

一类控制输入饱和和受限的不确定系统滑模控制

王瑞芬¹, 贾廷纲^{1,2}, 牛玉刚¹

(1. 华东理工大学 化工过程先进控制和优化技术教育部重点实验室, 上海 200237;

2. 上海电气集团股份有限公司中央研究院, 上海 200070)

摘要: 本文研究控制输入饱和和受限情况下不确定系统的滑模控制问题, 其中, 被控对象同时存在状态矩阵不确定性和控制增益矩阵不确定性. 设计了一种积分型切换面和一个具有特殊结构的滑模控制律, 可以在参数不确定和控制受限影响下保证系统状态轨迹有限时间内到达指定的切换面, 利用等价控制律方法给出了滑模动态渐近稳定的充分条件. 数值仿真例子验证了本文算法的有效性.

关键词: 输入饱和; 控制不确定性; 时滞; 滑模控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Sliding-mode control for uncertain systems with input saturation

WANG Rui-fen¹, JIA Ting-gang^{1,2}, NIU Yu-gang¹

(1. Key Laboratory of Advanced Control and Optimization for Chemical Processes, Ministry of Education,

East China University of Science and Technology, Shanghai 200237;

2. Central Academe, Shanghai, Electric Group Co., Ltd, Shanghai 200070)

Abstract: The sliding-mode control for uncertain time-delay systems with input saturation is considered. There exist in these systems uncertainties in both state matrix and input matrix. An integral sliding surface is constructed, and a special sliding-mode controller is designed such that the state trajectories can be driven onto the specified sliding surface in a finite period of time in spite of the effects of both the parameter uncertainties and input saturation. By means of the equivalent control law, a sufficient condition is given to guarantee the asymptotic stability of the sliding motion. An example is provided to illustrate the effectiveness of the proposed method.

Key words: input saturation; input uncertainties; time-delay; sliding mode control

1 引言(Introduction)

由于实际控制系统不可避免地受到各种不确定性的影响, 因此, 对参数不确定性和外部干扰具有良好鲁棒性的滑模控制方法受到广泛关注和应用^[1,2]. 另一方面, 控制元件的物理限制导致执行器通常会存在非线性特征(如饱和、死区、继电器特性等), 不仅可能导致系统性能下降或失稳, 同时也增加了控制器设计的难度. 因此, 关于控制输入受限情况下控制系统的分析与综合问题一直是控制领域的热点问题, 并且近年来关于该类系统的滑模控制问题也开始受到许多研究者的关注, 并取得了一些有意义的研究成果^[3~7]. 然而, 值得注意的是, 上述工作仅仅考虑了系统存在状态矩阵不确定性的情况, 而对于同时存在状态参数和输入参数不确定性时控制受限系统的滑模问题还未见到相关报道, 特别是, 已有的关于状态参数不确定系统的滑模控制结果不能简单地推广到上述系统中.

基于上述讨论, 本文研究控制输入饱和和受限情况下不确定系统的滑模控制问题. 被控系统的不确定性同时存在于状态矩阵和控制输入矩阵中. 本文设计一种积分型切换面, 给出了滑模动态渐近稳定的充分条件, 证明了所设计的滑模控制律能够保证系统状态轨迹在有限时间内到达指定的切换面. 理论证明和数值仿真都表明了本文所提算法的有效性. 同时, 从文中将会看到, 输入矩阵不确定性的存在增加了滑模控制设计过程的难度.

2 系统描述(Systems description)

考虑下面的控制输入饱和和受限的不确定状态时滞系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A(t))x(t) + (A_d + \Delta A_d(t))x(t-d) + (B + \Delta B(t))\phi(u(t)), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-d, 0], \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入, A, A_d 和 B 为已知具有适当维数的常数矩阵, $\Delta A(t), \Delta A_d(t)$ 和 $\Delta B(t)$ 为系统参数不确定性. $d > 0$ 为状态时滞, $\varphi(t)$ 为初始状态. $\phi(u) = [\phi_1(u_1) \ \phi_2(u_2) \ \cdots \ \phi_m(u_m)]^T$ 是非线性控制输入, 满足以下条件:

$$\phi_i(u_i) = 0, \quad -u_i^- \leq u_i \leq u_i^+, \quad (2)$$

$$\begin{cases} (u_i - u_i^+) \phi_i(u_i) \geq k_i^+(u_i - u_i^+)^2, & u_i > u_i^+, \\ (u_i + u_i^-) \phi_i(u_i) \geq k_i^-(u_i + u_i^-)^2, & u_i < -u_i^-, \end{cases} \quad (3)$$

其中 $u_i^+, u_i^-, k_i^+, k_i^-$ 是正的常数标量.

