

马尔科夫链的粒子群优化算法全局收敛性分析

任子晖^{1,2}, 王 坚¹, 高岳林³

(1. 同济大学 计算机集成制造系统研究中心, 上海 201804; 2. 安徽农业大学 信息与计算机学院, 安徽 合肥 230036;
3. 北方民族大学 信息与计算科学学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 本文对粒子群优化算法的全局收敛性进行了分析, 给出了粒子速度和位置的一步转移概率, 然后从粒子状态所构成的马尔科夫链着手, 分析了此马尔科夫链的一系列性质, 证明了粒子状态空间的可约性和非齐次性, 并验证粒子状态空间是非常返态的, 最后表明马尔科夫链不存在平稳过程的条件, 继而从转移概率的角度证明了算法不是全局收敛的。

关键词: 粒子群优化; 转移概率; Markov链; 状态空间; 全局收敛性
中图分类号: TP18 **文献标识码:** A

The global convergence analysis of particle swarm optimization algorithm based on Markov chain

REN Zi-hui^{1,2}, WANG Jian¹, GAO Yue-lin³

(1. Research Center of Computer Integrate Manufacture System, Tongji University, Shanghai 201804, China;
2. College of Information and Computer, Anhui Agriculture University, Hefei Anhui 230036, China;
3. College of Information and Computing Sciences in North University for Ethnic, Yinchuan Ningxia 750021 China)

Abstract: We analyze the global convergence of particle swarm optimization(PSO) algorithm. The one-step transition probabilities of particle velocity and particle position are calculated. Several properties about this Markov chain are investigated. The reducibility and nonhomogeneity are proved. It is shown that the particle state space is non-recurrent. These properties show the nonexistence of conditions for this Markov chain to be a stationary process. Thus, we confirm from the transition probability that the PSO algorithm is not global convergent.

Key words: particle swarm optimization(PSO); transition probability; Markov chain; state space; global convergence

1 引言(Introduction)

粒子群优化(particle swarm optimization, PSO)是由Kennedy和Eberhart等人^[1]提出的一类模拟群体(swarm)智能行为的优化算法. 其思想来源于对鸟群捕食行为的研究, PSO以模拟鸟的群体智能为特征, 以求解连续变量优化问题为背景. 在PSO中, 每只鸟被称为一个粒子, 每个粒子用其几何位置和速度向量表示, 在问题的求解中, 每个粒子参考自己的既定方向, 所经历的最优方向和整个鸟群所公共认识到的最优方向来确定自己的飞行. 目前对PSO算法的理论分析还不是很多, 也不是很完善. Ozcan和Mohan^[2]在一组假设的前提下, 提出了在这组假设下粒子的位置和速度可近似为一正弦波的形状, 瞬间不同的参数决定了波的频率和振幅; Clerk和Kennedy^[3]在文献[2]的基础上, 给出了construction factor method的3种模型并给出了仿真结果; Trelea^[4]

在文献[2]的基础上给出了PSO模型的稳定区域和不稳定的区域并对粒子的运动轨迹进行了分析; Van Den等^[5, 6]分析了基本PSO算法的全局收敛性和局部收敛性, 并提出了一种新的PSO算法, 并证明此算法是局部收敛的; Emara和Fattah^[7]提出了一种基于连续系统的PSO模型, 并用李雅普诺夫方法证明了该算法的稳定性; 曾建潮等^[8]在文献[5]的基础上给出了以概率1收敛于全局最优的PSO算法, 对已有的PSO算法给出了一种统一的模型, 通过线性系统理论分析了其收敛性^[9]; Jiang和Luo等^[10]从粒子群优化的随机过程着手, 通过分析其位置的方差和期望收敛来确定参数之间的关系; 金欣磊等^[11]在随机系统理论的基础上对PSO算法均方收敛的稳定性进行了分析推导, 给出了其以均方收敛的一个充分条件; Zhang^[12]在分析粒子群算法中加速因子对粒子位置的期望和方差的影响, 并在此基础上给出了

