

末端有未知扰动的分布参数柔性机械臂的鲁棒边界控制

吴忻生^{1,2}, 邓 军²

(1. 华南理工大学 精密电子制造装备教育部工程研究中心, 广东 广州 510640;

2. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 本文研究在柔性机械臂的末端具有未知扰动的边界控制, 以降低机械臂的振动. 柔性机械臂的动态特性由偏微分方程表示的分布参数模型描述. 在机械臂的末端边界基于Lyapunov直接法进行控制, 以调节机械臂的振动. 应用本文所提出的边界控制方法, 可达到外界干扰下的指数稳定性. 所提出的控制方法与系统参数无关, 可确保在参数变化下系统具有鲁棒性. 最后对所提控制方法的有效性进行了数值模拟.

关键词: 边界控制; 偏微分方程; 分布参数模型; Lyapunov直接法; 指数稳定性

中图分类号: TP24 **文献标识码:** A

Robust boundary control of a distributed-parameter flexible manipulator with tip unknown disturbance

WU Xin-sheng^{1,2}, DENG Jun²

(1. Engineering Research Centre for Precision Electronic Manufacturing Equipment of Ministry of Education, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640 China;

2. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: A boundary control for a distributed-parameter flexible manipulator with tip unknown disturbance is developed to reduce the manipulator vibrations. The dynamic behavior of the flexible manipulator is described by a distributed parameter model in terms of partial differential equations(PDEs). The control is applied to the tip boundary of the manipulator based on the Lyapunov direct method to regulate the manipulator vibrations. With the proposed boundary control, the exponential stability under external disturbances is achieved. The proposed control is independent of system parameters, ensuring the robustness of the system performances to variations in parameters. Numerical simulations for demonstrating the effectiveness of the proposed control are presented.

Key words: boundary control; partial differential equations(PDEs); distributed parameter model; Lyapunov's direct method; exponential stability

1 引言(Introduction)

柔性机械臂由于具有重量轻, 能耗低, 仅需用较少的动力而能获得较大的机动性, 运动速度快, 有较高承载能力, 较大的操作空间和很高的效率等优点, 因而取代刚性机械臂广泛应用于机器人、机械工程和航天技术等领域^[1]. 但由于其具有弹性变形, 会引起机械臂的振动, 进而影响操作精度, 阻碍了其在工程中的广泛应用. 因此, 为保持上述优点, 须开展对柔性机械臂的结构设计及控制方法的研究. 国内外学者已做了许多工作, 其研究内容主要分为4个方面: 1) 柔性机械臂动力学模型的建立; 2) 柔性机械臂数值仿真的实验研究; 3) 柔性机械臂控制方法的研究及控制器的实现; 4) 柔性机械臂控制的优化设计问题. 其中2)和3)的研究是两大主要方面, 其目的

是抑制柔性机械臂在运动中产生的变形和振动, 以保证机械臂末端准确的位姿或在运动过程中精确的轨迹.

柔性机械臂是典型的机电耦合的动力系统, 也是带有分布参数的强耦合、非线性、时变系统, 且具有逆运动学不确定性, 所以本质上要由无限维分布参数模型来描述^[2]. 但描述实际系统的变量的能量总是有限的, 从模态分析考虑, 只有 n 个低阶模态可以被激励. 在保证精度的前提下高阶模态的影响可以忽略, 从而可把问题简化为有限维.

柔性连杆机械臂的动力学建模的方法很多, 发展也比较成熟. 一般说来, 柔性连杆机械臂因为连杆柔性会在运行过程中产生挠曲变形、轴向变形和剪切变形, 因而从动力学角度看, 每根柔性连杆都可视为

一段Timoshenko梁. 考虑到机械臂连杆的长度总比其截面尺寸大得多, 运行过程中所产生的轴向变形和剪切变形相对于挠曲变形而言非常小, 因而在动力学模型过程中常常可忽略二者的影响, 将每根柔性连杆简化为Euler-Bernoulli梁处理. 对柔性臂的建模方法主要有模态展开法^[3]、有限元法^[4]、集中质量法^[5]和有限段法^[6]等. 忽略高频模态得到的截断模型其存在的问题有: 1) 当模态数增加时, 控制器的阶次也增加; 2) 由于忽略的高频模态, 控制器和观测器可能会产生溢出问题; 3) 从工程角度看, 控制器可能难以实现, 因为经常需要全状态测量观测器. 对此的改进方法是直接基于PDEs进行系统分析和控制器设计^[7].

柔性机械臂控制方法分为被动控制和主动控制. 被动控制方法是通过在柔性机械臂上粘贴粘弹性大阻尼材料来增大其结构阻尼, 从而达到减小臂在运动和定位时的弹性振动的目的^[8]. 该方法对高频振动具有较好的阻尼作用, 但是对于低频振动的阻尼效果不佳, 甚至不起作用. 主动控制方法是通过改变作用在柔性机械臂上的驱动力或力矩来阻止臂在运动中和定位时的弹性振动, 从而达到提高臂的定位精度和轨迹跟踪平稳性的目的^[8]. 主动控制能够有效地降低柔性臂的各阶弹性模态的振动, 尤其是对臂的低频模态的振动具有较好的阻尼作用, 这是被动阻尼控制所无法比拟的. 主动控制的难点在于实时计算问题.