注 1 从式(2)(3)可以看出, 非线性控制输入 $\phi(u)$ 包含了可能存在的死区等非线性. 当 $u_i^+ = u_i^- = 0$ 时, $\phi(u)$ 为普通的扇形函数.

不失一般性, 假设:

1) B 列满秩, (A, B) 可控;

2) 参数不确定性 $\Delta B(t)$ 满足 $\Delta B(t) = B\delta(t)$, 其中 $\delta(t) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 满足 $I + \delta(t)$ 可逆, 且 $\|\delta(t)\| \leq \rho_B$ (ρ_B 是一个正常数);

3) 参数不确定性 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta A_d(t)$ 满足

$$[\Delta A(t) \ \Delta A_d(t)] = EF(t)[H_a \ H_{ad}],$$

其中: E, H_a 和 H_{ad} 为已知常数矩阵, $F(t)$ 为未知时变矩阵, 且满足 $F^T(t)F(t) \leq I, \forall t$.

下面的引理将在后面的证明中用到.

引理 1^[8] 设 $E, H, F(t)$ 为适当维数的实矩阵, 且 $F(t)$ 满足 $F^T(t)F(t) \leq I$, 则对于任意非零常数 $\varepsilon > 0$ 有

$$EF(t)H + H^T F^T(t)E^T \leq \varepsilon^{-1}EE^T + \varepsilon H^T H.$$

引理 2^[8] 设 a, b 为适当维数的实矩阵, 对于任意非零矩阵 $X > 0$ 有

$$ab + b^T a^T \leq aXa^T + b^T X^{-1}b.$$

引理 3^[9] 对于任意矩阵 $Q = Q^T$, 有:

$$Q + EF(t)H + H^T F^T(t)E^T < 0,$$

$$\forall F^T(t)F(t) \leq I,$$

当且仅当存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Q + \varepsilon EE^T + \varepsilon^{-1} H^T H < 0.$$

3 滑模面的设计与稳定性分析(Sliding mode design and stability analysis)

本节将设计一种积分型滑模面, 并通过 Lyapunov 方法和线性矩阵不等式(LMI)技术, 给出了滑模动态渐近稳定的充分条件.

选择切换函数为

$$S(t) = Gx(t) - \int_0^t G(A + BK)x(\tau) d\tau, \quad (4)$$

其中: 切换矩阵 $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 GB 为非奇异矩阵, 由矩阵理论可知, 由于 B 为列满秩, 若选择 $G = B^T P$ (其中 $P > 0$ 将在后面的设计中给出), 则可以保证矩阵 GB 非奇异. 同时, 在切换函数(4)中选择常数矩阵 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 满足 $A + BK$ 是 Hurwitz 矩阵. 由式(4)定义的积分型切换面比经典的线性切换面增加了滑模控制的鲁棒性.

由滑模控制理论知, 当系统状态轨迹进入滑模面后有 $S(t) = 0, \dot{S}(t) = 0$, 于是, 由式(1)(4)可得

$$\dot{S}(t) = G\dot{x}(t) - G(A + BK)x(t). \quad (5)$$

利用 $\dot{S}(t) = 0$ 和匹配条件 $\Delta B(t) = B\delta(t)$ 可以得到等效控制律为

$$\begin{aligned} \phi_{eq}(u(t)) = & (I + \delta(t))^{-1} Kx(t) - [GB(I + \delta(t))]^{-1} \cdot \\ & G[\Delta A(t)X + \Delta A_d(t)x(t-d) + A_d x(t-d)]. \end{aligned} \quad (6)$$

将式(6)代入系统(1)中得到滑模动态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = & [A + BK + \Delta A(t) - B(GB)^{-1}G\Delta A(t)]x(t) + \\ & [A_d + \Delta A_d(t) - B(GB)^{-1}G(A_d + \\ & \Delta A_d(t))]x(t-d). \end{aligned} \quad (7)$$

注 2 此处的等效控制律仅仅被用于分析滑模动态的稳定性, 即它是一种分析工具, 并不会在实际中使用. 实际使用的滑模控制律是本文在第4节中设计的控制律.

