

一般耦合结构时变时滞复杂网络的同步准则

郭 凌, 年晓红, 潘 欢

(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 研究一般耦合结构时变时滞复杂网络的同步问题, 取消了复杂网络外部耦合矩阵是对称且不可简约的约束. 对于一般的外部耦合矩阵, 考虑了具有复数特征根的情况, 并对复数域上的向量进行相应的处理. 基于Lyapunov稳定性理论, 利用矩阵分解技巧及线性矩阵不等式方法, 通过构造适当的Lyapunov泛函, 得到了网络系统实现同步的充分条件. 为验证所得结论的有效性, 对网络同步问题进行了数值仿真. 仿真结果显示本文的同步准则较已有研究具有更小的保守性.

关键词: 复杂网络; 同步; 时变时滞; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Synchronization criteria for general coupling complex networks with time varying delay

GUO Ling, NIAN Xiao-hong, PAN Huan

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China)

Abstract: Synchronization problem for general coupling complex networks with time varying delay is studied. The restriction on the out-coupling matrix of a dynamical network that is always assumed to be symmetric or irreducible is removed. Complex eigenvalues for the general out-coupling matrix are considered and complex vectors are dealt with accordingly. Based on Lyapunov stability theory, the matrix decomposition technique and linear matrix inequalities(LMIs), the sufficient condition of synchronization stability is developed by constructing an appropriate Lyapunov function. In addition, synchronization problem of a numerical example is simulated to verify the effectiveness of the proposed conclusion. The results show that the condition is much less conservative than the existing ones in literature.

Key words: complex networks; synchronization; time varying delay; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

同步^[1~4]是动力系统之间通过相互作用而形成的某种整体协调一致的行为. 随着复杂网络小世界和无标度特性^[5~7]的发现, 人们开始进一步关注复杂动态网络的同步问题.

由于传输信号速度有限或出现网络拥挤现象, 时滞普遍存在于各种网络结构中, 是导致系统不稳定或发生震荡的一个重要因素. 考虑到研究具有时滞的复杂动态网络系统同步问题具有重要的现实意义^[8~14], Li和Chen将耦合时滞引入到Wang和Chen提出的网络模型^[5~7]中, 得到了时滞无关和时滞相关的同步准则^[10]. 随后, Gao等针对该模型改进了时滞相关的同步稳定准则^[11].

上述工作主要讨论网络的外部耦合矩阵是对称且不可简约的情形. 然而, 现实网络中节点间的耦合往往更具一般化. 因此, 对于非对称的外部耦合矩

阵, Lu等深入研究了具有时滞的一般化复杂网络的局部同步和全局同步问题^[12]; 对于非对称性及可简约的外部耦合矩阵, Wu和Jiao讨论了时滞对复杂网络同步的影响^[13].

本文在假定外部耦合矩阵为非对称且可简约的条件下, 研究了具有耦合时滞的复杂网络同步问题. 首先是一些准备工作, 包括同步的定义以及网络系统的线性化. 其次, 基于Lyapunov稳定性定理, 利用矩阵分解^[15]及线性矩阵不等式方法, 得到了网络实现同步的充分条件. 数值例子表明本文结果较文献^[10~12]具有更小的保守性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑具有 N 个节点的时滞动态网络模型

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N g_{ij} A x_j(t - \tau(t)), \\ i &= 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\quad (1)$$

其中: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续可微函数; $x_i(t) = (x_{i1}(t), x_{i2}(t), \dots, x_{in}(t))^T \in \mathbb{R}^n$ 为第 i 个节点的状态变量; $\tau(t)$ 为时变的耦合时滞, 满足 $0 \leq \tau(t) \leq h < \infty$, $\dot{\tau}(t) \leq v < \infty$; A 为两个节点间的内部耦合矩阵; $g_{ij} \in \mathbb{R}$ 为节点 j 到 i ($i \neq j$) 的时不变耦合强度, $g_{ij} \geq 0$, 且

$$g_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N g_{ij}, i = 1, 2, \dots, N. \quad (2)$$

这里 $G = (g_{ij})_{N \times N}$ 表示时滞动态网络(1)的外部耦合矩阵, 本文并不要求 G 对称或不可简约, 即 G 同时包含了网络拓扑结构和耦合强度. 若耦合矩阵 G 非对称且可简约, 则 G 可能有复特征值, 因而模型(1)是更一般化的网络模型. 由于 G 的行和为零, 故 0 总是 G 的一个特征值, 对应的特征向量为 $(1 \ 1 \ \dots \ 1)^T$. 在本文中总假定 0 是 G 的重数为 1 的特征值, 记为 $\lambda_1 = 0$.

