

## 非线性系统近似最优PD动态补偿控制

高德欣<sup>1</sup>, 魏蕊<sup>1</sup>, 唐功友<sup>2</sup>

(1. 青岛科技大学 自动化与电子工程学院, 山东 青岛 266042; 2. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100)

**摘要:** 本文研究了一类基于动态补偿的非线性系统的近似最优PD控制的问题. 用微分方程的逐次逼近理论将非线性系统的最优控制问题转化为求解线性非齐次两点边值序列问题, 并提供了从时域最优状态反馈到频域最优PD控制器参数的优化方法, 从而获取系统最优的动态补偿网络, 设计出最优PD整定参数, 给出其实现算法. 最后仿真示例将所提出的方法与传统的线性二次型调节器(LQR)逐次逼近方法相比较, 表明该方法具有良好的动态性能和鲁棒性.

**关键词:** 非线性系统; 动态补偿; 最优控制; PD控制

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Approximate optimal PD dynamic compensation control for nonlinear systems

GAO De-xin<sup>1</sup>, WEI Rui<sup>1</sup>, TANG Gong-you<sup>2</sup>

(1. College of Automation and Electronic Engineer, Qingdao University of Science & Technology, Qingdao Shandong 266042, China;

2. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100)

**Abstract:** We consider the approximate optimal PD control for nonlinear systems based on the dynamic compensation. By using the successive approximation theory of differential equations, the original optimal control problem of nonlinear systems is transformed into a sequence of non-homogeneous linear two-point-boundary-value(TPBV) problems, which converts the optimization of the state variables feedback in the time domain into the optimization of PD controller parameters in the frequency domain. According to this method, the system optimal dynamic compensation network is obtained; the optimally tuned parameters of PD controller are designed and the realization algorithm is developed. Simulations show that the result is more robust and with better dynamic performance than that obtained by successively approximating the traditional linear quadratic regulator(LQR).

**Key words:** nonlinear systems; dynamic compensation; optimal control; PD controller

### 1 引言(Introduction)

非线性系统广泛存在于实际系统中, 随着对控制系统的性能和精度要求的提高, 为了改善系统的性能, 实现高质量的控制, 对非线性系统需要采用非线性控制方案设计控制器. 对非线性系统的最优控制问题, 根据极大值原理导致求解一个非线性的两点边值问题. 一般来说, 除最简单的情况外, 其解析解一般不存在. 此外, 最优控制器的设计是基于精确数学模型的, 当系统面对参数摄动、未建模动态以及外界扰动等不确定因素时, 以标称系统为基础设计的最优控制系统的性能指标就会偏离原最优值, 甚至不稳定, 所以人们一般采取近似解法. 目前, 在非线性系统的最优控制方面, 典型的近似方法有Galerkin逐次逼近法<sup>[1]</sup>、级数展开法<sup>[2,3]</sup>、SDRE迭代解法<sup>[4,5]</sup>、准线性化方法<sup>[6]</sup>、梯度法<sup>[7]</sup>、逐次逼近

方法<sup>[8,9]</sup>等.

工程中广泛应用基于输出反馈的PD控制器, 因为PD控制器结构简单、工作稳定、鲁棒性较强, 容易硬件实现, 可改善系统的相对稳定性, 使频宽增加, 因而可改善系统暂态响应, 广泛应用于冶金、化工、电力、机械等工业过程控制.

本文通过把微分方程的逐次逼近方法<sup>[8,9]</sup>与二次型PD参数最优设计方法相结合, 将非线性系统的最优控制问题转化为求解线性非齐次两点边值序列问题, 并提供了从时域最优状态反馈到频域最优PD控制器参数的优化方法, 获取系统最优的动态补偿网络, 给出其实现算法. 解决了一般状态控制器的不能完全获得状态变量的信息问题. 本文所提方法不依赖被控对象模型, 并且在工程上有非常直观的物理意义.