下面给出滑模动态(7)渐近稳定的充分条件.

定理 1 对于饱和输入不确定系统(1), 切换面由式(4)确定. 如果存在正定矩阵 $P > 0, Q > 0$ 和标量 $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ 满足线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Sigma_1 & * & * & * & * & * & * \\ A_d^T P & \Sigma_2 & * & * & * & * & * \\ 0 & PA_d & -P & * & * & * & * \\ \sqrt{2}B^T P & 0 & 0 & -B^T P B & * & * & * \\ E^T P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * & * \\ H_a \varepsilon_1 & H_{ad} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & * \\ 0 & 0 & E^T P & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} -P & PE \\ E^T P & -\varepsilon_2 I \end{pmatrix} < 0, \quad (9)$$

其中:

$$\Sigma_1 = P(A + BK) + (A + BK)^T P +$$

$$Q + \varepsilon_2 H_a^T H_a,$$

$$\Sigma_2 = -Q + \varepsilon_2 H_{ad}^T H_{ad},$$

且滑模矩阵为 $G = B^T P$, 那么滑模动态(7)是全局渐近稳定的.

证 选取 Lyapunov 函数为

$$V(t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-d}^t x^T(\tau)Qx(\tau)d\tau,$$

沿滑模动态(7)的状态轨迹对V(t)求导,得

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = & 2x^T(t)P\dot{x}(t) + x^T(t)Qx(t) - \\ & x^T(t-d)Qx(t-d) = \\ & x^T(t)[P(A+BK) + (A+BK)^T P + Q]x(t) + \\ & 2x^T(t)P[\Delta A(t)x(t) + \Delta A_d(t)x(t-d)] - \\ & 2x^T(t)PB(B^T PB)^{-1}B^T P\Delta A(t)x(t) + \\ & 2x^T(t)PA_d x(t-d) - 2x^T(t)PB(B^T PB)^{-1} \times \\ & B^T P[A_d + \Delta A_d(t)]x(t-d) - \\ & x^T(t-d)Qx(t-d). \end{aligned} \quad (10)$$

根据引理1,对于任意非零常数 $\varepsilon_1 > 0$ 有

$$\begin{aligned} 2x^T(t)P[\Delta A(t)x(t) + \Delta A_d(t)x(t-d)] \leq \\ \varepsilon_1^{-1}x^T(t)PEE^T Px(t) + \varepsilon_1[H_a x(t) + \\ H_{ad}x(t-d)]^T[H_a x(t) + H_{ad}x(t-d)]. \end{aligned} \quad (11)$$

根据引理2,有

$$\begin{aligned} -2x^T(t)PB(B^T PB)^{-1}B^T P\Delta A(t)x(t) \leq \\ x^T(t)PB(B^T PB)^{-1}B^T Px(t) + \\ x^T(t)\Delta A^T(t) \cdot P\Delta A(t)x(t), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -2x^T(t)PB(B^T PB)^{-1}B^T P[A_d + \\ \Delta A_d(t)]x(t-d) \leq \\ x^T(t)PB(B^T PB)^{-1}B^T Px(t) + x^T(t-d)[A_d + \\ \Delta A_d(t)]^T P[A_d + \Delta A_d(t)]x(t-d). \end{aligned} \quad (13)$$

将式(11)~(13)代入式(10),得

$$\dot{V}(t) \leq [x^T(t) \quad x^T(t-d)]\Omega \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-d) \end{bmatrix},$$

其中

$$\Omega = \begin{pmatrix} \Pi_1 & PA_d \\ A_d^T P & \Pi_2 \end{pmatrix} + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} H_a^T \\ H_{ad}^T \end{bmatrix} [H_a H_{ad}],$$

且

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & P(A+BK) + (A+BK)^T P + Q + \\ & \varepsilon_1^{-1}PEE^T P + 2PB(B^T PB)^{-1}B^T P + \\ & \Delta A^T(t)P\Delta A(t), \end{aligned}$$

$$\Pi_2 = -Q + [A_d + \Delta A_d(t)]^T P[A_d + \Delta A_d(t)].$$

根据Schur补定理和引理3可知,如果线性矩阵不等式(8)(9)成立,则可知 $\Omega < 0$,从而有 $\dot{V}(t) < 0$ (当 $x(t) \neq 0$ 时),根据Lyapunov稳定性理论可知系统(7)是渐近稳定的. 证毕.