下面介绍同步的定义:

定义 1^[14] D^0 为状态空间中的一个开集, 若对任意初值 $X(t_0) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))^T \in D^0$, 有 $\|x_i(t) - s(t)\| \rightarrow 0, t \rightarrow \infty, i = 1, 2, \dots, N$, 则称时滞动态网络(1)实现同步, 开集 D^0 称为同步区域, $S(t) = (s(t), s(t), \dots, s(t))^T$ 称为网络(1)的同步状态.

显然, 若网络(1)实现同步, 则 $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t)$, 又由式(2)知 $\sum_{j=1}^N g_{ij} A s(t) = 0$, 结合式(1)得 $\dot{s}(t) = f(s(t))$, 这意味着 $s(t)$ 是系统 $\dot{x}(t) = f(x(t))$ 的一个解. $s(t)$ 可以是一个平衡点、极限环、周期轨道或混沌轨迹. 一方面, 若网络(1)实现同步, 则同步状态 $S(t)$ 在状态空间中渐近稳定. 另一方面, 若同步状态 $S(t)$ 为渐近稳定, 则时滞网络(1)实现同步.

使用下面的引理对网络(1)进行线性化.

引理 1^[13] 考虑时滞网络(1), 假定 $f(x(t))$ 在 $s(t) \in \mathbb{R}^n$ 连续可微, 耦合矩阵 G 有 k 个不同的特征值, 若下述 $k-1$ 个独立的时变系统

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= Df(s(t))\varphi(t) + \lambda_i A \varphi(t - \tau(t)), \\ i &= 2, \dots, k \end{aligned} \quad (3)$$

关于零点渐近稳定, 则时滞网络(1)的同步状态 $S(t)$ 渐近稳定, 其中: $Df(s(t))$ 为 $f(x(t))$ 在平衡点 $s(t)$ 的 Jacobian 矩阵, A 为网络(1)的内部耦合矩阵, $\tau(t)$ 为耦合时滞, λ_i ($i = 2, \dots, k$) 为外部耦合矩阵 G 的特征值, $\varphi(t) \in \mathbb{C}^n$.

由于耦合矩阵 G 非对称且可简约, 所以它的特征值 λ_i ($i = 2, \dots, k$) 可能为复数, 那么 $\varphi(t)$ 可以看作是复向量. 由于复向量在数学计算中难以处理,

故令 $\lambda(t) = \alpha_i + j\beta_i$ ($i = 2, \dots, k$), 并假设 $\varphi(t) = u(t) + jv(t)$ 为系统(3)的解, 其中 j 为虚单位, 则有:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Df(s(t))u(t) + \alpha_i A u(t - \tau(t)) - \beta_i A v(t - \tau(t)), \\ \dot{v}(t) = Df(s(t))v(t) + \alpha_i A v(t - \tau(t)) + \beta_i A u(t - \tau(t)), \\ i = 2, \dots, k. \end{cases} \quad (4)$$

令

$$\begin{aligned} w(t) &= \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix}, J(t) = \begin{bmatrix} Df(s(t)) & 0 \\ 0 & Df(s(t)) \end{bmatrix}, \\ A_i(t) &= \begin{bmatrix} \alpha_i A & -\beta_i A \\ \beta_i A & \alpha_i A \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

结合式(4)得

$$\dot{w}(t) = J(t)w(t) + A_i w(t - \tau(t)), i = 2, \dots, k. \quad (5)$$

系统(5)是实数域上的线性时变时滞系统, 通过研究式(5)关于零点的稳定性, 可以得到时滞网络系统(1)的同步行为.

