} \quad (6)$$

2.1 短记忆法(Short memory method)

根据GL定义,分数阶微分 k 时刻微分等于权系数 ω_j^α 与 $f(k-j) (j=0, 1, 2, \dots, k)$ 的卷积.下一个采样周期,所有历史信息对应的权系数 ω_j^α 发生变化,从

而需重新计算 $k+3$ 次乘法运算和 $k+1$ 次加法运算. 显然, 随时间 k 的增加, 数值运算的计算量趋向无穷大.

据式(4)权系数 ω_j^α 的递推关系式, 当 $\frac{1+\alpha}{2} < j$ 时,

$$\frac{|\omega_j^\alpha|}{|\omega_{j-1}^\alpha|} < 1. \quad (7)$$

即, 权系数 ω_j^α 随时间 k 的增加而收敛于0^[23].

基于系数 ω_j^α 的快速收敛性, 短记忆法认为很久以前的历史信息可以舍弃^[23],

$${}_0D_t^\alpha f(k) \approx {}_{t-L}D_t^\alpha f(k) = h^{-\alpha} \sum_{j=0}^l \omega_j^\alpha f(k-j). \quad (8)$$

其中 $l = \lfloor \frac{L}{h} \rfloor$, L 表示有效的历史时长(记忆时长). 显然, 短记忆法将 $f(k-l-1), f(k-l-2), \dots, f(1), f(0)$ 历史信息都忽略不计. Podlubny^[23]证明了对于给定的误差 ξ , 记忆时长满足以下约束条件:

$$\left(\frac{M}{\xi |\Gamma(1-\alpha)|} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq L. \quad (9)$$

M 表示 $f(t)$ 在区间 $[0, t]$ 上的上限值; $\Gamma(x)$ 为伽马函数, $x \in \mathbb{R}$.

虽然, 被舍弃的历史信息的权系数 ω_j^α 很小, 但随着时间 k 的增加, 累计误差越来越大, 最终超过给定的误差限. 所以, 为了保证计算精度, 必须增加记忆时长 L . 但随着记忆时长 L 的增加, 其计算复杂性逐渐变差, 因而不能满足分数阶控制系统的实时性和数据存储量要求. 所以, 短记忆法不能兼顾计算精度和计算复杂性.

2.2 变步长记忆法(Variable memory method)

针对以上难题, 在短记忆法的基础上, 变步长记忆法认为^[22,24],

$${}_0D_t^\alpha f(k) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^l \omega_j^\alpha f(k-j) + h^{-\alpha} \sum_{j=1}^r \omega_{l+\frac{j(j+1)}{2}}^\alpha f(k-l-\frac{j(j+1)}{2}). \quad (10)$$

其中 $\frac{j(j+1)}{2} = k-l$. 比较式(10)(8), 变步长记忆法较短记忆法增加了第2项, 未将短记忆法舍弃的历史信息全部丢弃, 而是以变步长的形式有选择性地记忆. 由于变步长记忆法较短记忆法记忆的历史信息量大, 所以计算精度有所提高; 同时, 新增历史信息所带来的计算量并不很大. 即, 变步长记忆法通过牺牲一定的计算复杂性来提高计算精度. 变步长记忆法仅仅缓和了两者之间的矛盾, 却未能将其彻底消除.

2.3 恒权重记忆法(Equal weight memory method)

为了彻底化解计算精度和计算复杂性之间的矛盾,

本文提出了一种较变步长记忆法更有效的数值近似计算方法—恒权重记忆法.

卷积形式是全记忆法(本文将直接由GL定义计算分数阶微分的方法称为全记忆法)计算复杂性差的关键所在. 短记忆法从权系数 ω_j^α 的收敛性入手, 直接将很久以前的历史信息舍弃, 很好地解决了计算复杂性的问题. 仍然以权系数 ω_j^α 的收敛性为切入点, 进一步分析发现, 随着 j 的增加, ω_j^α 不仅收敛于0, 还存在以下近似关系:

$$\omega_j^\alpha \approx \omega_{j-1}^\alpha, \alpha + 1 \ll j. \quad (11)$$

如果让很久以前历史信息的权系数都近似相等, 则可以有效地解除卷积关系, 且能保证历史信息的完整性. 恒权重记忆法表示为:

$${}_0D_t^\alpha f(k) \approx h^{-\alpha} \sum_{j=0}^l \omega_j^\alpha f(k-j) + h^{-\alpha} C_k \sum_{j=1}^{k-l} f(k-k-j). \quad (12)$$