主动控制的方法有PID控制^[9]、前馈控制^[10]、最优控制^[11]、自适应控制^[12]、假设模态法^[13]、变结构控制^[14]、滑模控制^[15]、基于 H_∞ 理论方法^[16]、边界控制^[17~21]等. 其中边界控制利用由偏微分方程组描述的分布参数模型来消除控制的溢出不稳定性, 需要相对较少的传感器和执行器. 文献[22]分析了假设模态的数目对系统响应的影响, 导出了模态截断与系统惯性矩阵的关系. 文献[23]提出了单柔性机械臂振动的脉冲控制方法, 正确地选择脉冲形式可达到很高的闭环控制精度. 脉冲控制策略不需要在机械臂上施加额外的作用器, 以转动铰处脉冲力矩形式出现, 算法简单, 易于实现实时控制. 可向多臂情况推广. 文献[24]基于最优控制模拟思想提出了柔性机械臂的两点边值逆动力学方法. 文献[25]使用压电驱动器作为执行机构, 利用 H_∞ 控制理论设计柔性机械臂的振动主动控制系统, H_∞ 控制方法是控制系统设计的一种通用方法, 具有很强的鲁棒性. 文献[26, 27]将系统的输出重新定义为关节电机转角和柔性模态变量的线性组合, 提出了终端滑模控制策略, 使整个系统渐进稳定. 虽然这种输出重新定义的方法较简单, 但输出位置选择比较困难, 跟踪精度也难以保证. 如果不采用端点位移, 而以易于控制

的关节电机转角作为系统输出, 则难以抑制柔性模态振动, 带来很大的端点轨迹跟踪误差. 文献[28]综述了对柔性臂的控制方法, 包括PD控制, 自适应控制, 神经网络方法, 超前/滞后控制, 输出重定义方法, 奇异摄动, 滑模变结构方法, 边界控制等21种控制方法. 文献[29]综述了与柔性机械臂动态特性分析相关的433篇文献, 文献[30]也对柔性机械臂建模理论与控制方法进行了研究综述.

在实际柔性机械臂系统中, 由于边界驱动器模型的不确定性, 存在边界扰动. 相对于早期的柔性机械臂研究工作, 大多数系统并没有考虑到边界的未知扰动情况. 本文以单柔性机械臂为研究对象, 基于其分布参数模型设计了边界控制准则, 通过在末端的控制器对柔性机械臂末端进行控制, 控制目标是设计一个控制器来降低柔性机械臂的振动. 本文考虑柔性机械臂在分布式扰动下的横向小变形振动, 可将其视为Euler-Bernoulli梁模型. 本文采用Hamilton原理对系统进行建模, 得到了用PDEs描述的分布参数模型, 并设计了边界控制减小机械臂振动. 应用所提控制方法, 系统可以实现有界稳定性, 并利用经典的Lagrange乘子法^[31, 32]和Lyapunov直接方法给予数学证明. 数字仿真实验的结果较好的验证了控制器的有效性.

2 问题描述和预备知识(Problem formulation and preliminaries)

2.1 动力学分析(Dynamics analysis)

如图1所示为一个典型的具有末端未知扰动的柔性机械臂示意图, 其中: $y(L, t)$, $\dot{y}(L, t)$ 和 $\ddot{y}(L, t)$ 分别表示末端有效载荷的偏移量、速度和加速度, L 表示臂的长度, M 表示末端有效载荷的质量, $u(t)$ 是动力定位推进器的控制力, $d(t)$ 表示作用于载荷未知的但一致有界的外部环境干扰力.

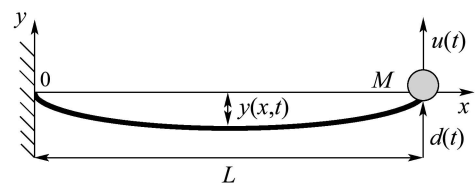


图1 一个典型的具有末端未知扰动的柔性梁

Fig. 1 A typical flexible beam with tip unknown disturbance

此柔性臂系统的动能 E_k 可表示为

$$E_k = \frac{1}{2} M \left[\frac{\partial y(L, t)}{\partial t} \right]^2 + \frac{1}{2} \rho \int_0^L \left[\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right]^2 dx, \quad (1)$$

其中: x 和 t 分别表示独立的空间和时间变量, $y(x, t)$ 在时间 t 时在柔性臂位置 x 处的偏移量, $\rho > 0$ 为柔性臂单位长度的均匀质量.

由弯曲变形导致的势能 E_p 可用下式表示:

$$E_p = \frac{1}{2}EI \int_0^L \left[\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right]^2 dx + \frac{1}{2}T \int_0^L \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right]^2 dx, \quad (2)$$

其中: EI 是柔性臂的弯曲刚度, T 是柔性臂的张力. 本文假设 EI 为常数. 式(2)的第1项是由于弯曲导致的, 第2项是由于张力导致的.

外界干扰对有效载荷所做的功可表示为 $W_f = d(t)y(L,t)$.

阻尼对柔性臂和载荷所做的功表示为

$$W_d = - \int_0^L c \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right] y(x,t) dx - d_s \frac{\partial y(L,t)}{\partial t} y(L,t).$$

其中: $c > 0$ 表示结构分布阻尼系数, d_s 表示荷载的阻尼, 本文假设 c 和 d_s 为常数.

在柔性臂的顶端边界处引入边界控制 $u(t)$ 产生一个横向运动以减弱振动. 控制力所做的功可表示为 $W_m = u(t)y(L,t)$.

作用于系统的总功, 以 W 表示为

$$W = W_f + W_d + W_m = \int_0^L -c \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right] y(x,t) dx + [u(t) + d(t) - d_s \frac{\partial y(L,t)}{\partial t}] y(L,t). \quad (3)$$

基于 Euler-Bernoulli 梁的假设和小偏移, Hamilton 原理允许以变分的形式对运动方程求导. Hamilton 原理表示为^[33]

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_k - E_p + W) dt = 0. \quad (4)$$

其中: t_1 和 t_2 是两个时刻, $t_1 < t < t_2$ 是操作间隔, δ 表示变分操作符. 将式(1)~(3)代入式(4), 应用变分和分部积分, 可得系统的控制方程如下:

$$\begin{cases} \rho \ddot{y}(x,t) + EI y^{(4)} - T y'' + c \dot{y} = 0, \\ \forall (x,t) \in (0,L) \times [0,\infty). \end{cases} \quad (5)$$

系统的边界条件为

$$\begin{cases} y'(0,t) = 0, y''(L,t) = 0, y(0,t) = 0, \\ -EI y^{(3)}(L,t) + T y'(L,t) = \\ u(t) + d(t) - d_s \dot{y}(L,t) - M \ddot{y}(L,t), \\ \forall t \in [0,\infty). \end{cases} \quad (6)$$

其中第4项同时为系统的载荷运动方程.

