

自推进粒子群的空间同步平行编队控制

金久才^{1,2}, 张 杰³, 官 晟³, 王岩峰³

(1. 中国科学院海洋研究所, 山东 青岛 266071; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049;

3. 国家海洋局第一海洋研究所, 山东 青岛 266061)

摘要: 平行编队是群体协作控制研究的一项重要内容, 而其空间同步, 即群体在某一方向上运动步调一致, 也是至关重要. 本文在耦合谐振子理论基础上, 提出了一种全相互作用的变速度自推进粒子模型, 设计了一种解决平行编队的空间同步问题的控制方法. 该方法通过改变自推进粒子运动速度而引入粒子间空间距离信息, 实现了所有粒子沿实轴或虚轴方向的空间同步平行编队, 并证明了该方法的收敛性. 最后给出了粒子群的空间同步平行编队的仿真例子.

关键词: 平行编队; 空间同步; 自推进粒子; 耦合谐振子

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Control for spatial synchronized parallel formation of self-propelled particles

JIN Jiu-cai^{1,2}, ZHANG Jie³, GUAN Sheng³, WANG Yan-feng³

(1. Institute of Oceanology, Chinese Academy of Sciences, Qingdao Shandong 266071, China;

2. Graduate University of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China;

3. The First Institute of Oceanography, State Oceanic Administration, Qingdao Shandong 266061, China)

Abstract: Parallel formation is an important issue in the cooperative control for collective motion; its spatial synchronization collective motion along a certain direction in a space also vital. Based on the coupled oscillator theory, a model for all-to-all self-propelled particles with variable speed is proposed, and a control scheme to stabilize the model of the spatial synchronized parallel formation is developed. The space information is obtained for the control scheme to alter the speeds of self-propelled particles for achieving the spatial synchronized parallel formation along the real or imaginary axes. The convergence of the synchronization action is proved. Numerical simulations for spatial synchronized parallel formation of particles are performed.

Key words: parallel formation; spatial synchrony; self-propelled particles; coupled oscillators

1 引言(Introduction)

无人自主移动平台, 例如陆地机器人、无人机、水下无人航行器等, 已经比较广泛地应用于相关领域, 其群体协作理论也随之得到快速地发展^[1~3]. 这些群体协作思想受到不同学科的启发, 例如自然界中动物集群行为^[4]、多Agents模式^[5]、物理粒子模型^[6]等. 群体动力学的研究内容涉及系统与控制、非线性科学、统计物理等多个领域, 具有学科交叉性和理论难度, 现阶段在工程应用中大多考虑其理想和简化的情况^[7]. 其中, 将个体看作是一个运动粒子的粒子模型, 以其简明的物理思想, 得到了广泛的研究^[6,8]. 最近, Justh等^[9]利用李群概念基于单位速度自推进粒子模型实现了粒子群平行编队, 并证明其方法的收敛性, 应用于无人机协作编队. Leonard

等^[10]将耦合谐振子模型与Justh的模型相结合, 采用李雅普诺夫方法设计了协作控制律, 并证明了方法的稳定性和收敛性, 用于水下滑翔机的协作采样. 但是由于他们采用了全相互作用下单位速度粒子模型和设计的相位控制均不涉及空间距离信息, 导致粒子群平行编队时出现空间步调不同步的问题, 即粒子群无法沿某一方向实现运动步调一致. 在实际应用中, 空间不同步将影响群体的协作性能, 例如增加群体间通讯性能要求和存在异步观测等问题.

全相互作用下的平行编队是群体协调控制的一种普遍形式, 对于群体队形保持和协作运动都是至关重要的. 例如, 对于水下无人航行器群, 空间同步的平行编队可以实现其以巡航模式的同步观测, 这是快速获取感兴趣区域有效海洋特征的一种重要方

式. 本文在Justh和Leonard的工作基础上, 提出了一种变速度的粒子模型^[11], 考虑粒子运动速度的变化而引入空间距离信息设计了控制律, 进行粒子群的平行编队的空间同步性研究, 并证明了算法的收敛性. 数值算例表明, 该方法解决了以往粒子群平行编队理论无法达到空间同步的问题.

2 粒子模型(Particle model)

首先, 引入单位速度自推进粒子模型^[12], 其数学表达为

$$\begin{cases} \dot{r}_k = e^{i\theta_k}, \\ \dot{\theta}_k = u_k, k = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $r_k = x_k + iy_k \in \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ 表示粒子 k 的位置, $\theta_k \in S^1$ 表示粒子 k 的运动方向, u_k 表示粒子 k 的航向控制量. 另外, 文中使用黑体矢量表示其对应的 N 维向量, 例如

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)^T, \boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_N)^T.$$

利用欧拉微分可得到模型(1)的离散形式:

$$\begin{cases} r_k(t+1) - r_k(t) = e^{i\theta_k(t)}, \\ \theta_k(t+1) - \theta_k(t) = u_k(t). \end{cases} \quad (2)$$

模型(1)和(2)是一种自推进粒子模型, 每个粒子以单位速度在平面上运动, 仅受航向控制. 每个粒子的状态空间为平面内的刚体转动群 $SE(2) = \mathbb{R}^2 \times S^1$, 那么由 N 个耦合粒子组成的粒子群系统具有维度为 $N \times SE(2)$ 的状态空间. 当粒子间的耦合关系只包含相对方向变量而不考虑相对空间变量, 那么粒子群的动力学维度简化为 $N \times S^1$. 而这个简化的模型等价于 N 个耦合谐振子的相位模型, 即每个粒子的航向等价于每个谐振子的相位变量, 这是耦合谐振子理论应用于粒子群编队的基础^[13]. 所以只受航向控制的粒子群编队, 可以借鉴耦合谐振子的相位模型的相关结果.