3 主要结果(Main results)

本节, 主要考虑时滞网络系统(1)的同步问题.

定理 1 假定时滞 $\tau(t) \in (0, h], \dot{\tau}(t) \leq v < \infty$, 若存在正定矩阵 P, R, S 及矩阵 W , 对 $i = 2, \dots, k$, 下面的 LMIs

$$\Sigma = \begin{bmatrix} J^T(t)P + PJ(t) - W^T - W + S \\ A_i^T P + W^T + W \\ hW \\ hRJ(t) \\ PA_i + W^T + W & hW^T & hJ^T(t)R \\ -(1-v)S - W^T - W & -hW^T & hA_i^T R \\ -hW & -hR & 0 \\ hRA_i & 0 & -hR \end{bmatrix} < 0$$

成立, 则网络系统(1)的同步状态 $S(t)$ 渐近稳定, 其中, $J(t)$ 和 A_i 的定义如式(5)所示.

证 将 $J(t)$ 分解为 $J(t) = [J(t) - B] + B$, 则式(5)可改写为

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= [J(t) - B]w(t) + [A_i + B]w(t - \tau(t)) \\ &\quad Bw(t) - Bw(t - \tau(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

记 $w_t = w(t + \theta), -2h \leq \theta \leq 0$.

定义 Lyapunov 泛函

$$V(w_t) = V_1(w_t) + V_2(w_t) + V_3(w_t),$$

其中:

$$\begin{aligned} V_1(w_t) &= w^T(t)Pw(t), \\ V_2(w_t) &= \int_{-h}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{w}^T(\alpha)R\dot{w}(\alpha)d\alpha d\beta, \\ V_3(w_t) &= \int_{t-\tau(t)}^t w^T(\alpha)Sw(\alpha)d\alpha. \end{aligned}$$

令 $W = PB$, 结合式(6)及牛顿-莱布尼茨公式, 得

$$w(t) = w(t - \tau(t)) + \int_{t-\tau(t)}^t \dot{w}(\alpha)d\alpha,$$

对 $V_1(w_t)$ 关于时间 t 求导并将式(6)代入得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(w_t) &= \\ \dot{w}^T(t)Pw(t) + w^T(t)P\dot{w}(t) &= \\ [(J(t) - B)w(t) + (\Lambda_i + B)w(t - \tau(t)) + \\ Bw(t) - Bw(t - \tau(t))]^T Pw(t) + \\ w^T(t)P[(J(t) - B)w(t) + (\Lambda_i + \\ B)w(t - \tau(t)) + Bw(t) - Bw(t - \tau(t))] &= \\ w^T(t)[J^T(t)P + PJ(t) - W^T - W]w(t) + \\ w^T(t)[PA_i + W]w(t - \tau(t)) + \\ w(t - \tau(t))[\Lambda_i^T P + W^T]w(t) + \\ [Bw(t) - Bw(t - \tau(t))]^T P[w(t - \tau(t)) + \\ \int_{t-\tau(t)}^t \dot{w}(\alpha)d\alpha] + [w(t - \tau(t)) + \\ \int_{t-\tau(t)}^t \dot{w}(\alpha)d\alpha]^T P[Bw(t) - Bw(t - \tau(t))]. \end{aligned}$$