认知系数和社会系数的一组值用来提高算法的稳定性; 潘峰等^[13]对粒子群算法的模型进行了分析研究, 说明了参数的选择与粒子群体陷入局部极值点导致的早熟收敛情况有关, 分析了PSO算法中的三种粒子模型的运动特性, 给出了PSO模型渐进稳定的充分条件; 李宁^[14]从差分方程分析的角度对粒子群算法中粒子的轨迹进行了分析研究. 文献[15~18]给出了一种新的自适应的PSO算法, 但作者并没对其收敛性进行理论的分析, 仅仅是从数值实验的角度验证了新算法收敛性; 文献[19]针对非凸问题, 提出了一种改进的PSO算法, 其中应用了混沌序列结合线性递减和交叉策略来平衡粒子的全局搜索能力和局部搜索能力, 从而达到快速收敛的效果; 文献[20]提出一种变采样周期的粒子群优化模型, 利用误差动力系统的李雅普诺夫函数分析优化行为的稳定性, 通过粒子的轨迹分析, 得出轨迹收敛的采样时间约束条件. 但是上述的这些大部分都是基于随机过程和线性时变离散系统的收敛性分析, 并没有从PSO算法中粒子状态空间构成的Markov链来考虑算法的收敛性, 本文恰恰是从这个角度进行分析推理, 最后得出PSO算法并非全局收敛的结论.

2 基本的PSO算法(The basic particle swarm optimization algorithm)

PSO采用下列的公式对粒子群进行操作:

$$v_{i,d} = \omega v_{i,d} + c_1 r_1 (p_{i,d} - x_{i,d}) + c_2 r_2 (p_{g,d} - x_{i,d}), \quad (1)$$

$$x_{i,d} = x_{i,d} + v_{i,d}. \quad (2)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, m; d = 1, 2, \dots, D$; 学习因子 c_1, c_2 是非负常数; r_1, r_2 是 $[0,1]$ 间的随机数; $v_{i,d} \in [-v_{\max}, v_{\max}]$, v_{\max} 是常数; ω 为惯性系数.

不考虑式(1)(2)中的粒子数和维数, 得到:

$$V_{t+1} = \omega V_t + c_1 r_{1,t} (P_i - X_t) + c_2 r_{2,t} (P_g - X_t), \quad (3)$$

那么有式(4)成立:

$$X_{t+1} = (1 + \omega - (c_1 r_{1,t} + c_2 r_{2,t})) X_t - \omega X_{t-1} + c_1 r_{1,t} P_i + c_2 r_{2,t} P_g. \quad (4)$$

迭代终止条件根据具体问题一般选为最大迭代次数或粒子群迄今为止搜索到的最优位置满足预定最小适应阈值, 方程(1)和(2)是基本的PSO算法.

3 PSO 状态空间的 Markov 链(The Markov chain of PSO state space)

在式(1)(2)中, $c_1 r_1, c_2 r_2$ 取固定值, 设 $\omega \in (0, 1)$, $r_1, r_2 \in [0, |\omega|]$, 这有助于说明粒子的状态空间构成Markov链, 这样 r_1, r_2 实际上还是 $(0,1)$ 间的随机

数那么在式(1)(2)构成的随机系统中, 系统在 t 时刻所处的状态 $\xi(t)$ 转移到 $t + 1$ 时刻所处的新状态 $\xi(t + 1)$ 完全是由它在 t 时刻的状态、 t 的值和随机因子 ω 完全确定的, 且 ω 与系统在时刻 t 之前(包括 t) 的状态无关, 这样PSO算法中粒子状态构成的系统就构成了一个有随机影响的系统 Ω . 于是 $t + 1$ 时刻的状态 $\xi(t + 1)$ 可用式(5)表示:

$$\xi(t + 1) = f(t, \xi(t), \omega), \quad (5)$$

于是系统 Ω 就能够从状态 $\xi(t)$ 出发表示出系统 Ω 在任意时刻 $T (T > t)$ 的状态. 因为PSO算法中粒子的速度和位置都与过去的速度、位置、个体极值和全局极值有关, 所以单单是粒子的速度和位置的状态构不成Markov链. 在此设粒子的速度、位置、个体极值和全局极值组合共同构成的状态称为一个Markov状态, 即状态 $\xi(t) = (V_t, X_t, PL_i, P_g)$ 称为粒子在 t 时刻的一个Markov状态, 其中 $X_t, PL_i, P_g \in A$, A 表示问题的可行域. 这主要是因为粒子的状态空间满足马尔科夫链定义, 即粒子的下一时刻的状态空间仅仅与前一时刻的状态空间有关, 且状态空间为可列集, 故而其构成一个马尔可夫链. 由此粒子的状态空间可表示为

$$\Xi = \{ \xi = (V, X, PL, P_g) | X, PL, P_g \in A, f(P_g) \leq f(PL) \leq f(X), V \in [V_{\min}, V_{\max}] \}. \quad (6)$$

需要注意的是本文所讨论的问题都是指极小化问题, 讨论的PSO算法均指基本的PSO算法. 下面参考文献[14], 给出一些相关的定义.

定义 1 状态等价. 设在系统 Ω 中粒子群的状态集合为 $S = (\Xi_1, \Xi_2, \dots, \Xi_N)$, 则若 $\xi \in S, \zeta \in \xi$, 记 $\varphi(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^N \chi_{|\zeta|(C_i)}$ 表示粒子群状态 ξ 包含粒子状态 ζ 的个数, 其中 $\chi_{|B|}$ 表示集合 B 的示性函数. 如果 $\exists \xi_1, \xi_2 \in S$, 使得对 $\forall \zeta \in \Xi$, 有 $\varphi(\xi_1, \zeta) = \varphi(\xi_2, \zeta)$, 则称 ξ_1, ξ_2 等价, 记作 $\xi_1 \sim \xi_2$.

定义 2 状态等价类. 由等价关系 “ \sim ” 在 S 上诱导的粒子群状态等价类记作 $L = S / \sim$, 简称粒子群等价类. 粒子群等价类存在以下性质:

- 1) 某等价类 L 内任意粒子群状态之间都是等价的, 即 $\xi_1 \sim \xi_2, \forall \xi_1, \xi_2 \in L$;
- 2) L 内任意粒子群状态与 L 外的任意粒子群状态不等价, 即 $\xi_1 \not\sim \xi_2, \forall \xi_1 \in L, \xi_2 \notin L$;
- 3) 任意两个不同等价类没有交集, 即 $L_1 \cap L_2 = \emptyset, \forall L_1 \neq L_2$.

下面讨论粒子从状态 $\xi(i)$ 转移到状态 $\xi(j)$ 的转移概率, 即 $p(\xi_i \rightarrow \xi_j)$ 为粒子从状态 $\xi(i)$ 转移到状

态 $\xi(j)$ 的一步转移概率:

$$p(\xi_i \rightarrow \xi_j) = p(V_i \rightarrow V_j) \times p(X_i \rightarrow X_j) \times p(PL_i \rightarrow PL_j) \times p(Pg_i \rightarrow Pg_j). \quad (7)$$

由粒子的迭代公式和位置的更新准则可以得到下面的两个式子, 即

$$p(PL_i \rightarrow PL_j) = \begin{cases} 1, & f(PL_j) \leq f(PL_i), \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (8)$$

$$p(Pg_i \rightarrow Pg_j) = \begin{cases} 1, & f(Pg_j) \leq f(Pg_i), \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (9)$$

根据图1, 能够给出速度从*i*状态转移到*j*状态的一步转移概率.