注 1 使用如下记号降低符号的复杂性:

$$\begin{aligned} y'(x,t) &= \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}, y''(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}, \\ y^{(3)}(x,t) &= \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3}, y^{(4)}(x,t) = \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4}, \end{aligned}$$

$$\dot{y}(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}, \ddot{y}(x,t) = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}.$$

假设 1 对末端有效载荷的干扰 $d(t)$, 假设存在常数 $\bar{d} \in \mathbb{R}^+$, 有 $|d(t)| \leq \bar{d}, \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty)$. 这种假设是合理的, 因为时变干扰 $d(t)$ 的影响是外源的, 具有有限能量, 因而是有界的, 即 $d(t) \in L_\infty$.

2.2 预备知识(Preliminaries)

为方便稳定性分析, 本文列出如下有界输入有界输出的引理和性质.

引理 1^[34] 令 $y_1(x,t), y_2(x,t) \in \mathbb{R}$, 其中 $x \in [0,L], t \in [0,\infty)$, 有如下不等式成立:

$$\begin{aligned} |y_1 y_2| &\leq \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} y_1 \right) (\sqrt{\delta} y_2) \right| \leq \frac{1}{\delta} y_1^2 + \delta y_2^2, \\ \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}, \delta > 0. \end{aligned}$$

引理 2^[35] 令 $y(x,t) \in \mathbb{R}$ 为定义在 $x \in [0,L], t \in [0,\infty)$ 上的函数, 且满足如下边界条件:

$$y(0,t) = 0, \forall t \in [0,\infty), \quad (7)$$

则有如下不等式组成立:

$$\int_0^L y^2 dx \leq L^2 \int_0^L [y']^2 dx, \forall x \in [0,L], \quad (8)$$

$$y^2 \leq L \int_0^L [y']^2 dx, \forall x \in [0,L]. \quad (9)$$

如果除式(7)外, 函数 $y(x,t)$ 还满足如下边界条件:

$$y'(0,t) = 0, \forall t \in [0,\infty),$$

则有如下不等式组成立:

$$\int_0^L [y']^2 dx \leq L^2 \int_0^L [y'']^2 dx, \forall x \in [0,L], \quad (10)$$

$$y^2 \leq L^3 \int_0^L [y'']^2 dx, \forall x \in [0,L], \quad (11)$$

$$[y']^2 \leq L \int_0^L [y'']^2 dx, \forall x \in [0,L]. \quad (12)$$

性质 1^[35] 如果由式(1)定义的系统(5)(6)的动能在 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty)$ 是有界的, 那么对 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty), \dot{y}(x,t), \dot{y}'(x,t), \dot{y}''(x,t)$ 是有界的.

性质 2^[35] 如果由式(2)定义的系统(5)(6)的势能在 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty)$ 是有界的, 那么对 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0,\infty), y^{(3)}(x,t), y^{(4)}(x,t)$ 是有界的.

3 控制设计(Control design)

控制目标是减小柔性机械臂的振动, 即在有效载荷上的时变干扰 $d(t)$ 下使 $y(x,t)$ 最小化.

为使由控制方程(5)描述且具有式(6)边界条件的系统稳定, 本文提出以下控制律:

$$\begin{aligned} u &= -EI y^{(3)}(L,t) + T y'(L,t) - \text{sgn} v \bar{d} + \\ & d_s \dot{y}(L,t) + M \dot{y}^{(3)}(L,t) - kv. \end{aligned} \quad (13)$$

其中: $\text{sgn}(\cdot)$ 表示 sign 函数, k 是一正常数, 辅助信号 v

定义为

$$v = \dot{y}(L, t) - y^{(3)}(L, t). \quad (14)$$

对上式求导, 将结果方程乘以 M , 代入系统载荷运动方程, 有

$$M\dot{v} = EIy^{(3)}(L, t) - Ty'(L, t) + d - d_s\dot{y}(L, t) - M\dot{y}^{(3)}(L, t) + u. \quad (15)$$

将式(13)代入式(15), 有 $M\dot{v} = -kv + d - \text{sgn } v\bar{d}$.

注2 边界控制中的所有信号均可由传感器测得, 或由向后差分算法获得. $y(L, t)$ 可由机械臂顶端的激光位移传感器测得, $y'(L, t)$ 可由倾角计测得, $y^{(3)}(L, t)$ 可由剪力传感器测得, $\dot{y}(L, t)$ 和 $\dot{y}^{(3)}(L, t)$ 可分别对 $y(L, t)$ 和 $y^{(3)}(L, t)$ 应用向后差分算法计算得到. 此控制器设计不需知道扰动量的精确模型, 因此对系统参数的变化具有稳定鲁棒性. 控制设计是基于由式(5)(6)描述的分布参数模型.