分别对 $V_2(w_t)$, $V_3(w_t)$, 关于 t 求导并结合式(5)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(w_t) &= \\ \int_{-h}^0 [\dot{w}^T(t)R\dot{w}(t) - \dot{w}^T(t + \beta)R\dot{w}(t + \beta)]^T d\beta &= \\ \int_{t-h}^t [\dot{w}^T(t)R\dot{w}(t) - \dot{w}^T(\alpha)R\dot{w}(\alpha)]^T d\alpha, \\ \dot{V}_3(w_t) &= \\ w^T(t)Sw(t) - (1 - \tau'(t))w^T(t - \tau(t))Sw(t - \tau(t)). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \dot{V}(w_t) &= \\ \dot{V}_1(w_t) + \dot{V}_2(w_t) + \dot{V}_3(w_t) &\leq \\ \frac{1}{h} \int_{t-h}^t \{w^T(t)[J^T(t)P + PJ(t) - W^T - W]w(t) + \\ w^T(t)[PA_i + W^T + W]w(t - \tau(t)) + \\ w^T(t - \tau(t))[\Lambda_i^T P + W^T + W]w(t) - \\ w^T(t - \tau(t))[W^T + W]w(t - \tau(t)) + \\ h w^T(t)W^T \dot{w}(\alpha) + h \dot{w}^T(\alpha)Ww(t) - \\ h w^T(t - \tau(t))W^T \dot{w}(\alpha) - h \dot{w}^T(\alpha)Ww(t - \tau(t)) + \\ h[J(t)w(t) + \Lambda_i w(t - \tau(t))]^T R[J(t)w(t) + \\ \Lambda_i w(t - \tau(t))] - h \dot{w}^T(\alpha)R\dot{w}(\alpha) + \\ w^T(t)Sw(t) - (1 - v)w^T(t - \tau(t))Sw(t - \end{aligned}$$

$$\tau(t))\}d\alpha = \\ \frac{1}{h} \int_{t-h}^t Z^T(w_t)[M_1 + hM_2]Z(w_t)d\alpha,$$

其中:

$$\begin{aligned} Z(w_t) &= [w^T(t) \ w^T(t - \tau(t)) \ \dot{w}^T(\alpha)]^T, \\ M_1 &= \begin{bmatrix} J^T(t)P + PJ(t) - W^T - W + S \\ \Lambda_i^T P + W^T + W \\ hW \end{bmatrix}, \\ M_2 &= \begin{bmatrix} J^T(t)R \\ \Lambda_i^T R \\ 0 \end{bmatrix} R^{-1} \begin{bmatrix} J^T(t)R \\ \Lambda_i^T R \\ 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

根据Schur补性质知, 不等式 $\Sigma < 0$ 等价于 $M_1 + hM_2 < 0$, 再由Lyapunov-Krasovskii稳定性定理知线性系统(5)关于零点渐近稳定, 从而可得网络系统(1)的同步状态渐近稳定. 证毕.

考虑下面的定常时滞网络模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= f(x_i(t)) + \sum_{j=1}^N g_{ij}Ax_j(t - \tau), \\ i &= 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 τ 满足 $0 \leq \tau \leq h < \infty$, 由定理1可以直接得到下面的推论.

推论 1 假定时滞 $\tau \in (0, h]$, 若存在正定矩阵 P, R, S 及矩阵 W , 对 $i = 2, \dots, k$, 下面的LMIs

$$\begin{bmatrix} J^T(t)P + PJ(t) - W^T - W + S \\ \Lambda_i^T P + W^T + W \\ hW \\ hRJ(t) \\ PA_i + W^T + W \quad hW^T \quad hJ^T(t)R \\ -S - W^T - W \quad -hW^T \quad h\Lambda_i^T R \\ -hW \quad -hR \quad 0 \\ hRA_i \quad 0 \quad -hR \end{bmatrix} < 0$$

成立, 则网络系统(7)可实现同步.

证 选取如下的Lyapunov泛函

$$V(w_t) = V_1(w_t) + V_2(w_t) + \tilde{V}_3(w_t),$$

其中 $\tilde{V}_3(w_t) = \int_{t-h}^t w^T(\alpha)Sw(\alpha)d\alpha$. 采用与定理1证明类似的方法得到推论1. 证毕.

时滞网络系统(1)的同步状态 $S(t)$ 为渐近稳定的另一个充分条件^[13, 14]是下列 $k - 1$ 个线性时滞系统关于零点渐近稳定:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_i(t) &= Df(s(t))\varphi_i(t) + \lambda_i A \varphi_i(t - \tau(t)), \\ i &= 2, \dots, k,\end{aligned}\quad (8)$$

其中: $Df(s(t))$ 为 $f(x(t))$ 在平衡点 $s(t)$ 的 Jacobian 矩阵, A 为网络(1)的内部耦合矩阵, $\tau(t)$ 为耦合时滞, $\lambda_i (i = 2, \dots, k)$ 为外部耦合矩阵 G 的特征值, $\varphi(t) \in \mathbb{C}^n$.