C_k 为恒权重系数,

$$C_k = \frac{\sum_{j=1}^{k-l} \omega_{l+j}^\alpha}{k-l}. \quad (13)$$

到下一个采样时刻 $(k+1)$ 时, 由于式(12)的第1项权系数均发生了变化, 需全部重新计算. 但第2项存在以下递推关系式:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{k+1-l} f(k+1-l-j) - \sum_{j=1}^{k-l} f(k-l-j) = f(k-l), \\ (k+1-l)C_{k+1} - (k-l)C_k = \omega_{k+1}^\alpha. \end{cases} \quad (14)$$

所以, 在计算复杂性方面, 恒权重记忆法仅比短记忆法多一次式(14)所示的递推运算. 但所有历史信息都得以记忆, 因而计算精度有很大的提高.

3 数值结果(Numerical results)

下面以一类最基本的分数阶线性定常微分方程为例, 从计算精度和计算复杂性两个角度对短记忆法、变步长记忆法和恒权重记忆法的性能进行比较:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha f(t) = u(t), t \in [0, T], \\ f(0) = f_0, 0 < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (15)$$

对式(15)离散化, 以上3种计算方法的数值解分别为:

$$f(k) = h^\alpha u(k) - \sum_{j=1}^l \omega_j^\alpha f(k-j), \quad (16)$$

$$f(k) = h^\alpha u(k) - \sum_{j=1}^l \omega_j^\alpha f(k-j) - \sum_{j=1}^r \omega_{l+\frac{j(j+1)}{2}}^\alpha f(k-l-\frac{j(j+1)}{2}), \quad (17)$$

$$f(k) = h^\alpha u(k) - \sum_{j=1}^l \omega_j^\alpha f(k-j) - \frac{\sum_{j=1}^{k-l} \omega_{l+j}^\alpha}{k-l} \sum_{j=1}^{k-l} f(k-l-j). \quad (18)$$

对以上数值计算作如下规定和说明: 1) 采样步长 h 设为5 ms(采样步长对数值计算精度的影响本文不作讨论); 2) 分数阶微分阶次 α 取0.5; 3) 数值计算的硬件平台为奔腾(R)双核处理器、2G内存的PC机。

以全记忆法为基准, 式(16)~(18)数值近似解具有一个共同的特点, 即计算精度不仅与权系数 ω_j^α 的取舍和近似有关, 而且还与函数 $f(t)$ 的单调性有关。(因为也可以视函数 $f(t)$ 为分数阶微分的“权重”)。所以, 下面分别从函数 $f(t)$ 为常值函数、单调递增函数、单调递减函数以及非单调时变函数4种情况加以讨论。以下给出4种情况下系统输入输出(解析解)之间的对应关系^[23,28]:

$$u(t) = \frac{75t^{-0.5}}{\Gamma(2.5)}, f_0 = 100, f(t) = 100, \quad (19)$$

$$u(t) = \frac{200\Gamma(2.5)}{3}, f_0 = 0, f(t) = 100t^{0.5}, \quad (20)$$

$$u(t) = \frac{4}{3\Gamma(2.5)}, f_0 = 100, f(t) = t^{-0.5}, \quad (21)$$

$$\begin{cases} u(t) = \frac{75t^{-0.5}}{\Gamma(2.5)} + 200J_0(2\sqrt{30t}), f_0 = 100, \\ f(t) = 100 + \frac{200 \sin(2\sqrt{30t})}{\sqrt{30\pi}}. \end{cases} \quad (22)$$

在式(22)中, $J_0(*)$ 表示阶次为0的第1类贝赛尔函数

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{2k!}. \quad (23)$$

3.1 计算精度比较(Comparison of accuracy)

设数值计算的记忆时长 $L = 0.4$ s, 图1显示了3种近似计算方法以及全记忆法的数值解。3种快速数值近似计算方法相对于全记忆法的相对误差如图2所示。在所有情况下, 恒权重记忆法的计算精度均比短记忆法和变步长记忆法高很多。特别是当函数 $f(t)$ 为常值函数和非单调时变函数时, 恒权重记忆法与变步长记忆法的最大相对误差的百分比分别为0.30%和2.34%。