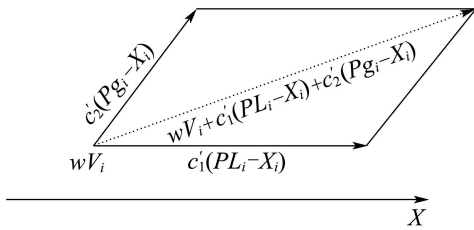


图1 速度更新公式示意图

Fig. 1 The sketch map of velocity renewal

实际上假设粒子共有*n*维, 那么概率测度为:

$$K(V_i \rightarrow V_j) = \int_{v_{i1}}^{v_{j1}} \int_{v_{i2}}^{v_{j2}} \cdots \int_{v_{in}}^{v_{jn}} dv_1 dv_2 \cdots dv_n = (v_{j1} - v_{i1})(v_{j2} - v_{i2}) \cdots (v_{jn} - v_{in}) = \int_{|\Delta_1|} dv = |\Delta_1|, \quad (10)$$

于是有

$$p(V_i \rightarrow V_j) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta_1|}, & V_j \in [\omega V_i, \omega V_i + c_1'(PL_i - X_i) + c_2'(Pg_i - X_i)], \\ 1, & j = i + 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (11)$$

同理根据图2, 能够计算出粒子的位置从*i*状态转移到*j*状态的一步转移概率.

图2中粒子位置的一步转移概率具体表达式如下:

$$p(X_i \rightarrow X_j) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta_2|}, & X_j \in [\omega V_i + X_i, \omega V_i + X_i + c_1'(PL_i - X_i) + c_2'(Pg_i - X_i)], \\ 1, & j = i + 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad (12)$$

$$p(X_i \rightarrow X_j) = \begin{cases} \frac{1}{|\Delta_1|}, & V_j \in [\omega V_i + X_i, \omega V_i + X_i + c_1'(PL_i - X_i) + c_2'(Pg_i - X_i)], \\ 1, & j = i + 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (13)$$

其中: $c_1' = c_1 r_1$, $c_2' = c_2 r_2$ 都为定值; $|\Delta_1|, |\Delta_2|$ 分别表示图1和图2中超立方体的体积, 因为从第一步迭代开始, 粒子的速度和位置都是有限制的, 一旦迭代结果超出了规定的范围, 根据式(11)~(13)可以知道其一步转移概率也为零, 这样与后面的证明并不是矛盾的, 也就是说即使迭代的速度和位置超过了规定的范围, 也不会影响后面的结论, 所以在此就没有讨论其范围.

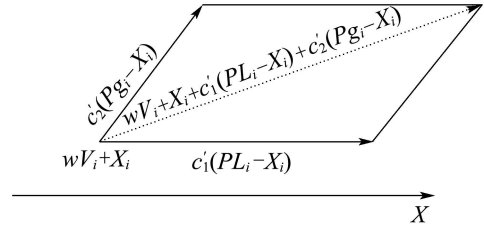


图2 位置更新公式示意图

Fig. 2 The sketch map of position renewal

结合参考文献[14], 给出一些相关的定义.

定义3 粒子群状态转移. 粒子群状态由 ζ_i 一步转移到状态 ζ_j , 其中 $\zeta_i, \zeta_j \in \Xi$, 记作 $T_\Xi(\zeta_i) = \zeta_j$, 其一步转移概率表示为

$$p(T_\Xi(\zeta_i) = \zeta_j) = \prod_{i=1}^N p(T_\Xi(\zeta_{ik}) = \zeta_{jk}), \quad (14)$$

也就是说粒子群状态由 ζ_i 一步转移到状态 ζ_j 的概率为粒子群 ζ_i 内的所有粒子的状态同时转移成粒子群 ζ_j 内所有粒子的状态.

定义4 粒子群等价类间的转移. 假设由等价关系“~”在*S*上诱导的两个粒子群状态等价类

$$L_i = (\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{in}), L_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \cdots, \xi_{jn}),$$

则 L_i 一步转移到 L_j 记为 $T_L(L_i) = L_j$, 相应的一步转移概率为

$$p(T_L(L_i) = L_j) = \sum_{x=1}^n \sum_{y=1}^m p(T_S(\zeta_{ix}) = \zeta_{jy}). \quad (15)$$

这说明粒子群等价类间的转移包括等价类 L_i 中的所有粒子群转移到等价类 L_j 中的所有粒子群.