对于复数域上的线性时变时滞系统(8), 通过类似于式(5)的变换得

$$\begin{aligned}\dot{w}_i(t) &= J(t)w_i(t) + \Lambda_i w_i(t - \tau(t)), \\ i &= 2, \dots, k,\end{aligned}\quad (9)$$

其中 $J(t)$ 和 Λ_i 的定义与式(5)相同并且 $w_i(t) \in \mathbb{R}^n$.

定义如下 Lyapunov 泛函

$$\begin{aligned}V_i(w_{it}) &= V_{1i}(w_{it}) + V_{2i}(w_{it}) + V_{3i}(w_{it}), \\ i &= 2, \dots, k,\end{aligned}\quad (10)$$

其中:

$$\begin{aligned}w_{it} &= w_i(t + \theta), -2h \leq \theta \leq 0, \\ V_{1i}(w_{it}) &= w_i^T(t) P_i w_i(t), \\ V_{2i}(w_{it}) &= \int_{-h}^0 \int_{t+\beta}^t \dot{w}_i^T(\alpha) R_i \dot{w}_i(\alpha) d\alpha d\alpha, \\ V_{3i}(w_{it}) &= \int_{t-\tau(t)}^t w_i^T(\alpha) S_i w_i(\alpha) d\alpha.\end{aligned}$$

对于式(9)应用 Lyapunov 泛函(10), 可得到下面的同步准则.

定理 2 假定时滞 $\tau(t) \in (0, h]$, $\dot{\tau}(t) \leq v < \infty$, 若存在正定矩阵 P_i , R_i , S_i 及矩阵 W_i , 对 $i = 2, \dots, k$, 使得下面的 LMIs

$$\begin{bmatrix} J^T(t)P_i + P_i J(t) - W_i^T - W_i + S_i \\ \Lambda_i^T P_i + W_i^T + W_i \\ hW_i \\ hR_i J(t) \\ P_i \Lambda_i + W_i^T + W_i & hW_i^T & hJ^T(t)R_i \\ -(1-v)S_i - W_i^T - W_i & -hW_i^T & h\Lambda_i^T R_i \\ -hW_i & -hR_i & 0 \\ hR_i \Lambda_i & 0 & -hR_i \end{bmatrix} < 0$$

成立, 则网络系统(1)的同步状态 $S(t)$ 渐近稳定, 其中 $J(t)$ 和 Λ_i 的定义如式(5)所示.

证 与定理1证明相似, 故略去.

对应于推论1, 由定理2可以直接得到下述推论, 该推论也可通过选取以下的 Lyapunov 泛函

$$\begin{aligned}V_i(w_{it}) &= V_{1i}(w_{it}) + V_{2i}(w_{it}) + \tilde{V}_{3i}(w_{it}), \\ i &= 2, \dots, k\end{aligned}$$

证明得到, 其中 $\tilde{V}_{3i}(w_{it}) = \int_{t-h}^t w_i^T(\alpha) S_i w_i(\alpha) d\alpha$.

推论 2 假定时滞 $\tau \in (0, h]$, 若存在正定矩阵 P_i , R_i , S_i 及矩阵 W_i , 对 $i = 2, \dots, k$, 使得下面的 LMIs

$$\begin{bmatrix} J^T(t)P_i + P_i J(t) - W_i^T - W_i + S_i \\ \Lambda_i^T P_i + W_i^T + W_i \\ hW_i \\ hR_i J(t) \\ P_i \Lambda_i + W_i^T + W_i & hW_i^T & hJ^T(t)R_i \\ -S_i - W_i^T - W_i & -hW_i^T & h\Lambda_i^T R_i \\ -hW_i & -hR_i & 0 \\ hR_i \Lambda_i & 0 & -hR_i \end{bmatrix} < 0$$

成立, 则网络系统(7)可实现同步.

注 1 对比定理2, 定理1变量数少, 计算量减少, 计算时间缩短, 尤其是对节点数较多的网络, 定理1的有效性更为明显; 同时, 由于定理2采用了更多的变量, 使得其保守性较定理1要小.