考虑候选Lyapunov函数

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t). \quad (16)$$

其中能量项 $V_1(t)$, 附加项 $V_2(t)$ 和小交叉项 $V_3(t)$ 分别定义为:

$$V_1 = \frac{\beta}{2}\rho \int_0^L [\dot{y}]^2 dx + \frac{\beta}{2}EI \int_0^L [y'']^2 dx + \frac{\beta}{2}T \int_0^L [y']^2 dx, \quad (17)$$

$$V_2 = \frac{1}{2}Mv^2, \quad (18)$$

$$V_3 = \alpha\rho \int_0^L xy\dot{y}' dx. \quad (19)$$

其中: k 为控制参数, α 和 β 是两个正的权重小常数.

引理3 由式(16)给定的候选Lyapunov函数具有如下上下界:

$$0 \leq \lambda_1(V_1 + V_2) \leq V(t) \leq \lambda_2(V_1 + V_2).$$

其中 λ_1 和 λ_2 是两个正常数.

证 由式(19)可得 $|V_3| \leq \alpha\rho L \int_0^L ([y']^2 + [\dot{y}]^2) dx \leq \alpha_1 V_1$. 其中

$$\alpha_1 = \frac{2\alpha\rho L}{\min(\beta\rho, \beta T)},$$

有 $-\alpha_1 V_1 \leq V_3 \leq \alpha_1 V_1$. 考虑 α 是满足

$$0 < \alpha < \frac{\min(\rho, T)}{2\rho L}$$

的正的权值小常数, 有

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = 1 - \frac{2\alpha\rho L}{\min(\beta\rho, \beta T)} > 0,$$

$$\alpha_3 = 1 + \alpha_1 = 1 + \frac{2\alpha\rho L}{\min(\beta\rho, \beta T)} > 1.$$

进一步, 有 $0 \leq \alpha_2 V_1 \leq V_1 + V_3 \leq \alpha_3 V_1$. 给定如式

(16)所示的候选Lyapunov函数, 有

$$0 \leq \lambda_1(V_1(t) + V_2(t)) \leq V(t) \leq \lambda_2(V_1(t) + V_2(t)). \quad (20)$$

其中 $\lambda_1 = \min(\alpha_2, \frac{1}{2}M)$ 和 $\lambda_2 = \max(\alpha_3, \frac{1}{2}M)$ 是正常数. 证毕.

引理4 由式(16)给定的候选Lyapunov函数对时间的导数具有如下上界: $\dot{V}(t) \leq -\lambda V(t) + \varepsilon$. 其中: $\lambda > 0, \varepsilon > 0$.

证 将式(16)对时间求导, 有

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1 + \dot{V}_2 + \dot{V}_3. \quad (21)$$

式(21)的第1项为

$$\dot{V}_1 = A_1 + A_2 + A_3. \quad (22)$$

其中:

$$A_1 = \beta\rho \int_0^L \dot{y}\ddot{y} dx, \quad (23)$$

$$A_2 = \beta EI \int_0^L y''\dot{y}'' dx, \quad (24)$$

$$A_3 = \beta T \int_0^L y'\dot{y}' dx. \quad (25)$$

将控制方程(5)代入 A_1 , 有

$$A_1 = \beta \int_0^L \dot{y}(-EIy^{(4)} + Ty'' - c\dot{y}) dx. \quad (26)$$

应用边界条件, 且对式(24)分部积分, 有

$$\begin{aligned} A_2 &= \beta EI \int_0^L y'' d(\dot{y}') = \\ &\beta EI y'' \dot{y}' \Big|_0^L - \beta EI \int_0^L \dot{y}' y^{(3)} dx = \\ &-\beta EI y^{(3)} \dot{y} \Big|_0^L + \beta EI \int_0^L \dot{y} y^{(4)} dx = \\ &-\beta EI y^{(3)}(L, t) \dot{y}(L, t) + \beta EI \int_0^L \dot{y} y^{(4)} dx. \end{aligned} \quad (27)$$

应用边界条件, 且对式(25)分部积分, 有

$$\begin{aligned} A_3 &= \beta T \int_0^L y' d(\dot{y}) = \\ &\beta T y'(L, t) \dot{y}(L, t) - \beta T \int_0^L \dot{y} y'' dx. \end{aligned} \quad (28)$$

将方程(26)~(28)代入方程(22), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \beta[-EIy^{(3)}(L, t) + Ty'(L, t)]\dot{y}(L, t) - \\ &\beta c \int_0^L \dot{y}^2 dx. \end{aligned} \quad (29)$$

将式(14)代入式(29), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= -\frac{\beta EI}{2} [[\dot{y}(L, t)]^2 + [y^{(3)}(L, t)]^2] + \frac{\beta EI}{2} v^2 + \\ &\beta T y'(L, t) \dot{y}(L, t) - c\beta \int_0^L \dot{y}^2 dx. \end{aligned}$$

应用不等式(8)(9), 有

$$\dot{V}_1 \leq -\frac{\beta EI}{2} [[\dot{y}(L, t)]^2 + [y^{(3)}(L, t)]^2] +$$

$$\frac{\beta EI}{2} v^2 + \beta T \delta_1 [\dot{y}'(L, t)]^2 + \frac{\beta T}{\delta_1} [\dot{y}(L, t)]^2 - \beta c \int_0^L [\dot{y}]^2 dx.$$

其中 δ_1 是一任意的正常数.