4 控制律的设计(Controller design)

滑模控制设计的第2个步骤是设计一个滑模控制

律保证系统状态轨迹能在有限时间到达滑面 $S(t) = 0$,并沿该滑模面上渐近趋于零.因此,本文考虑控制输入存在死区、饱和和非线性特征的情况,设计如下的滑模控制律:

$$u_i(t) = \begin{cases} -\zeta\rho(t)\frac{s_i(t)}{\|S(t)\|} - u_i^-, & s_i > 0, \\ 0, & s_i = 0, \\ -\zeta\rho(t)\frac{s_i(t)}{\|S(t)\|} + u_i^+, & s_i < 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \rho(t) = & \|Kx(t)\| + \|RE\| \cdot \|H_a x(t)\| + \\ & \|RA_d x(t-d)\| + \|RE\| \cdot \|H_{ad}x(t-d)\|, \end{aligned}$$

其中: $R = (B^T PB)^{-1}B^T P$, $\zeta > 1/(1 + \rho_B)k$,且 $k = \min\{k_i^+, k_i^-\}$.

下面证明当系统控制输入饱和和受限时,所设计的滑模控制律(14)能够保证切换面的可达性成立.

定理 2 对于不确定控制系统(1),当切换面由式(4)确定且 $G = B^T P$ (其中 $P > 0$ 是线性矩阵不等式(8)(9)的解)时,则滑模控制律(14)能保证系统状态轨迹在有限时间内被吸引到切换面 $S(t) = 0$ 上.

证 由式(14)可得,当 $s_i > 0$ 时 $u_i(t) < -u_i^-$,当 $s_i < 0$ 时 $u_i(t) > u_i^+$.因此,由式(3)(14)可知:

当 $s_i > 0$ 时,

$$\begin{aligned} (u_i(t) + u_i^-)\phi_i(u_i) = \\ -\zeta\rho(t)\frac{s_i(t)\phi_i(u_i(t))}{\|S(t)\|} \geq k\zeta^2\rho^2(t)\frac{s_i^2(t)}{\|S(t)\|^2}; \end{aligned} \quad (15)$$

当 $s_i < 0$ 时,

$$\begin{aligned} (u_i(t) - u_i^+)\phi_i(u_i) = \\ -\zeta\rho(t)\frac{s_i(t)\phi_i(u_i(t))}{\|S(t)\|} \geq k\zeta^2\rho^2(t)\frac{s_i^2(t)}{\|S(t)\|^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

由式(15)和式(16)可得对于所有 s_i 有

$$s_i(t)\phi_i(u_i(t)) \leq -k\zeta\rho(t)\frac{s_i^2(t)}{\|S(t)\|},$$

从而

$$\begin{aligned} S^T(t)\phi(u) = \sum_{i=1}^m s_i(t)\phi_i(u_i(t)) \leq \\ -k\zeta\rho(t)\sum_{i=1}^m \frac{s_i^2(t)}{\|S(t)\|} = -k\zeta\rho(t)\|S(t)\|. \end{aligned} \quad (17)$$

从而,由式(5)(17)可知

$$\begin{aligned} S^T(t)(B^T XB)^{-1}\dot{S}(t) = \\ S^T(t)(B^T PB)^{-1}B^T P[-BKx(t) + EF(t)H_a x(t) + \\ A_d x(t-d) + EF(t)H_{ad}x(t-d) + \\ (B + \Delta B(t))\phi(u(t))] \leq \\ \|S(t)\| [\|Kx(t)\| + \|RE\| \cdot \|H_a x(t)\| + \\ \|RA_d x(t-d)\| + \|RE\| \cdot \|H_{ad}x(t-d)\|] + \end{aligned}$$

$(1 + \rho_B)S^T(t)\phi(u(t)) \leq$
 $-[(1 + \rho_B)k\zeta - 1]\rho(t) \|S(t)\| < 0,$
 当且仅当 $\zeta > 1/(1 + \rho_B)k$ 时成立.