4 仿真(Simulation)

为验证定理1结论的有效性, 在 MATLAB 环境下, 对系统(1)的同步问题进行了计算机仿真研究.

4.1 例 1 (Example 1)

考虑5个节点的网络模型^[10,11]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1(t) \\ -2x_2(t) \\ -3x_3(t) \end{bmatrix},$$

其中每个节点均为简单的三阶稳定线性系统, 其 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

假定内部耦合矩阵 $A = \text{diag}\{1, 1, 1\}$, 外部耦合矩阵

$$G = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

为了显示结果的有效性, 这里先取外部耦合矩阵 G 为不可简化的对称矩阵. $c \cdot G$ 在对称网络中描述耦合结构和强度, 其中 c 为耦合强度. G 的特征值为

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0, \lambda_2 = -1.382, \\ \lambda_3 &= -2.382, \lambda_4 = -3.168, \\ \lambda_5 &= -4.168.\end{aligned}$$

因此, 如果式(3)是渐近稳定的, 那么同步状态 $S(t)$ 渐

近稳定. 表1为上述模型在不同的耦合强度下, 由推论1,2与文献[10, 11]得到的同步稳定的最大时滞上界.

表 1 同步稳定的最大时滞上界

Table 1 Maximum delay bounds guaranteeing synchronization stability

耦合强度	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
文献[10]最大时滞上界	1.130	0.900	0.638	0.526	0.448
文献[11]最大时滞上界	1.156	0.760	0.561	0.442	0.363
推论1最大时滞上界	1.327	0.925	0.713	0.581	0.491
推论2最大时滞上界	1.340	0.940	0.729	0.597	0.506

图1显示当时滞 $\tau = 0.94$, 耦合强度 $c = 0.5$ 时, 复杂网络最终会随时间趋于同步.

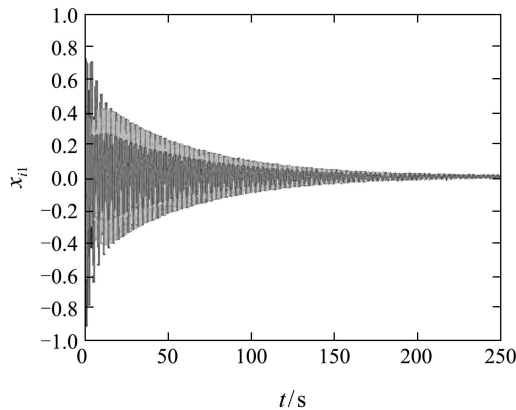


图 1 时滞 $\tau = 0.94$, 耦合强度 $c = 0.5$ 时, 第 i 个节点第1个变量 x_{i1} 的时间序列

Fig. 1 Time series of the first variable x_{i1} of node i for time delay $\tau = 0.94$ and coupling strength $c = 0.5$

4.2 例 2 (Example 2)

考虑3个节点的网络模型^[12]

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4x_1(t) \\ -5x_2(t) \end{bmatrix},$$

其中每个节点均为简单的二阶稳定线性系统, 其 Jacobian 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

假定内部耦合矩阵 $A = \text{diag}\{1, 1\}$, 外部耦合矩阵

$$G = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

为非对称矩阵, 其特征值为

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1.0756,$$

$$\lambda_3 = -4.8 + 1.2118j,$$

$$\lambda_4 = -4.8 - 1.2118j, \lambda_5 = -4.3243,$$

其中 j 为虚单位. 由推论 1 得到的最大时滞上界为 0.620, 与使用文献 [12] 中 Theorem 1 所得结果相同; 由推论 2 得到的最大时滞上界为 0.733.

图2显示当时滞 $\tau = 0.73$ 时复杂网络最终会随时间趋于同步.