应用不等式(12), 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\frac{\beta EI}{2} [[\dot{y}(L, t)]^2 + [y^{(3)}(L, t)]^2] + \\ & \frac{\beta EI}{2} v^2 + \beta T L \delta_1 \int_0^L [y''']^2 dx + \\ & \frac{\beta T}{\delta_1} [\dot{y}(L, t)]^2 - \beta c \int_0^L [\dot{y}]^2 dx. \end{aligned} \quad (30)$$

式(21)的第2项为

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = Mv\dot{v} = & -kv^2 + dv - \text{sgn } v \cdot v\bar{d} = \\ & -kv^2 + dv - |v|\bar{d} \leq -kv^2. \end{aligned} \quad (31)$$

式(21)的第3项为

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = \alpha \rho \int_0^L (x\ddot{y}^2 y' + x\dot{y}y') dx = \\ \alpha \int_0^L xy'[-EIy^{(4)} + Ty'' - c\dot{y}] dx + \\ \alpha \rho \int_0^L x\dot{y}y' dx. \end{aligned}$$

应用边界条件和分部积分, 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 \leq \alpha EIL^2 \delta_2 \int_0^L [y''']^2 dx + \frac{\alpha EIL}{\delta_2} [y^{(3)}(L, t)]^2 - \\ \frac{3\alpha EI}{2} \int_0^L [y''']^2 dx + \frac{\alpha TL^2}{2} \int_0^L [y''']^2 dx - \\ \frac{\alpha T}{2} \int_0^L [y']^2 dx + \\ \frac{\alpha cL}{\delta_3} \int_0^L [\dot{y}]^2 dx + \alpha cL\delta_3 \int_0^L [y']^2 dx + \\ \frac{\alpha \rho L}{2} [\dot{y}(L, t)]^2 - \frac{\alpha \rho}{2} \int_0^L [\dot{y}]^2 dx. \end{aligned} \quad (32)$$

将式(30)~(32)代入式(16), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -(\beta c + \frac{\alpha \rho}{2} - \frac{\alpha cL}{\delta_3}) \int_0^L [\dot{y}]^2 dx - \\ & (\frac{3\alpha EI}{2} - \alpha EIL^2 \delta_2 - \frac{\alpha TL^2}{2} - \beta T L \delta_1) \cdot \\ & \int_0^L [y''']^2 dx - (\frac{\alpha T}{2} - \alpha cL\delta_3) \int_0^L [y']^2 dx - (k - \\ & \frac{\beta EI}{2} u_a^2 - (\frac{\beta EI}{2} - \frac{\beta T}{\delta_1} - \frac{\alpha \rho L}{2}) [\dot{y}(L, T)]^2 - \\ & (\frac{\beta EI}{2} - \frac{\alpha EIL}{\delta_2}) [y^{(3)}(L, t)]^2 \leq \\ & -\lambda_3 (V_1(t) + V_2(t)). \end{aligned} \quad (33)$$

其中常数 $k, \alpha, \beta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ 的选取要满足如下条件:

$$\alpha \leq \frac{\min(\beta \rho, \beta T)}{2 \rho L}, \quad k - \frac{\beta EI}{2} \geq 0,$$

$$\frac{\beta EI}{2} - \frac{\beta T}{\delta_1} - \frac{\alpha \rho L}{2} \geq 0, \quad \frac{\beta EI}{2} - \frac{\alpha EIL}{\delta_2} \geq 0,$$

$$\sigma_1 = \beta c + \frac{\alpha \rho}{2} - \frac{\alpha cL}{\delta_3} > 0,$$

$$\sigma_2 = \frac{3\alpha EI}{2} - \alpha EIL^2 \delta_2 - \frac{\alpha TL^2}{2} - \beta T L \delta_1 > 0,$$

$$\sigma_3 = \frac{\alpha T}{2} - \alpha cL\delta_3 > 0,$$

$$\lambda_3 = \min(\frac{2\sigma_1}{\rho}, \frac{2\sigma_2}{EI}, \frac{2\sigma_3}{T}) > 0.$$

由式(20)(33), 有 $\dot{V}(t) \leq -\lambda V(t)$. 其中 $\lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_2} > 0$.

证毕.

由以上引理, 给出下列闭环机械臂系统的稳定性定理.

定理 1 对由式(5)描述的动态系统, 式(6)描述的边界条件, 在边界控制器(13)下, 系统具有如下的指数稳定性:

$$|y(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{T\lambda_1}} V(0)e^{-\lambda t}, \quad \forall x \in [0, L].$$

其中 λ 和 λ_1 是正常数.

证 由不等式(33), 候选Lyapunov函数(16)对时间的导数为

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda_3 (V_1 + V_2). \quad (34)$$

由不等式(20)(34), 可得其具有如下上界

$$\dot{V}(t) \leq -\lambda V(t). \quad (35)$$

其中 $\lambda = \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$. 将式(35)乘以 $e^{\lambda t}$, 有 $\frac{\partial}{\partial t}(Ve^{\lambda t}) \leq 0$. 对上述不等式积分得 $V(t) \leq V(0)e^{-\lambda t} \in L_\infty$. 上式表明 $V(t)$ 是有界的. 类似的, 利用不等式(9)和式(17), 可得

$$\frac{1}{2L} T y^2(x, t) \leq \frac{1}{2} T \int_0^L [y'(x, t)]^2 dx \leq$$

$$V_1(t) \leq V_1(t) + V_2(t) \leq \frac{1}{\lambda_1} V(t) \in L_\infty.$$

重排上述两不等式有

$$|y(x, t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{T\lambda_1}} V(0)e^{-\lambda t}, \quad \forall x \in [0, L].$$

由上述论证, 可得如下结论, 系统在控制律(13)作用下是指数稳定的. 状态变量 $y(x, t)$ 当 $t \rightarrow \infty$ 时以速度 λ 指数收敛于0. 证毕.

4 数字仿真(Numerical simulations)

以具有末端未知扰动、长为100 m的柔性机械臂为对象进行数值模拟, 验证所提控制律(13)的有效性. 本文使用有限差方法^[36]和边界控制方法^[37]来模拟系统性能.

柔性机械臂最初在静止状态, 由末端干扰所激

励. 相应的初始条件为

$$y(x, 0) = 0, \dot{y}(x, 0) = 0.$$

表1所示为柔性机械臂的详细参数.