定义5 粒子最优状态集. 定义粒子的最优解为 g^* , 那么粒子的最优状态集为

$$M = \{s^* = (X, V, PL, Pg)\} = \{s^* = (g^*, V, g^*, g^*)\},$$

其中 $s^* \in S$. 若 $M = S$, 则在可行解空间中, 每个解不仅仅是可行解而且是最优解, 此时进行优化是无意义的, 所以下面的讨论都是在 $M \subset S$ 的情形下的.

定理 1 由粒子的最优状态构成的粒子最优状态集 M 是闭集.

证 由定义3, 对 $\forall \xi_i \in M, \xi_j \notin M$ 且 $\xi_i \in S$, 有 $T_S(\xi_i) = \xi_j$ 的概率为

$$p(T_S(\xi_i) = \xi_j) = \prod_{k=1}^N P(T_S(\xi_{ik}) = \xi_{jk}),$$

那么在 M 中至少有一个粒子的状态达到了最优, 设 $\exists \xi^* \sim \xi_{i_0k}$ 为最优状态, 即至少 $\exists \xi_{i_0k} \in M$, 那么至少存在 $p(T_S(\xi_{i_0k}) = \xi_{jk}) = 0$, 故此时 $p(T_S(\xi_i)) = 0$, 这说明粒子最优状态集 M 是闭集.

4 基于 Markov 链的 PSO 算法收敛性分析 (The convergence analysis of PSO algorithm based on Markov chain)

下面对 PSO 状态空间的性质先进行研究.

定理 2 PSO 算法中粒子状态空间是可约的.

证 要证粒子的状态空间可约, 则需证明在此状态空间内至少存在着一个闭集. 由定理1可知, 粒子的最优状态集是闭集, 故粒子的状态空间是可约的.

定理 3 PSO 算法中粒子状态空间是非齐次的.

证 因 $\xi(t-1)$ 与 X, V, PL, Pg 有关, 而这些量的值均与 $t-1$ 有关, $p(T_S(\xi(t-1)) = \xi(t))$ 与 $\xi(t-1)$ 中所有粒子的状态有关, 而粒子的状态与粒子所处的时刻有关, 尽管 $p(PL(t-1) \rightarrow PL(t))$ 和 $p(Pg(t-1) \rightarrow Pg(t))$ 与 $t-1$ 无关, 但是 $p(X(t-1) \rightarrow X(t))$ 和 $p(V(t-1) \rightarrow V(t))$ 与 X, V, PL, Pg 都有关, 所以 $p(T_S(\xi(t-1)) \rightarrow \xi(t))$ 是与时刻 $t-1$ 有关的, 故粒子状态空间是非齐次的.

定理 4 PSO 算法中粒子状态空间是非常返态的.

证 记粒子从 i 状态转移到 j 状态的 k 步转移概率是 $p(T_S^{(k)}(i, j) = p^{(k)}(i, j))$, $k = 1, 2, \dots, \infty$, 根据前面的推导有:

$$\begin{aligned} p(i, i) &= \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(i \rightarrow i) = \sum_{k=1}^{\infty} p^{(k)}(i, i) = \\ &= p^{(1)}(X_i, X_i)p^{(1)}(V_i, V_i) + \\ &= p^{(2)}(X_i, X_i)p^{(2)}(V_i, V_i) + \dots + \\ &= p^{(n)}(X_i, X_i)p^{(n)}(V_i, V_i) + \dots + \\ &= p^{(\infty)}(X_i, X_i)p^{(\infty)}(V_i, V_i). \end{aligned} \tag{16}$$

根据定义1知道, 粒子的任意两种状态间是可达的, 故 $p(i \rightarrow i)$ 的最大值是从状态 i 一步转移到状态 i 的

一步转移概率, 其值为式(17), $p(i \rightarrow i)$ 的最小值是指中间通过无穷步的转移才还原到原来的状态, 其值为式(18), 因为公式右面的式子的每项构成等比数列, 故有 $\min p(i, i) = \frac{|\Delta_1|^2 - 1}{|\Delta_1|^4}$.