这表示对于由式(4)所确定的滑模面的可达性条件成立. 证毕.

注 3 本文设计的滑模控制律(14)利用设计矩阵 P 和参数 ρ_B 克服了参数不确定性的影响, 其中, 设计矩阵 P 满足滑模动态渐近稳定的充分条件(8)(9), 可以保证滑模动态在不确定参数 $\Delta A(t)$ 和 $\Delta A_d(t)$ 影响下的渐近稳定性; 而参数 ρ_B 是不确定矩阵 $\Delta B(t)$ 的上界, 可以达到抑制不确定性影响的目的, 从而实现对系统的有效控制.

5 数值仿真(Simulation)

考虑饱和输入不确定系统(1)(2), 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}, A_d = \begin{bmatrix} -0.9 & 0.2 \\ 0.1 & -0.7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 0.03 \\ 1.2 \end{bmatrix}, H_a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \end{bmatrix}, H_{ad} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\delta(t) = 0.1 \sin t,$$

$$\phi(u(t)) = \begin{cases} (0.1 + 0.1 \cos(u(t)) + 0.9 e^{0.2|\sin(u(t))|}), & u > 2, \\ (u(t) - 2), & -1 \leq u \leq 2, \\ 0, & -1 \leq u \leq 2, \\ (0.1 + 0.1 \cos(u(t)) + 0.9 e^{0.2|\sin(u(t))|}), & u < -1. \\ (u(t) + 1), & u < -1. \end{cases}$$

易知, 满足式(3)的 $k = 0.9$. 控制目标是设计一个滑模控制律, 使得系统在有限时间内到达指定滑模面, 并沿该切换面渐近稳定. 设计切换函数(4), 其中 $K = [-6 \ -1]$, 求解线性矩阵不等式(8)(9), 得

$$P = \begin{bmatrix} 0.1888 & -0.0719 \\ -0.0719 & 0.4312 \end{bmatrix},$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2.2525 & 0.7050 \\ 0.7050 & 6.9077 \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_1 = 0.3451, \varepsilon_2 = 1.0785.$$

于是由定理2得到选择滑模控制律(14), 其中 $\zeta = 1.2 > 1/(1.1k)$.

假设状态时滞 $d=1$, 状态初始值 $x(t) = [1 \ -3]^T$, $t \in [-1, 0]$, 仿真结果如图1~3. 可以看出, 本文设计的滑模控制律能很好的保证系统状态的渐近稳定. 虽然由于状态时滞的影响, 在 $t = 1$ 附近状态轨迹有一个跳跃, 但本文所设计的滑模控制仍然很好地保证了状态轨迹的渐近稳定性.

6 结论(Conclusion)

本文研究了一类系统矩阵和控制矩阵同时存在不确定的饱和输入系统的滑模控制问题. 理论证明及实验仿真都表明文中设计的滑模控制律对系统参数摄动有较好的抗干扰性, 能够保证系统渐近稳定.