表 1 柔性机械臂的参数

Table 1 Parameters of the flexible manipulator

参数	参数描述	参数值
L	机械臂的长度	100 m
EI	机械臂的弯曲硬度	5 Nm ²
T	张力	10 N
ρ	机械臂单位长度的质量	0.1 kg·m ⁻¹
M_s	机械臂的末端质量	1 kg

在柔性机械臂的末端由下列方程产生的干扰 $d(t)$ 如图2所示:

$$d(t) = [3 + \sin(0.3t) + \sin(0.5t) + \sin(0.7t)] \times 10^{-2}.$$

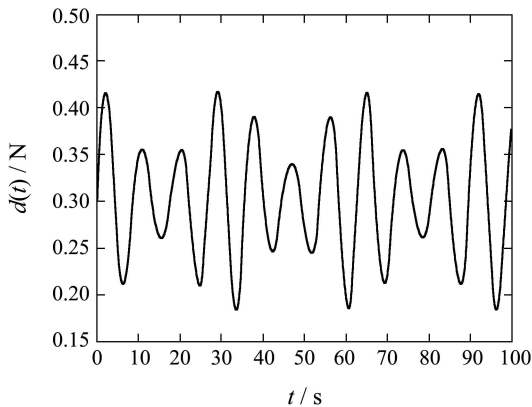


图 2 干扰 $d(t)$

Fig. 2 Disturbance $d(t)$

在自由振动下, 即 $u(t) = 0$, 柔性机械臂的偏移量如图3所示. 在控制律(13)下, 选择 $k = 1 \times 10^4$, 在末端有干扰下臂的偏移量如图4所示.

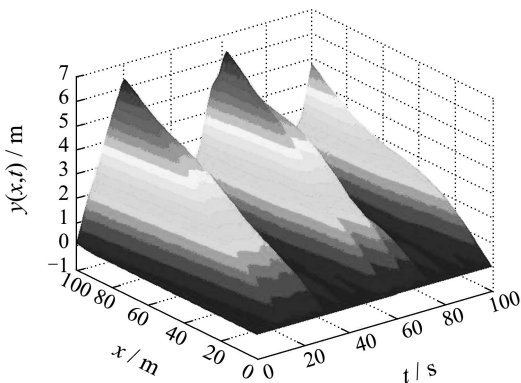


图 3 在无控制下柔性机械臂的偏移量

Fig. 3 Displacement of the flexible manipulator without control

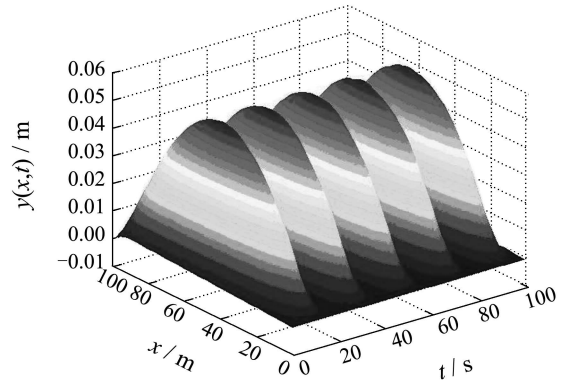


图 4 在控制律作用下柔性机械臂的偏移量

Fig. 4 Displacement of the flexible manipulator with control

由图3和图4可知, 提出的控制律能使柔性机械臂在它平衡位置的小邻域内稳定. 臂末端的偏移量 $y(100, t)$ 在有控制律和没有控制律下的响应如图5所示. 由图5可看出提出的边界控制律能使末端在期望的位置附近. 在 $x = 50$ m 的臂处也检验了其振动偏移量, 在有控制律和没有控制律下的响应 $y(50, t)$ 如图6所示. 相应的边界控制律 $u(t)$ 如图7所示. 实际的控制输入在 $0 \sim 45$ N 之间变化.

为了验证系统的指数稳定效果, 本文改变系统的初始条件为:

$$y(x, 0) = x, \dot{y}(x, 0) = 0.$$

从图8可以看到机械臂在设计边界控制下指数衰减为0.

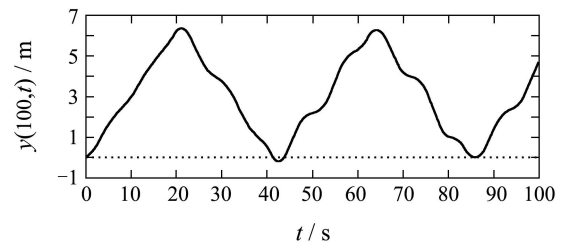


图 5 在没有控制律(实线)和有控制律(点线)下柔性机械臂末端的偏移量 $y(100, t)$

Fig. 5 Displacement of the top flexible manipulator, $y(100, t)$ for controlled (solid) and uncontrolled (dashed)

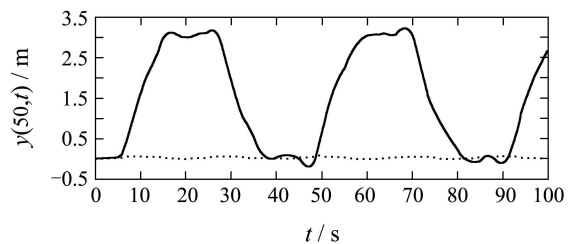


图 6 在没有控制律(实线)和有控制律(点线)下柔性机械臂中间位置处的偏移量 $y(50, t)$

Fig. 6 Displacement of the flexible manipulator at $x = 50$ m, $y(50, t)$ for controlled (solid) and uncontrolled (dashed)