$$\max p(i, i) = \frac{1}{|\Delta_1 \Delta_2|} < 1, \tag{17}$$

$$\min p(i, i) = \frac{1}{|\Delta_1 \Delta_2|} + \frac{1}{|\Delta_1^2 \Delta_2^2|} + \frac{1}{|\Delta_1^n \Delta_2^n|} + \dots + \frac{1}{|\Delta_1^\infty \Delta_2^\infty|}. \tag{18}$$

需要注意的是单单从以上的一些粒子状态空间的性质并不能保证其不具有平稳分布. 假设状态 $\xi(j)$ 是最优的, 如果算法收敛, 那么经过 ∞ 次状态转移后, 粒子转移到最优状态的概率应该为1, 因为 $p^{(n)}(\xi_i \rightarrow \xi_j) = \sum_{k=1}^N p^{(n)}(\xi_{ik} \rightarrow \xi_{jk})$, 再结合前面的式子, 可以得到粒子从状态 $\xi(i)$ 转移到状态 $\xi(j)$ 的 n 步转移概率为

$$p^{(n)}(\xi_i \rightarrow \xi_j) = \frac{1}{|\Delta_1| |\Delta_1^2| \dots |\Delta_1^n|}, \tag{19}$$

或者为零. 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} p^{(n)}(\xi(i) \rightarrow \xi(j)) = 0$, 所以 PSO 算法不收敛. 需要注意的是从这里得到的是指基本的 PSO 算法不收敛, 那么对于 PSO 算法的改进算法是不是也不收敛还不能过早的下结论, 这需要对具体算法进行分析研究才能确定.

5 结论与展望(Inclusion and prospect)

本文对粒子的状态空间进行了叙述, 给出了其构成 Markov 链的一种形式, 给出了 Markov 链的一系列定义, 同时对此 Markov 链的几种性质进行了分析与证明, 展示了其转移概率的具体表达式, 最后对粒子从一般状态转移到最优状态的转移概率进行了计算, 此概率几乎为零说明了 PSO 算法不是全局收敛的. 本文的结果为 PSO 算法的改进提供了理论指导, 并为更好的解决实际问题提供了算法改进的基础和依据. 下一步作者将对 PSO 算法进行更加深入的理论研究, 并针对 PSO 的缺陷, 提出一种改进的更优的算法. 并对算法进行数值验证和理论的分析. 如可以利用鞅序列收敛理论和非线性动力学的理论对 PSO 算法的收敛性和稳定性进行进一步的研究, 因为 PSO 算法中粒子的轨迹就构成了一个下鞅序列, 而 PSO 算法中整个粒子的运动系统可以看作是一个非线性的动力学系统, 通过对算法中粒子轨迹的研究和粒子整个运动系统的研究, 对 PSO 算法进行改进. 针对 PSO 算法中粒子状态步转移概率的情况及粒子轨迹的收敛情况, 下一步拟将改变 PSO 的基本运动方程, 提高粒子轨迹的收敛速度, 同时改变粒子的状态转移概率, 最终达到加快算法收敛的目的, 且

对这种新的PSO算法进行理论的分析,并应用在实际的工程问题中。

参考文献(References):