## 2 问题描述(Problem statement)

考虑一般非线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + f(x), t > t_0, \\ x(0) = x_0, \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x \in \mathbb{R}^n$  为状态向量;  $u \in \mathbb{R}^r$  为控制向量;  $y \in \mathbb{R}^m$  为输出向量;  $f(x)$  为非线性项;  $A, B$  和  $C$  为适当维数的常量矩阵,  $(A, B)$  为完全能控的. 假设  $f(x)$  满足下列条件:

$$\begin{cases} \|f(x)\| \leq \alpha \|x\|, \\ \|f(x) - f(\hat{x})\| \leq \beta \|x - \hat{x}\|, \forall x, \hat{x} \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  为正常数.

本文选取如下形式的二次型性能指标:

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_f x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt, \quad (3)$$

其中: 终端时刻  $t_f$  固定, 满足  $P(t_f) = Q_f$ ,  $Q_f$  为系统加权矩阵;  $Q, Q_f \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为半正定对称矩阵;  $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$  为正定对称矩阵. 问题是寻找最优控制  $u^*(t)$  使  $J$  在约束(1)下取最小值. 根据极大值原理, 系统(1)关于式(3)的最优控制律为

$$u(t) = -R^{-1} B^T \lambda(t), \quad (4)$$

其中  $\lambda(t)$  为下面非齐次两点边值问题的解:

$$\begin{cases} -\dot{\lambda}(t) = Qx(t) + A^T \lambda(t) + f_x^T(x) \lambda(t), \\ \dot{x}(t) = Ax(t) - S\lambda(t) + f(x), t_0 < t \leq t_f, \\ x(t_0) = x_0, \lambda(t_f) = Q_f x(t_f), \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $S = BR^{-1}B^T$ ,  $f_x^T(x) = \frac{\partial f^T(x)}{\partial x}$ , 对于非线性两点边值问题(5), 除个别情况外, 一般其解析解是不存在的. 下面给出求解两点边值问题的逐次逼近法和最优控制律的近似设计方法.

## 3 最优控制器的设计(Design of optimal controller)

### 3.1 有限时间最优控制律设计(Design of optimal controller in finite time)

**定理 1** 系统(1)描述的系统关于性能指标(3)的最优控制问题, 最优控制律可由下式确定:

$$u^*(t) = -R^{-1} B^T [P(t)x(t) + g(t)], \quad (6)$$

其中:  $P(t)$  是 Riccati 矩阵微分方程

$$\begin{cases} -\dot{P}(t) = A^T P(t) + P(t)A - P(t)SP(t) + Q, \\ P(t_f) = Q_f \end{cases} \quad (7)$$

的唯一半正定解,  $g(t) \in \mathbb{R}^n$  为待求的共态向量.  $g(t)$

满足

$$\dot{g}(t) = [P(t)S - A^T - f_x^T(x)]g(t) - P(t)f(x) - f_x^T(x)P(t)x(t), \quad (8)$$

$x(t)$  满足

$$\dot{x}(t) = [A - SP(t)]x(t) - Sg(t) + f(x), \quad (9)$$

边界条件为

$$g(t_f) = 0, \quad x(t_0) = x_0. \quad (10)$$

证 令

$$\lambda(t) = P(t)x(t) + g(t), \quad (11)$$

其中:  $P(t), g(t)$  是待定参数, 对式(11)两边求导数, 并将式(1)和式(5)的第2项代入可得

$$\dot{\lambda}(t) = [\dot{P}(t) + P(t)A - P(t)SP(t)]x(t) - P(t)Sg(t) + \dot{g}(t) + P(t)f(x). \quad (12)$$

将式(11)代入式(5)得

$$-\dot{\lambda}(t) = [Q + A^T P(t)]x(t) + A^T g(t) + f_x^T(x)[P(t)x(t) + g(t)]. \quad (13)$$

并和式(12)相加, 可导出 Riccati 矩阵微分方程(7)和伴随方程(8). 将式(11)代入式(4), 得到唯一的最优扰动抑制控制律(6). 将式(11)代入式(5)的第2式, 可得系统状态方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A - SP(t)]x(t) - Sg(t) + f(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (14)$$