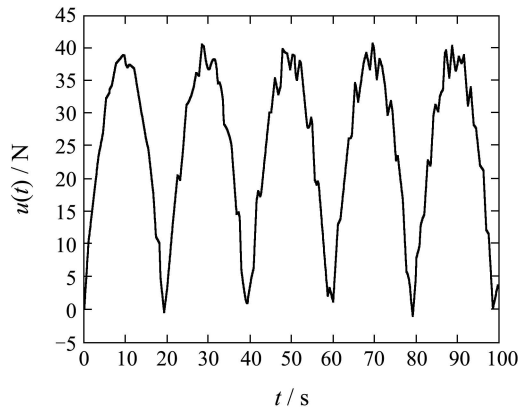
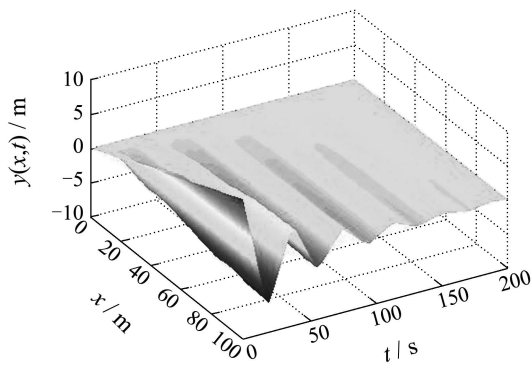
图7 控制输入 $u(t)$ Fig. 7 Control input $u(t)$ 

图8 柔性机械臂指数稳定

Fig. 8 Exponentially stable of the flexible manipulator with control

5 结论(Conclusion)

本文研究了在末端具有未知干扰的分布参数柔性机械臂的振动控制问题. 基于PDEs描述的分布参数模型设计了一个控制器进行边界控制, 避免了传统的基于截断模型导致的问题. 由于考虑了边界未知扰动, 本文控制器使用了 $\text{sgn}(\cdot)$ 函数来处理位置扰动, 并且控制算法中不需要知道边界扰动的精确模型, 大大提高了系统的鲁棒性能. 应用所提控制方法, 在自由振动条件下系统可达指数稳定性, 并利用Lyapunov直接方法给予证明. 控制策略与系统参数无关, 因而容易执行. 最后对所提出的边界控制进行数值模拟, 验证了所提方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] 郭军, 李传辉, 代桂成. 双连杆柔性机械臂的动力学仿真[J]. 宇航学报, 2006, 27(5): 1044 – 1049.
(GUO Jun, LI Chuanhui, DAI Guicheng. Dynamic simulation of two links flexible manipulator[J]. *Journal of Astronautics*, 2006, 27(5): 1044 – 1049.)
- [2] 刘明治, 刘春霞. 柔性机械臂动力学建模和控制研究[J]. 力学进展, 2001, 31(1): 1 – 8.
(LIU Mingzhi, LIU Chunxia. The study on dynamics modeling and control of flexible mechanical arms[J]. *Advances in Mechanics*, 2001, 31(1): 1 – 8.)
- [3] CHEN W. Dynamic modeling of multi-link flexible robotic manipulators[J]. *Computers and Structures*, 2001, 79(2): 133 – 195.
- [4] FATTAH A, ANGLES J. Dynamics of the cooperating flexible link manipulators-planar case[J]. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering*, 1997, 21(1): 1 – 17.
- [5] 丁希仑, 张启先. 机器人柔性臂动力学建模的D-Holzer法[J]. 机械工程学报, 1999, 35(3): 25 – 28.
(DING Xilun, ZHANG Qixian. A new dynamic modeling method of D-Holzer of the flexible manipulator[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 1999, 35(3): 25 – 28.)
- [6] HUSTON R L. A lumped parameter method in the nonlinear analysis of flexible multibody systems[J]. *Computers and Structures*, 1994, 50(3): 421 – 432.
- [7] GE S S, LEE T H, ZHU G. Improving regulation of a single-link flexible manipulator with strain feedback[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1998, 14(1): 179 – 185.
- [8] 刘广瑞. 柔性机械臂振动控制研究[J]. 机电产品开发与创新, 2005, 18(3): 26 – 27.
(LIU Guangrui. Study of vibration control of flexible manipulation arm[J]. *Development & Innovation of Machinery & Electrical products*, 2005, 18(3): 26 – 27.)
- [9] WANG D, VIDYASAGAR M. Transfer function for a single flexible link[C] // *Proceedings of the IEEE Internet Conference on Robot Automation*. Scottsdale: [s.n.], 1989: 1042 – 1047.
- [10] 张铁民, 郭治, 刘又午. 柔性机械臂振动的前馈控制[J]. 机械科学与技术, 1998, 17(4): 630 – 632.
(ZHANG Tiemin, GUO Zhi, LIU Youwu. A feedforward control strategy on the vibration of a flexible manipulator[J]. *Mechanical Science and Technology*, 1998, 17(4): 630 – 632.)
- [11] CANNON R H JR, SCHMITZ E. Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot[J]. *International Journal of Robotics Research*, 1984, 3(3): 62 – 75.
- [12] YANG K J, HONG K S, MATSUNO F. Energy-based control of axially translating beams: varying tension, varying speed, and disturbance adaptation[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2005, 13(6): 1045 – 1054.
- [13] ZHANG D J, LIU Y W, HUSTON RONALD L. Computer Aided analysis of flexible member in consideration of the effects of dynamic stiffening[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 1994, 7(4): 257 – 267.
- [14] GE S S, LEE T H, ZHU G, et al. Variable structure control of a distributed-parameter flexible beam[J]. *Journal of Robotic Systems*, 2001, 18(1): 17 – 27.
- [15] 刘才山, 刘又午, 王建国. 柔性机械臂的动力学模型及滑模变结构控制[J]. 振动与冲击, 1998, 17(1): 24 – 29.
(LIU Caishan, LIU Youwu, WANG Jianming. Dynamic modeling and variable structure control of a flexible beam[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1998, 17(1): 24 – 29.)
- [16] 刘广瑞, 刘丽冰, 刘又午. 柔性机械臂的 H_∞ 鲁棒控制[J]. 河北工业大学学报, 1998, 27(2): 47 – 51.
(LIU Guangrui, LIU Libing, LIU Youwu. H_∞ robust control of a flexible manipulator arm[J]. *Journal of Hebei University of Technology*, 1998, 27(2): 47 – 51.)
- [17] MORGUL O. On boundary control of single link flexible robot arms[C] // *Proceedings of the 13th Triennial World Congress of International Federation of Automatic Control(IFAC)*. San Francisco: [s.n.], 1996: 127 – 132.
- [18] QUEIROZ M S DE, DAWSON D M, AGARWAL M, et al. Adaptive nonlinear boundary control of a flexible link robot arm[J]. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 1999, 15(4): 779 – 787.
- [19] FARD M, SAGATUN S I. Exponential stabilization of a transversely vibrating beam by boundary control via Lyapunov's direct method[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2001, 123(2): 195 – 200.