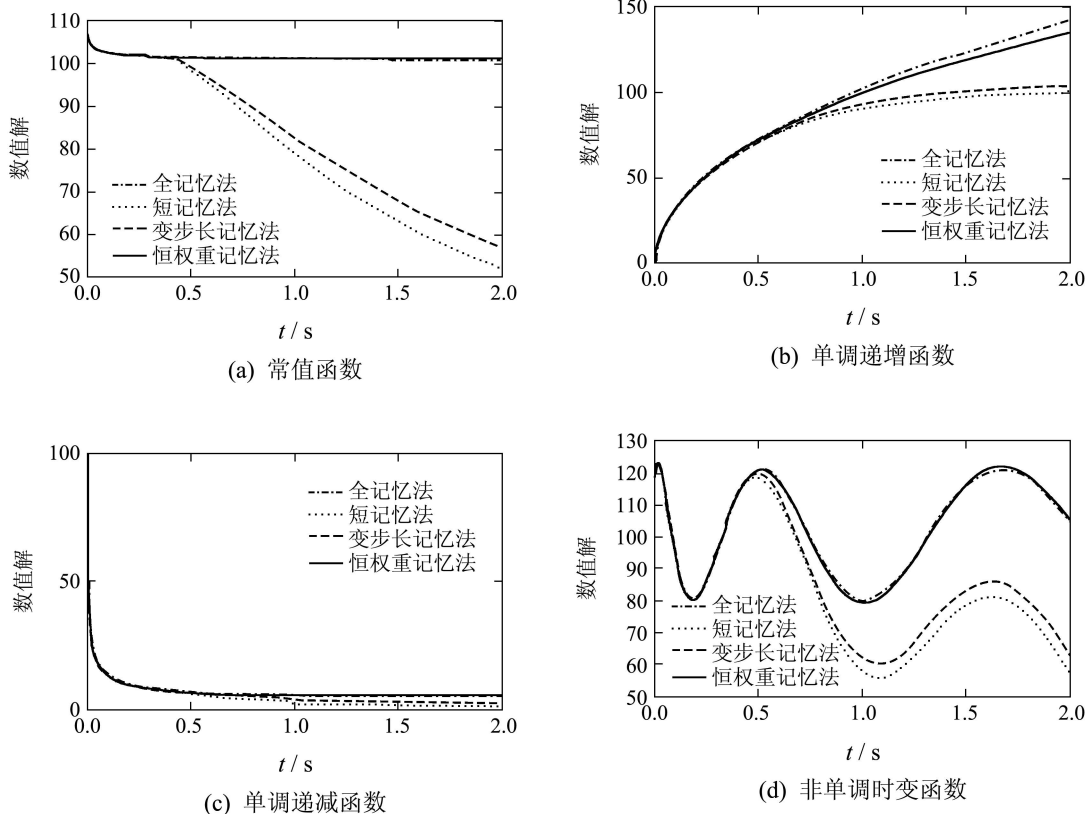


图1 分数阶线性定常微分方程的数值近似解

Fig. 1 Numerical approaches of fractional-order linear constant differential equation