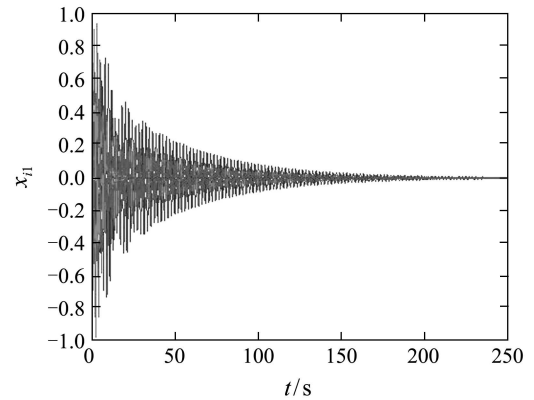


图 2 时滞 $\tau = 0.73$ 时, 第 i 个节点第1个变量 x_{i1} 的时间序列
Fig. 2 Time series of the first variable x_{i1} of node i for time delay $\tau = 0.73$

5 结论(Conclusion)

本文利用系数矩阵分解技巧及线性矩阵不等式方法, 通过构造 Lyapunov 泛函, 讨论了具有一般耦合结构的时变时滞复杂网络的同步问题. 对于一般的外部耦合矩阵, 考虑了其复数特征根, 并对复数域上的向量进行相应的处理, 得到了网络系统实现同步的充分条件. 通过对网络同步问题进行数值仿真, 验证了所得结论的有效性. 仿真结果表明本文结论较已有研究具有更小的保守性.

参考文献(References):

- [1] 王磊, 戴华平, 孙优贤. 时变复杂动力学网络的同步控制[J]. 控制理论与应用, 2008, 25(4): 603 – 607.
(WANG Lei, DAI Huaping, SUN Youxian. Synchronization control of a time-varying complex dynamical network[J]. *Control Theory & Applications*, 2008, 25(4): 603 – 607.)
- [2] LV J, YU X, CHEN G. Chaos synchronization of general complex dynamical networks[J]. *Physica A*, 2004, 334(1/2): 281 – 302.
- [3] LV J, CHEN G. A time-varying complex dynamical network models and its controlled synchronization criteria[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 841 – 846.
- [4] LI Z, CHEN G. Global synchronization and asymptotic stability of complex dynamical networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 2006, 53(1): 28 – 33.
- [5] WANG X, CHEN G. Complex networks: small-world, scale-free and beyond[J]. *IEEE Circuits and Systems Magazine*, 2003, 3(1): 6 – 20.
- [6] WANG X, CHEN G. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(1): 187 – 192.

- [7] WANG X, CHEN G. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2002, 49(1): 54 – 62.
- [8] ZHOU J, CHEN T. Synchronization in general complex delayed dynamical networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*, 2006, 53(3): 733 – 744.
- [9] ZHANG Q, LU J, LV J. Adaptive feedback synchronization of a general complex dynamical network with delayed nodes[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2008, 55(2): 183 – 187.
- [10] LI C, CHEN G. Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays[J]. *Physica A*, 2004, 343: 263 – 278.
- [11] GAO H, LAM JAND, CHEN G. New criteria for synchronization stability of general complex dynamical networks with coupling delays[J]. *Physics Letters A*, 2006, 360(2): 263 – 273.
- [12] LU J, HO DANIEL W C. Local and global synchronization in general complex dynamical networks with delay coupling[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 37(5): 1497 – 1510.
- [13] WU J, JIAO L. Synchronization in complex delayed dynamical networks with nonsymmetric coupling[J]. *Physica A, Statistical and Theoretical Physics*, 2007, 386(1): 513 – 530.
- [14] LI K, GUAN S, GONG K, et al. Synchronization stability of general complex dynamical networks with time-varying delays[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(48): 7133 – 7139.
- [15] NIAN X H, PAN H, GUI W H, et al. New stability analysis for linear neutral system via state[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 215(5): 1830 – 1837.

作者简介:

郭凌 (1982—), 女, 博士研究生, 研究方向为复杂网络同步控制, E-mail: gling0826@126.com;

年晓红 (1965—), 男, 中南大学信息科学与工程学院博士生导师, 研究方向为多智能体系统的网络化控制和电机传动控制, E-mail: xhnian@mail.csu.edu.cn;

潘欢 (1983—), 男, 博士研究生, 研究方向为时滞系统控制、多智能体协调控制和复杂网络控制, E-mail: ph0303@126.com.