方程(7)是关于  $P(t)$  的 Riccati 矩阵微分方程, 有唯一的半正定解. 为求解由式(8)和式(9)确定的两点边值问题, 构造伴随向量族  $\{g^{(k)}(t)\}$ :

$$\begin{cases} g^{(0)}(t) \equiv 0, \\ -\dot{g}^{(k)}(t) = [A^T - P(t)S]g^{(k)}(t) + P(t)f(x^{(k-1)}) + Y^{(k-1)}[P(t)x^{(k-1)}(t) + g^{(k-1)}(t)], \\ g^{(k)}(t_f) = 0, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (15)$$

状态向量族  $\{x^{(k)}(t)\}$ :

$$\begin{cases} x^{(0)}(t) \equiv 0, \\ \dot{x}^{(k)}(t) = [A - SP(t)]x^{(k)}(t) - Sg^{(k)}(t) + f(x^{(k-1)}), \\ x^{(k)}(t_0) = x_0, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (16)$$

其中:  $Y^{(k)} = \frac{\partial f^T(x^{(k)})}{\partial x^{(k)}}$ , 因此, 其相应的最优控制序列  $\{u^{(k)}(t)\}$ , 即得到非线性逐次逼近最优控制律

$$u^{(k)}(t) = -R^{-1} B^T [P(t)x^{(k)}(t) + g^{(k)}(t)], \quad (17)$$

$k = 1, 2, \dots$

对于第  $k$  次的最优控制问题,  $P(t), x^{(k-1)}, f(x^{(k-1)})$  和  $Y^{(k-1)}$  都为已知函数, 通过反向积分可以解出  $g^{(k)}(t)$ , 从而得到第  $k$  次逼近的最优控制. 再将  $g^{(k)}(t)$  代入式 (12), 通过积分可以解出  $x^{(k)}(t)$ . 分别将  $\{x^{(k)}(t)\}$  和  $\{g^{(k)}(t)\}$  视为  $C^N[t_0, t_f]$  的一个序列. 可以证明<sup>[11]</sup>, 两点边值问题式(15)和式(16)的解序列  $\{g^{(k)}(t)\}$  和  $\{x^{(k)}(t)\}$  是一致收敛的:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g^{(k)}(t) = g(t), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)}(t) = x(t). \quad (18)$$

事实上笔者无法求得当  $k \rightarrow \infty$  时该问题的解, 在实际应用中可取  $k = N$ , 即将第  $N$  次的结果近似为该问题的解, 从而得到  $N$  阶系统近似最优控制律, 即

$$u_N(t) = -R^{-1}B^T[P(t)x(t) + g^{(N)}(t)]. \quad (19)$$

因式(17)的解序列  $\{u^{(k)}(t)\}$  是与  $\{x^{(k)}(t)\}, \{g^{(k)}(t)\}$  相关的, 所以它也是一致收敛的. 当  $k \rightarrow \infty$  时, 状态向量序列  $\{x^{(k)}(t)\}$  的极限  $x^*(t)$  即为最优状态轨线, 控制向量序列  $\{u^{(k)}(t)\}$  的极限  $u^*(t)$  即为最优跟踪控制律(6), 即

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T \lim_{k \rightarrow \infty} [P(t)x^{(k)}(t) + g^{(k)}(t)] = -R^{-1}B^T [P(t)x(t) + \lim_{k \rightarrow \infty} g^{(k)}(t)]. \quad (20)$$

证毕.

**注 1** 在实际的控制器设计中, 只需解一次Riccati矩阵方程(7), 所以在最优控制律(19)中, 线性最优控制部分的计算是精确的, 只有  $g^{(N)}(t)$  是近似的, 用来补偿系统中非线性部分.

### 3.2 无限时间最优控制律设计(Design of optimal controller in infinite time)

对系统(1)的最优控制问题, 也可以类似讨论无限时域的情形( $N \rightarrow \infty$ ). 当矩阵  $G$  至少有一个特征值在虚轴上时, 持续外部扰动  $w$  将趋向于等幅振荡, 所以其状态向量  $x$  和控制向量  $u$  至少有一个不趋于零, 如果选择通常的无限时域二次型性能指标, 其性能指标函数是不收敛的. 因此, 可选取下列二次型平均性能指标:

$$J = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^T (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (21)$$

而对于外系统(3)为渐近稳定的情况, 可选取常规的无限时域二次型性能指标

$$J = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (22)$$

当性能指标为(21)(22)时, 其最优控制的推导过程和形式是一样的.