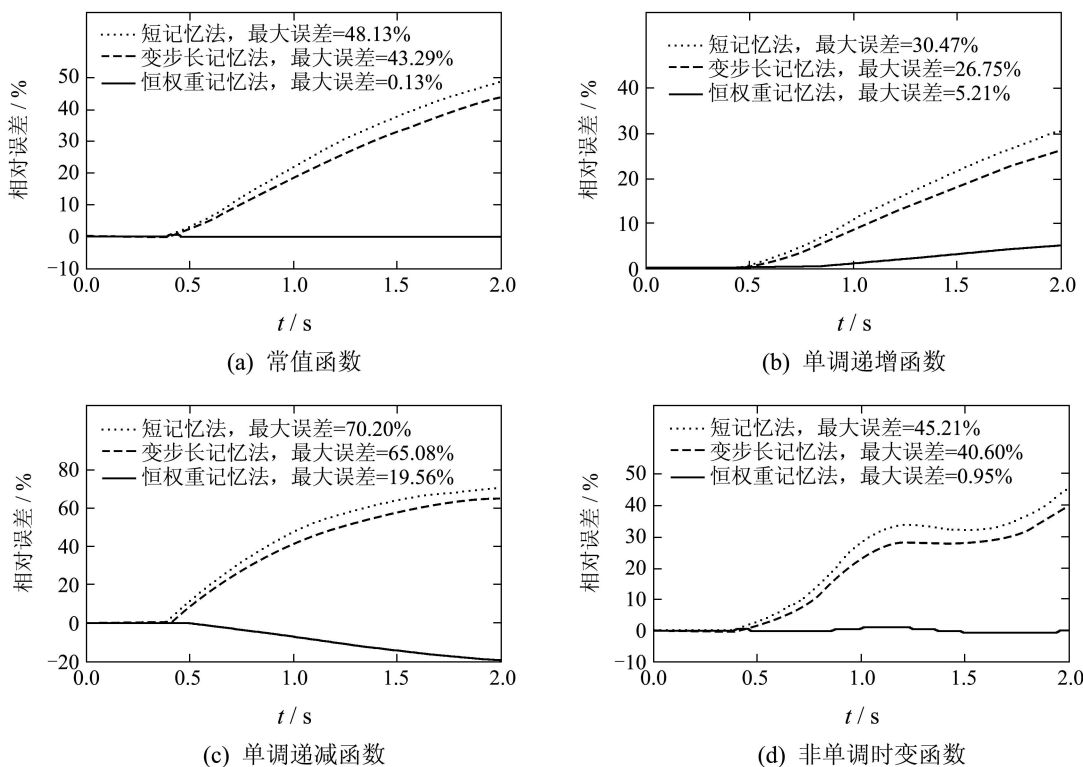


图 2 3种数值近似计算方法相对于全记忆法的相对误差

Fig. 2 Relative error of the three numerical approximate methods

3.2 计算复杂性比较(Comparison of complexity)

以上短记忆法和变步长记忆法的相对误差都很大, 不能满足数值计算精度的要求(见图2). Podlubny已证明增大记忆时长 L 可以提高计算精度^[23]. 图3显示了在最大相对误差为1%时, 3种快速数值近似计算方法的计算复杂性(每个采样周期, 分数阶微分方程的数值求解时长). 各种数值近似计算方法相应的记忆时长和最大计算时间如表1所示.

表 1 最大相对误差为1%时, 3种数值近似计算方法的记忆时长和最长计算时间

Table 1 Memory time and maximum computing time of three numerical approximate methods with the maximum relative error of 1%

函数	短记忆法		变步长记忆法		恒权重记忆法	
	MT/s	CT/ μ s	MT/s	CT/ μ s	MT/s	CT/ μ s
CF	1.765	7.080	1.730	7.190	0.030	1.025
MIF	1.510	6.145	1.465	6.445	0.820	3.940
MDF	1.935	7.554	1.915	7.845	1.345	5.590
NMFV	1.760	7.210	1.715	7.290	0.390	2.465

其中: MT表示记忆时长(s), CT表示计算时间(μ s), CF表示常值函数, MIF表示单调递增函数, MDF表示单调递减函数, NMFV表示非单调时变函数.

同计算精度比较的情况类似, 无论函数 $f(t)$ 的单

调性如何, 恒权重记忆法的计算时间均要优于短记忆法和变步长记忆法. 当函数 $f(t)$ 为常值函数时, 恒权重记忆法的最大计算时长仅约为其他两种计算方法的1/7. 在4种不同单调性的情况下, 恒权重记忆法的记忆时长均为最短, 相应的计算时长和数据存量也最小. 所以, 其计算复杂性最优.

图2和图3也表明了函数 $f(t)$ 的单调性对数值近似计算性能的影响. 对于短记忆法和变步长记忆法, 依计算性能其由低到高的顺序为: 单调递减函数、常值函数、非单调时变函数、单调递增函数. 其原因可解释为: 当函数 $f(t)$ 单调递减时, 很久以前的历史信息相对于近期的历史信息大很多(即可以理解为其“权重”很大), 直接舍弃势必导致很大的截断误差. 相反, 当函数 $f(t)$ 单调递增时, 很久以前的历史信息相对于近期的历史信息小很多, 全部舍弃导致的截断误差也较小. 恒权重记忆法未将很久以前的历史信息舍弃, 而是对相应的权重系数 ω_j^α 做了近似处理后再全部记忆. 其计算性能由低到高的顺序为: 单调递减函数、单调递增函数、非单调时变函数、常值函数. 特别是当函数 $f(t)$ 属于后两种情况时, 其表现出优异的计算性能, 能够快速准确地计算出系统输出. 同时, 由于实际分数阶系统的输出不为单调递增或单调递减, 所以, 本文所提出的恒权重记忆法很好地顺应了实际分数阶系统快速准确计算的要求.