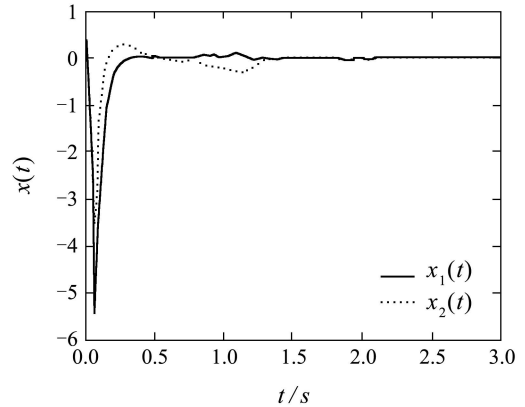


图 1 系统状态轨迹
 Fig. 1 Trajectories of states

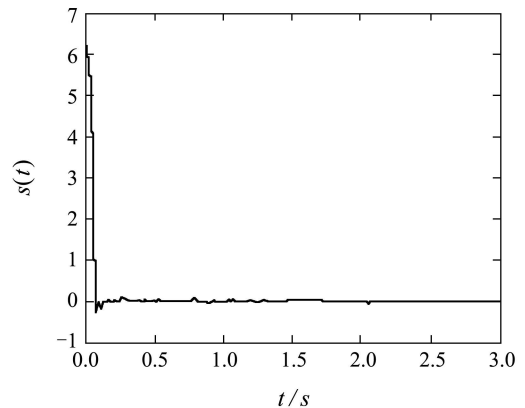


图 2 滑模变量轨迹
 Fig. 2 Trajectory of sliding mode variable

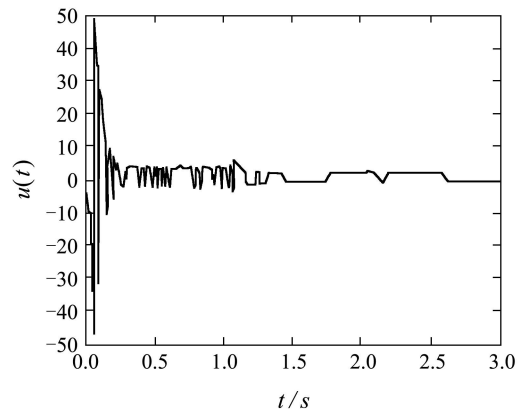


图 3 控制输入信号
 Fig. 3 Control signal

参考文献(References):

- [1] YAN J J, JASON S H T, KUNG F C. A new result on the robust stability of uncertain systems with time-varying delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2001, 48(7): 914 – 916.
- [2] HAN HO CHOI. LMI-based sliding surface design for integral sliding mode control of mismatched uncertain systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(4): 736 – 742.
- [3] NIU Y, HO D W C. Design of sliding mode control for nonlinear stochastic systems subject to actuator nonlinearity[J]. *IEE Proceedings—Control Theory and Applications*, 2006, 153(6): 737 – 744.
- [4] 魏爱荣, 赵克友. 执行器饱和和不确定线性系统的分析和设计[J]. 电机与控制学报, 2005, 9(5): 448 – 451.
(WEI Airong, ZHAO Keyou. Analysis and design for single input linear systems subject to input saturation and uncertainty[J]. *Electric Machines and Control*, 2005, 9(5): 448 – 451.)
- [5] PARK Mun-Soo, CHWA Dongkyoung, HONG Suk-Kyo. Antisway tracking control of overhead cranes with system uncertainty and actuator nonlinearity using an adaptive fuzzy sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2008, 55(11): 3972 – 3984.
- [6] 陶洪峰, 胡寿松. 具有饱和和死区非线性输入的自适应滑模跟踪控制[J]. 信息与控制, 2009, 38(3): 281 – 285.
(TAO Hongfeng, HU Shousong. Adaptive sliding mode control with saturated dead-zone nonlinear inputs[J]. *Information and Control*, 2009, 38(3): 281 – 285.)
- [7] 胡庆雷, 马广富. 带有输入非线性的挠性航天器姿态机动变结构控制[J]. 宇航学报, 2006, 27(4): 630 – 634.
(HU Qinglei, MA Guangfu. Variable structure control for flexible spacecraft with input nonlinearities during attitude maneuver[J]. *Journal of Astronautics*, 2006, 27(4): 630 – 634.)
- [8] WANG Y, XIE L, C E DE SOUZA. Robust control of a class of uncertain nonlinear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 19(2): 139 – 149.
- [9] XIE L, FU M, C E DE SOUZA. H_∞ control and quadratic stabilization of systems with parameter uncertainty via output feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(8): 1253 – 1256.

作者简介:

王瑞芬 (1987—), 女, 主要研究方向为变结构控制理论及应用, E-mail: wangruifen518@163.com;

贾廷纲 (1973—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为网络化控制、鲁棒控制等, E-mail: tgjia@163.com;

牛玉刚 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性控制系统、随机控制系统、网络拥塞控制、智能控制等, E-mail: acniuyg@ecust.edu.cn.