在  $(A, B)$  能控和  $(A, Q^{\frac{1}{2}})$  能观测的假设条件下, 前馈-反馈最优控制律和相应的次优控制律分别为:

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T [P x(t) + g^{(\infty)}(t)], \quad (23)$$

$$u_N(t) = -R^{-1}B^T [P x(t) + g^{(N)}(t)], \quad (24)$$

其中:  $P$  为Riccati矩阵方程

$$A^T P + P A - P S P + Q = 0 \quad (25)$$

的唯一正定解; 无限时域的  $g^{(k)}(t)$  满足

$$\begin{cases} g^{(0)}(t) \equiv 0, \\ \dot{g}^{(k)}(t) = (P S - A^T - Y^{(k-1)})g^{(k)}(t) - P f(x^{(k-1)}) - Y^{(k-1)} P x^{(k-1)}(t), \\ g^{(k)}(\infty) = 0, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (26)$$

$x^{(k)}(t)$  满足

$$\begin{cases} x^{(0)}(t) \equiv 0, \\ \dot{x}^{(k)}(t) = (A - S P)x^{(k)}(t) - S g^{(k)}(t) + f(x^{(k-1)}), \\ x^{(k)}(t_0) = x_0, k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

在控制器的实际设计中, 最优控制律(23)的计算过程和  $N$  的确定方法与最优控制律(19)的算法类似.

## 4 无限时域最优PD反馈输出补偿网络的设计(Design of optimal output PD feedback compensation network in infinite horizon)

### 4.1 输出反馈最优控制(Optimal control of output feedback)

在实际系统中, 一般的系统仍然用状态进行反馈, 这在实际应用中是会遇到困难的, 因为测量所有的状态有时是不可能或不实际的, 状态反馈要求对所有的状态由理想的传感器测量, 而实际的传感器有着有限的频带宽度. 有时系统的状态不是实际的物理量, 测量所有的状态在技术上和经济上也存在着问题. 除了测量问题, 每个反馈环节都需要实际硬件或计算机控制软件, 增加了系统的复杂性, 降低了系统的可靠性. 假如一个传感器发生故障, 整个系统变得不稳定了. 系统的状态反馈结构图如图1所示:

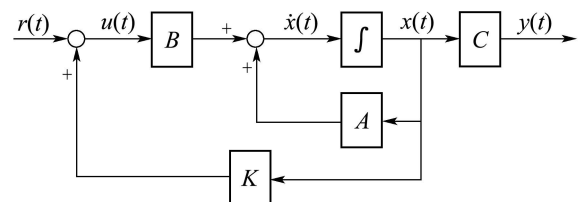


图 1 系统状态反馈控制的结构图

Fig. 1 The structure diagram of the state-feedback system

其中  $K = -R^{-1}B^T P$  是系统状态反馈系数.

输出变量可直接测量得到, 而且在大多数情况下具有明确的物理意义, 所以输出反馈是一种在技术上易于实现的常用的反馈方式. 在实际工程中, 为了使系统达到所要求的性能指标, 需要同时引入串联校正网络, 也就是本文提到的PD控制器. 对于定常线性系统, 输出反馈不改变系统的能控性和能观性.

4.2 最优PD控制设计(Design of optimal control PD)

在经典的自动控制理利用超前校正、滞后校正、PID校正以及其他校正装置来代替常规的比例控制,转化为状态空间表示方法,就是利用动态输出反馈补偿最优控制取代一般静态输出反馈控制,结果表明,基于动态补偿的最优控制其性能指标明显优于静态输出反馈补偿的最优控制性能指标,而且还能改善系统的其它动态性能及稳态性能,PD控制器中的微分控制规律,能够反映信号的变化趋势,产生有效的早期修正信号,以增加系统的阻尼程度,从而改善系统的稳定度.