以上结论是在 $t \in [0, 2]$ s 的情况下得到的. 在实际应用中, 当时间 t 无限增大时, 恒权重记忆法相对于短记忆法和变步长记忆法的优越性体现得更为明显, 且能满足实际系统快速准确计算的要求.

为了准确求解分数阶系统的输出, 必须有足够长的记忆时长 L 保证计算精度. 但是, 记忆时长的无限增加, 势必导致计算时长和数据存储量溢出. 以非单调时变函数为例, 表2显示了当记忆时长增加至1500s时 ($t \in [0, 2000]$ s), 短记忆法和变步长记忆法所对应的最大相对误差和最长计算时间.

显然, 两者的计算时间均溢出(大于系统的采样周期5 ms). 但恒权重记忆法只需将记忆时长 L 增至100s, 就能使计算精度达到0.12%, 且计算时间

仅0.36 ms. 图4显示了, 当 $L=100$ s时, 3种近似计算方法的数值结果.

表2 当 $L=1500$ s时, 短记忆法和变步长记忆法的计算性能

Table 2 Calculated performance of short memory principle and variable memory principle with $L = 1500$ s

	ME/%	LT/ms
短记忆法	4.19	5.78
变步长记忆法	4.16	5.85

表中, ME表示最大相对误差(%), LT表示最长计算时间(ms).

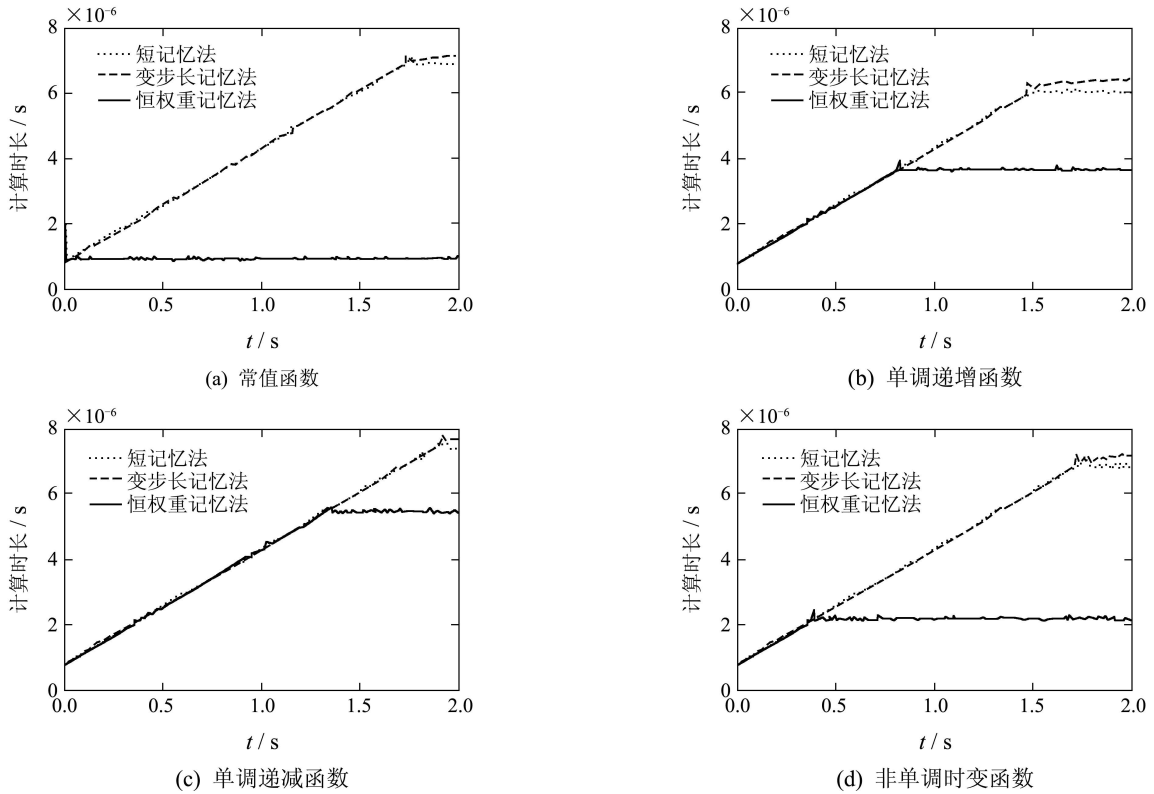
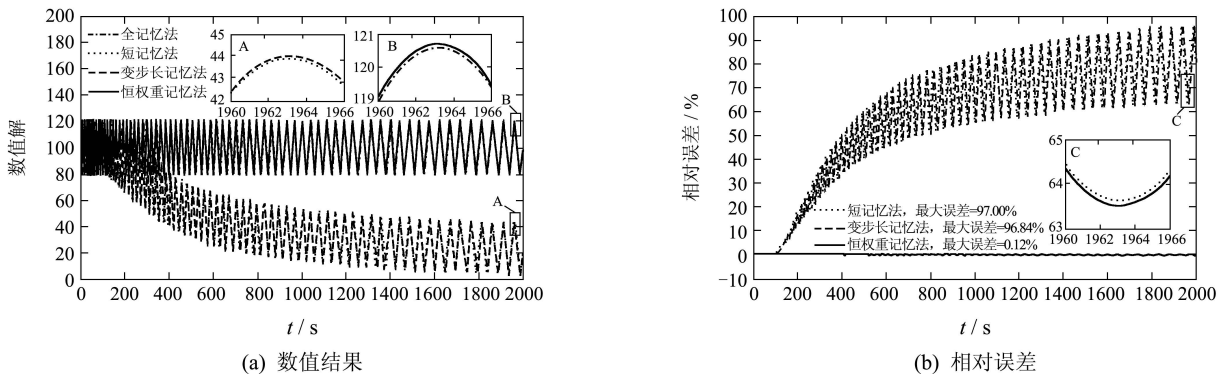