- [20] ENDO T, MATSUNO F, KAWASAKI H. Simple boundary cooperative control of two one-link flexible arms for grasping[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(10): 2470 – 2476.
- [21] GE S S, HE W, HOW B V E, et al. Boundary control of a coupled nonlinear flexible marine riser[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2010, 18(5): 1080 – 1091.
- [22] 王大龙, 陆佑方, 郭九大. 单连杆柔性机械臂动力学模型分析[J]. 吉林工业大学学报, 1998, 28(2): 51 – 56.
(WANG Dalong, LU Youfang, GUO Jiuda. Model analysis of a single-rod flexible robotic manipulator[J]. *Journal of Jilin University of Technology*, 1998, 28(2): 51 – 56.)
- [23] 毕世华, 黄文虎, 邵成勋. 单柔性机械臂振动的脉冲控制[J]. 振动工程学报, 1993, 6(3): 298 – 304.
(BI Shihua, HUANG Wenhua, SHAO Chengxun. Vibration control of a single-link flexible manipulator[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 1993, 6(3): 298 – 304.)
- [24] 毕世华, 黄文虎, 邵成勋, 等. 柔性机械臂两点边值逆动力学方法-理论分析和实验结果[J]. 力学学报, 1997, 29(3): 373 – 379.
(BI Shihua, HUANG Wenhua, SHAO Chengxun, et al. Two-point boundary – value inverse dynamic methods of flexible manipulators-theoretical analysis and experimental results[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 1997, 29(3): 373 – 379.)
- [25] 方勃, 耿英, 耿辉. 基于 H_∞ 理论的柔性机械臂振动主动控制[J]. 沈阳建筑大学学报(自然科学版), 2008, 24(3): 486 – 489.
(FANG Bo, GENG Ying, GENG Hui. Active vibration control for flexible manipulators based on H_∞ control theory[J]. *Journal of Shenyang Jianzhu University(Natural Science)*, 2008, 24(3): 486 – 489.)
- [26] 张袞娜, 张德江, 冯勇. 基于混沌遗传算法的柔性机械手滑模控制器优化设计[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(3): 451 – 455.
(ZHANG Nianona, ZHANG Dejiang, FENG Yong. The optimal design of terminal sliding controller for flexible manipulators based on chaotic genetic algorithm[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(3): 451 – 455.)
- [27] 王艳敏, 冯勇. 参数不确定柔性机械手的终端滑模控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(6): 1049 – 1052.
(WANG Yanmin, FENG Yong. Terminal sliding mode control for flexible manipulators with uncertain parameters[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(6): 1049 – 1052.)
- [28] BENOSMAN M, LE VEY G. Control of flexible manipulators: A survey[J]. *Robotica*, 2004, 22(5): 533 – 545.
- [29] DWIVEDY S K, EBERHARD P. Dynamic analysis of flexible manipulators, a literature review[J]. *Mechanism and Machine Theory*, 2006, 41(7): 749 – 777.
- [30] 王树新, 员今天, 石菊荣, 等. 柔性机械臂建模理论与控制方法研究综述[J]. 机器人, 2002, 24(1): 86 – 91.
(WANG Shuxin, YUAN Jintian, SHI Jurong, et al. A roadmap of research on modeling and control strategy for flexible manipulators[J]. *Robot*, 2002, 24(1): 86 – 91.)
- [31] VAPNYARSKII I B. *Lagrange Multipliers, in Hazewinkel, Michiel, Encyclopaedia of Mathematics*[M]. New York: Springer, 2001.
- [32] YAN Q X, FENG D X. Feedback stabilization of nonuniform Timoshenko beam with dynamical boundary[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(5): 673 – 677.
- [33] GOLDSTEIN H, POOLE C P, SAFKO J L. *Classical Mechanics*[M]. 3rd edition. New York: Addison Wesley Press, Inc., 1951.
- [34] RAHN C D. *Mechanronic Control of Distributed Noise and Vibration*[M]. New York: Springer, 2001.
- [35] QUEIROZ M S, DAWSON D M, NAGARKATTI S P, et al. *Lyapunov Based Control of Mechanical Systems*[M]. Boston: Birkhauser, 2000.
- [36] SMITH G D. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*[M]. Oxford, United Kingdom: Oxford University Press, 1985.
- [37] NIEDZWECKI J M, LIAGRE P Y F. System identification of distributed-parameter marine riser model[J]. *Ocean Engineering*, 2003, 30(11): 1387 – 1415.

作者简介:

吴忻生 (1961—), 男, 副教授, 主要研究方向为智能检测与智能控制、自动化技术和智能系统的研究及其工程应用以及电子产品开发, E-mail: auxswu@scut.edu.cn;

邓 军 (1985—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为智能检测与智能控制、机器视觉等, E-mail: d.jun.scut@gmail.com.