采用PD反馈控制有降低被包围环节非线性特性影响的功能.反馈校正一般在一般情况下也可以减弱非线性特性对系统的影响,基于动态补偿的闭环输出反馈系统可设计的参数增多,因而设计的自由度增大,并能使设计的系统满足更高性能要求.

由系统最优控制律(19),得到系统二次型(LQR)最优控制结构图(如图2所示).

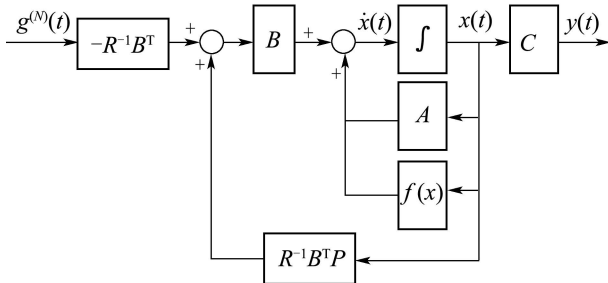


图2 二次型最优调节器(LQR)的结构

Fig. 2 Structure of quadratic optimal regulator (LQR)

由非线性系统最优控制律(19)可知,非线性系统反馈是线性部分 $P(t)x(t)$ 和非线性部分 $g^{(N)}(t)$ 的叠加,对于系统的线性部分,可以将其转换为频域形式.补偿网络一般是在频域或复频域内设计的,频域分析具有直观方便的优点,并且闭环系统的性能指标可以直接或间接地在频域内得以反映.因而将LQR和PD控制器都转化为频域形式.令干扰信号为零,在假设系统初始状态为零的情况下,可以得出频域下的系统线性部分结构如图3所示.

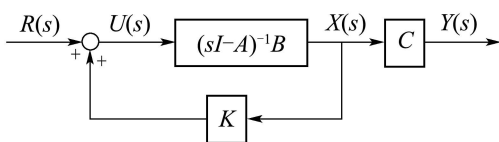


图3 二次型最优调节器(LQR)的结构

Fig. 3 Linear part of the system structure in frequency domain

其中 $R(s)$ 是输入信号.由图3得到系统线性部分的闭环传递函数矩阵

$$\phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(sI - A)^{-1}B}{I - K(sI - A)^{-1}B}. \quad (28)$$

将系统的状态反馈部分设计成为如图4所示的基于输出反馈的PD闭环控制系统,即

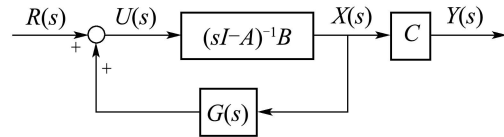


图4 二次型最优调节器(LQR)的结构

Fig. 4 System structure of PD output feedback closed-loop control

其中: $G(s)$ 是PD控制器传递函数矩阵,在PD控制下系统的闭环传递函数矩阵

$$\phi(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{C(sI - A)^{-1}B}{I - G(s)C(sI - A)^{-1}B}. \quad (29)$$

因为在优化意义下,PD控制从形式上能够代替LQR控制,则它们的闭环传递函数矩阵相等,于是得到PD控制器传递函数

$$G(s) = \frac{K(sI - A)^{-1}B}{C(sI - A)^{-1}B} = K_P(1 + T_D S), \quad (30)$$

其中: $K_P$ 表示比例系数, $T_D$ 表示微分时间常数.