图3 最大相对误差为1%时, 分数阶微分方程数值求解计算时长

Fig. 3 Time for solving fractional-order differential equation with the maximum relative error of 1%



(a) 数值结果

(b) 相对误差

图4 当 $L = 100$ s时, 分数阶微分方程的数值近似解

Fig. 4 Numerical solutions of fractional-order differential equation with $L = 100$ s

4 结论(Conclusions)

本文在短记忆法和变步长记忆法的基础上, 提出了恒权重记忆法. 恒权重记忆法在计算精度和计算复杂性上都有很大的提高, 并有效地化解了两者顾此失彼的矛盾. 恒权重记忆法的快速性和准确性, 为分数阶控制系统的实现奠定了强有力的基础. 数值结果表明, 数值近似计算的精度和复杂性在一定程度上还受系统输出单调性的影响. 如何将其影响降至最低是值得继续研究的问题.

参考文献(References):

- [1] WOLFF I. A study of polarization capacity over a wide frequency band[J]. *Physical Review*, 1926, 27(6): 755 – 763.
- [2] BATES J, CHU Y. Electrode-electrolyte interface impedance: experiments and model[J]. *Annals of Biomedical Engineering*, 1992, 20(3): 349 – 362.
- [3] BENCHELLAL A, POINOT T, TRIGEASSOU J C. Approximation and identification of diffusive interfaces by fractional models[J]. *Signal Processing, Special Section: Fractional Calculus Applications in Signals and Systems*, 2006, 86(10): 2712 – 2727.
- [4] SCHIESSEL H, METZLER R, BLUMEN A, et al. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions[J]. *Journal of Physical A: Mathematical and General*, 1995, 28(23): 6567 – 6584.
- [5] WESTERLUND S. Capacitor theory[J]. *IEEE Transactions Dielectrics and Electrical Insulation*. 1994, 1(5): 826 – 839.
- [6] CAO H L, LI X, DENG Z H, et al. Modeling for electrical characteristics of solid oxide fuel cell based on fractional calculus[C] //2009 Chinese Control and Decision Conference. Guilin, China: IEEE, 2009: 319 – 322.
- [7] PETRAS I, VINAGRE B M. Practical application of digital fractional-order controller to temperature control[J]. *Acta Montanistica Slovaca*, 2002, 7(2): 131 – 137.
- [8] 王振滨, 曹广益, 朱新坚. 分数阶线性定常系统的稳定性及其判据[J]. *控制理论与应用*, 2004, 21(6): 922 – 926. (WANG Zhenbin, CAO Guangyi, ZHU Xinjian. Stability conditions and criteria for fractional order linear time invariant systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 922 – 926.)
- [9] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^\lambda D^\mu$ -controllers[J]. *IEEE Transactions Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.
- [10] MONJE C A, VINAGRE B M, FELIU V, et al. Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for industry applications[J]. *Control Engineering Practice*, 2008, 16(7): 798 – 812.
- [11] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶PID控制器设计[J]. *控制理论与应用*, 2007, 24(5): 771 – 776. (XUE Dingyu, ZHAO Chunna. Fractional order PID controller design for fractional order system[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 771 – 776.)
- [12] 朱呈祥, 邹云. 分数阶控制研究综述[J]. *控制与决策*, 2009, 24(2): 161 – 169. (ZHU Chengxiang, ZOU Yun. Summary of research on fractional-order control[J]. *Control and Decision*, 2009, 24(2): 161 – 169.)
- [13] OUSTALOUP A, LEVRON F, NANOT F, et al. Frequency band complex non integer differentiator: Characterization and synthesis[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2000, 47(1): 25 – 40.
- [14] CHEN Y Q, VINAGRE B M. A new IIR-type digital fractional order differentiator signal processing[J]. *Fractional Signal Processing and Applications*, 2003, 83(11): 2359 – 2365.