- [1] KENNEDY J, EBERHART R. Particle swarm optimization[C] // *IEEE International Conference on Neural Networks*. New York: IEEE, 1995: 1942 – 1948.
- [2] OZCAN E, MOHAN C K. Particle swarm optimization surfing the waves[C] // *Proceedings of Congress on Evolutionary Computation*. Piscataway: IEEE, 1999: 1939 – 1944.
- [3] CLERK M, KENNEDY J. The particle swarm-explosion stability and convergence in a multi-dimensional complex space[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(1): 58 – 73.
- [4] TRELEA I C. The particle swarm optimization algorithm convergence analysis and parameter selection[J]. *Information Processing Letters*, 2003, 85(6): 317 – 325.
- [5] VAN DEN BERGH F. *An analysis of particle swarm optimizer*[D]. South Africa: University of Pretoria, 2002.
- [6] VAN DEN BERGH F, ENGELBRECHT A P. A study of particle swarm optimization particle trajectories[J]. *Information Sciences*, 2006, 178(8): 937 – 971.
- [7] EMARA H M, FATTAH A H A. Continuous swarm optimization technique with stability analysis[C] // *Proceedings of American Control Conference*. New York: IEEE, 2004: 2811 – 1817.
- [8] 曾建潮, 介靖, 崔志华. 微粒群算法[M]. 北京: 科学出版社, 2004. (ZENG Jianchao, JIE Jing, CUI Zhihua. *Particle Swarm Optimization*[M]. Beijing: Science Press, 2004.)
- [9] 曾建潮, 崔志华. 微粒群算法的统一模型及分析[J]. 计算机研究与发展, 2006, 43(1): 96 – 100. (ZENG Jianchao, CUI Zhihua. A new unified model of particle swarm optimization and its theoretical analysis[J]. *Journal of Computer Research and Development*, 2006, 43(1): 96 – 100.)
- [10] JIANG M, LUO Y P, YANG S Y. Stochastic convergence analysis and parameter selection of the standard particle swarm optimization algorithm[J]. *Information Processing Letters*, 2007, 102(110): 8 – 16.
- [11] 金欣磊, 马龙华, 吴铁军, 等. 基于随机过程的PSO收敛性分析[J]. 自动化学报, 2007, 33(12): 1263 – 1268. (JIN Xinlei, MA Longhua, WU Tiejun, et al. Convergence analysis of the particle swarm optimization based on stochastic processes[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(12): 1263 – 1268.)
- [12] ZHANG W. The selection of acceleration factor for improving stability of particle swarm optimization[C] // *The 4th International Conference on Natural Computation*. New York: IEEE, 2008: 376 – 380.
- [13] 潘峰, 陈杰, 甘明刚, 等. 粒子群优化算法模型分析[J]. 自动化学报, 2006, 32(3): 368 – 377. (PAN Feng, CHEN Jie, GAN Minggang, et al. Model analysis of particle swarm optimizer[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(3): 368 – 377.)
- [14] 李宁. 粒子群优化算法的理论分析与应用研究[D]. 武汉: 华中科技大学, 2006. (LI Ning. *Analysis and application of particle swarm optimization*[D]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology, 2006.)
- [15] ZHAN Z H, ZHANG J, LI Y, et al. Adaptive particle swarm optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, 2009, 39(6): 1362 – 1382.
- [16] YEN G G, LEONG W F. Dynamic multiple swarms in multiobjective particle swarm optimization[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, 2009, 39(4): 890 – 912.
- [17] 朴海国, 王志新, 张华强. 基于合作粒子群算法的PID神经网络非线性控制系统[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(12): 1317 – 1324. (PU Haiguo, WANG Zhixin, ZHANG Huaqiang. Cooperative-PSO-based new learning algorithm for PID neural network and nonlinear control design[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(12): 1317 – 1324.)
- [18] 董娜, 陈增强, 孙青林, 等. 基于粒子群优化的有约束模型预测控制器[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(9): 965 – 969. (DONG Na, CHEN Zengqiang, SUN Qinglin, et al. Particle-swarm optimization algorithm for model predictive control with constraints[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(9): 965 – 969.)
- [19] PARK J B, JEONG Y W, SHIN J R, et al. An improved particle swarm optimization for nonconvex economic dispatch problems[J]. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2010, 25(1): 156 – 167.
- [20] 冯远静, 俞立, 冯祖仁. 采样粒子群优化模型及其动力学行为分析[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(1): 28 – 34. (FENG Yuanjing, YU Li, FENG Zuren. Sample particle swarm optimization and its dynamic behavior[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(1): 28 – 34.)

作者简介:

任子晖 (1983—), 女, 博士研究生, 研究方向为计算智能及其应用, E-mail: renzihui2006@126.com;

王 坚 (1961—), 男, 博士生导师, 研究方向为智能计算、智能生产、智能交通系统及仿真, E-mail: jwang@tongji.edu.cn;

高岳林 (1964—), 男, 硕士生导师, 研究方向为最优化理论与方法, E-mail: gaoyuelin88@163.com.