对于确定系统的时域状态空间描述,由线性二次型最优控制算法可以得到最优反馈系数 $K$ ,由系数 $K$ 可对应求出最优的PD控制器矩阵 $G(s)$ 的比例系数 $K_P$ 和微分时间常数 $T_D$ .于是,PD控制器输出反馈的控制规律为

$$u(t) = K_P y(t) + K_P T_D \frac{dy(t)}{dt}. \quad (31)$$

因此,系统的状态方程可变化为

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(x) = \\ &(A + BK_P C)x(t) + BK_P T_D C \dot{x}(t) + f(x). \end{aligned} \quad (32)$$

即

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (I - BK_P T_D C)^{-1}(A + BK_P C)x(t) + \\ &(I - BK_P T_D C)^{-1}f(x). \end{aligned} \quad (33)$$

于是,得到PD反馈控制器

$$\begin{aligned} u(t) &= (K_P C + K_P T_D C)(I - BK_P T_D C)^{-1} \\ &(A + BK_P C)x(t) + \\ &K_P T_D C \times (I - BK_P T_D C)^{-1}f(x). \end{aligned} \quad (34)$$

采用PD反馈控制器方法具有与LQR最优状态反馈控制同样好的鲁棒性,并且将时域最优控制转化

到频域更符合传统的工程设计方法.

### 5 仿真示例(Simulation examples)

考虑由式(1)描述的非线性系统, 其中:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -0.47 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0], \\ f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (35)$$

系统的最优控制性能指标(3)的参数选择

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 1. \quad (36)$$

按照本文所提出的动态补偿设计方法, PD反馈控制传递函数可计算得到

$$G(s) = \frac{K(sI - A)^{-1}B}{C(sI - A)^{-1}B} = K_P(1 + T_D S) = -0.4142 - 0.9615s,$$

其设计参数中比例系数 $K_P$ 和微分时间系数 $T_D$ 分别为:  $K_P = -0.4142, T_D = 2.3215$ , 从而得到PD反馈控制器

$$u(t) = [0 \ -0.1357]x(t) + [-0.9615 \ 0]f(x).$$

比较非线性系统LQR最优状态反馈和PD反馈控制器方法, 得到仿真曲线如下图5~8所示.