- [15] CHEN Y Q, VINAGRE B M, PODLUBNY I. Continued fraction expansion approaches to discretizing fractional order derivatives-an expository review[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 38(1): 155 – 170.
- [16] VINAGRE B M, PODLUBNY I, HERNÁNDEZA, et al. Some approximations of fractional order operators used in control theory and applications[J]. *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 2000, 3(3): 231 – 248.
- [17] TSENG C C. Design of variable and adaptive fractional order FIR differentiators signal processing[J]. *Special Section: Fractional Calculus Applications in Signals and Systems*, 2006, 86(10): 2554 – 2566.
- [18] TSENG C C, PEI S, HSIA S. Computation of fractional derivatives using Fourier transform and digital FIR differentiator[J]. *Signal Processing*, 2000, 80(1): 151 – 159.
- [19] 曹军义, 曹秉刚. 分数阶控制器的数字实现及其特性[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(5): 791 – 794. (CAO Junyi, CAO Binggang. Digital realization and characteristics of fractional order controllers[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 791 – 794.)
- [20] LUBICH C. Discretized fractional calculus[J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 1986, 17(3): 704 – 419.
- [21] MACHADO J, GALHANO A. Approximating fractional derivatives in the perspective of system control[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2009, 56(4): 401 – 407.
- [22] 曾庆山. 分数阶控制系统的研究及其在MCFC中的应用[D]. 上海: 上海交通大学, 2004. (ZENG Qingshan. *Research on fractional-order control systems and its application to molten carbonate fuel cell*[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2004.)
- [23] PODLUBNY I. Fractional differential equations[J]. *San Diego: Academic Press*, 1999.
- [24] FORD N J, SIMPSON A C. The numerical solution of fractional differential equations: speed versus accuracy[J]. *Numerical Algorithms*, 2001, 26(4): 333 – 346.
- [25] CHIEN CHENG T. Design of fractional order digital FIR differentiators[J]. *Signal Processing Letters*, 2001, 8(3): 77 – 79.
- [26] HUI Z, GANG Q, LIMIN Y, et al. Design of fractional order digital FIR differentiators using frequency response approximation[C] //2005 International Conference on Communications, Circuits and Systems. Hong Kong, China: IEEE, 2005: 1318 – 1321.
- [27] CHANG W. Two-dimensional fractional-order digital differentiator design by using differential evolution algorithm[J]. *Digital Signal Processing*, 2009, 19(4): 660 – 667.
- [28] 林然. 分数阶常微分方程的高阶多步法和变分数阶扩散方程的数值方法[D]. 厦门: 厦门大学, 2007. (LIN Ran. *High order multiple for fractional ordinary differential equation and numerical method for variable order fractional diffusion equation*[D]. Xiamen: University of Xiamen, 2007.)

作者简介:

曹红亮 (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为燃料电池非线性复杂系统、分数阶系统建模与控制, E-mail: chlhust@hotmail.com;

李曦 (1977—), 男, 副教授, 通讯作者, 目前研究方向为非线性系统控制与诊断、分数阶控制器设计, E-mail: lixi@mail.hust.edu.cn;

邓忠华 (1962—), 男, 教授, 目前研究方向为分数阶控制、计算机网络控制, E-mail: zhonghua.deng@wh-hm.com;

秦忆 (1945—), 男, 教授, 目前研究方向为非线性控制系统理论及其应用, E-mail: qinyihust@126.com.