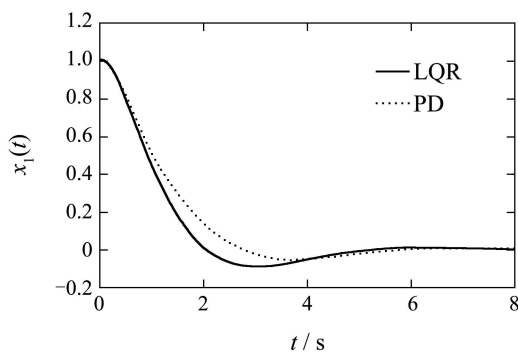


图 5 状态变量 $x_1(t)$ 的仿真曲线

Fig. 5 Simulation curves of state variables  $x_1(t)$

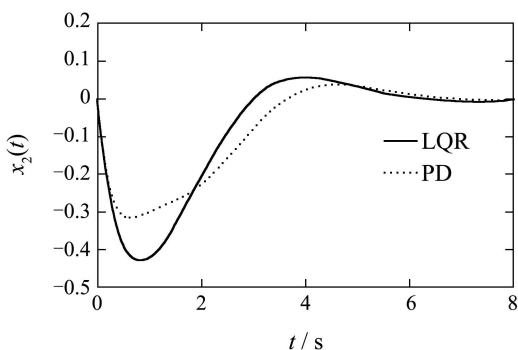


图 6 系统变量 $x_2(t)$ 的仿真曲线

Fig. 6 Simulation curves of state variables  $x_2(t)$

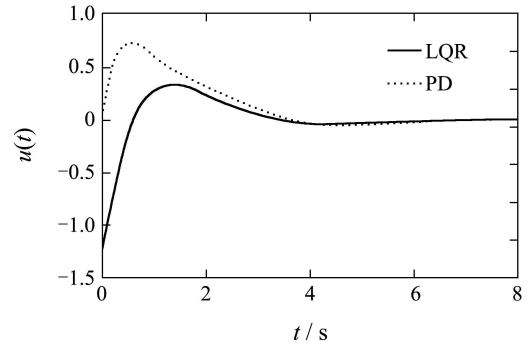


图 7 系统控制变量 $u(t)$ 的仿真曲线

Fig. 7 Simulation curves of control variables  $u(t)$

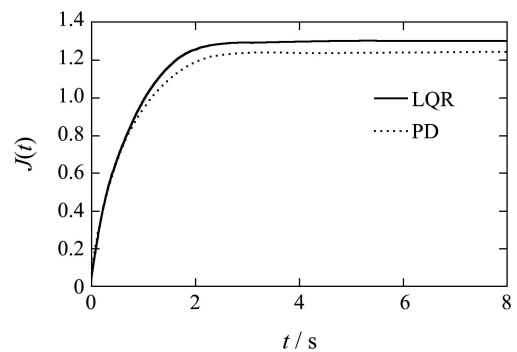


图 8 系统性能指标 $J(t)$ 的仿真曲线

Fig. 8 Simulation curves of performance  $J(t)$

由图5和图6可以看出, 在采用基于动态补偿的PD控制方法时, 系统状态变量 $x(t)$ 在超调量、响应时间方面的性能要显著优于采用逐次逼近方法时的结果, 并且具有更好的动态性能功能和鲁棒性. 由图8可以明显看出PD控制的性能指标优于LQR控制, 因此, 本文所设计的控制方法在非线形控制中比传统的LQR方法具有一定的有效性和优越性.

### 6 结论(Conclusion)

针对一类非线性系统, 本文利用非线性系统微分方程的逐次逼近理论和输出反馈理论, 提出了具有结构简单、工作稳定、鲁棒性较强, 容易硬件实现, 可改善系统的相对稳定度的PD控制器参数的优化方法, 获取系统最优的动态补偿网络, 设计出最优PD整定参数, 并解决了一般状态控制器的不能完全获得状态变量的信息问题. 最后仿真示例表明该方法具有良好的动态性能, 验证了该方法的有效性和优越性. 本文所提方法不依赖被控对象模型, 并且在工程上有非常直观的物理意义.

### 参考文献(References):

[1] BEARD R W, SARIDIS G N, WEN J T. Galerkin approximations of the generalized Hamilton-Jacobi-Bellman equation[J]. *Automatica*, 1997, 33 (12): 2159 - 2177.

- [2] KURINA G A. Asymptotic expansion of solutions of optimal control problems for discrete weakly controllable systems[J]. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, 66 (2): 201 – 213.
- [3] GARRARD W L, ENNS D F, SNELL S A. Nonlinear feedback control of highly manoeuvrable aircraft[J]. *International Journal of Control*, 1992, 56(4): 799 – 812.
- [4] MCCAFFREY D, BANKS S P. Lagrangian manifolds and asymptotically optimal stabilizing feedback control[J]. *Systems and Control Letters*, 2001, 43(3): 219 – 224.
- [5] COSTANZA V, NEUMAN C E. Flexible operation through optimal tracking in nonlinear processes[J]. *Chemical Engineering Science*, 2000, 55(16): 3113 – 3122.
- [6] MARKMAN J, KATZ I N. An iterative algorithm for solving Hamilton-Jacobi type equations[J]. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 2000, 22(1): 312 – 329.
- [7] MARKMAN, J, KATZ I N. Convergence of an iterative algorithm for solving Hamilton-Jacobi type equations[J]. *Mathematics of Computation*, 2002, 71(237): 77 – 103.
- [8] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach[J]. *Systems and Control Letters*, 2005, 54(5): 429 – 434.
- [9] TANG G Y, WANG H H. Successive approximation approach of optimal control for nonlinear discrete-time systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2005, 36(3): 153 – 161.

#### 作者简介:

**高德欣** (1978—), 男, 博士, 副教授, 主要研究方向为非线性最优控制、计算机控制等, E-mail: gaodexin@qust.edu.cn;

**魏蕊** (1986—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为非线性最优控制、时滞系统、计算机控制等, E-mail: wrweirui1778@126.com;

**唐功友** (1953—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为时滞系统、非线性系统及网络控制的分析与综合、故障诊断与容错控制等, E-mail: gtang@ouc.edu.cn;