假设粒子具有单位质量, 粒子群的平均动量 \dot{R} 等价于谐振子相位参数 p_θ ,

$$\dot{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{r}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^{i\theta_k} = p_\theta = |p_\theta| e^{i\psi}, \quad (3)$$

其中: $R = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N r_k$ 为粒子群的质心, 参数 $|p_\theta|$ 是相位变量 $\boldsymbol{\theta}$ 一致性的一个衡量指标^[14].

下面引入全相互作用下的单位速度粒子模型的相位同步定理,

引理 1^[13] 当 $|p_\theta| = 1$ (同步态), 势 $U(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} |p_\theta|^2$ 达到其唯一的最大值. 对于相位模型 $\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{u}$, 利用梯度控制

$$u_k = -K \frac{\partial U}{\partial \theta_k} = -K \langle p_\theta, i e^{i\theta_k} \rangle =$$

$$-\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin \theta_{jk}, K < 0, \quad (4)$$

使其粒子模型(1)的解收敛于相位同步态. 其中:

$$\langle z_1, z_2 \rangle = \operatorname{Re}\{\bar{z}_1 \cdot z_2\}, \theta_{jk} = \theta_j - \theta_k.$$

对于单位速度粒子模型(1), 当 $|p_\theta|$ 达到最大值1时, 所有粒子的运动方向相同, 相位处于同步态的. 在Justh和Leonard的工作中使用该控制律, 实现粒子群在平面内的平行编队, 但无法保证各粒子的空间位置的同步.

本文依据粒子模型(1), 引入一种变速度粒子模型, 即粒子的速度不是单位速度, 其数学描述为

$$\begin{cases} \dot{r}_k = v_k e^{i\theta_k}, \\ \dot{\theta}_k = u_k. \end{cases} \quad (5)$$

按前面方式可以定义模型(5)粒子群的平均动量和势

$$\dot{R} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \dot{r}_k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k \cdot e^{i\theta_k} = p_\theta^{(v)}, \quad (6)$$

$$U^{(v)}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{N}{2} |p_\theta^{(v)}|^2. \quad (7)$$

下面将变速度粒子模型(5)作为本文进行空间同步平行编队的粒子模型.

3 变速度控制(Control law for variable speeds)

在给出空间同步平行编队定理之前给出如下定理:

定理 1 对于变速度粒子模型(5), 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 令 $v_k \rightarrow 1(k = 1, \dots, N)$. 如果采用控制律 $\dot{\theta}_k = u_k = -K \frac{\partial U^{(v)}}{\partial \theta_k}$, 定理1的结论亦成立, 即粒子模型(5)的解收敛于相位同步态.

证 对于变速度粒子模型(5), 根据粒子群的平均动量和势的定义式(6)和(7),

$$\dot{\theta}_k = u_k = -K \frac{\partial U^{(v)}}{\partial \theta_k} = -K \langle p_\theta^{(v)}, i v_k \cdot e^{i\theta_k} \rangle =$$

$$-K \langle \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N v_j \cdot e^{i\theta_j}, i v_k \cdot e^{i\theta_k} \rangle =$$

$$-\frac{K}{N} \operatorname{Re}\left\{ \sum_{j=1}^N i v_j \cdot v_k \cdot e^{i\theta_{kj}} \right\} =$$

$$-\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N v_j \cdot v_k \cdot \sin \theta_{jk},$$

当 $t \rightarrow \infty, v_k \rightarrow 1(k = 1, \dots, N)$ 时, 那么 $\dot{\theta}_k \rightarrow -\frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin \theta_{jk}, \dot{r}_k \rightarrow e^{i\theta_k}$, 即当 $v_k \rightarrow 1$, 变速度粒子模型(5)的粒子运动规律和控制律均收敛于相位同步定理的条件, 根据引理1定理1成立. 证毕.

据定理1, 提示如果要使变速度粒子模型收敛于平行编队, 设置的粒子的速度均应收敛于1, 而本文要求粒子群不但实现平行编队, 而且要求粒子群空间同步, 那么可以将速度设置成 $1 + \Delta v_k$, 当 $t \rightarrow \infty$, 令 $\Delta v_k \rightarrow 0 (k = 1, \dots, N)$, 但其值应与粒子 k 和粒子群质心的距离的变化成一定单调关系. 据此, 给出下面定理.

定理 2 对于变速度粒子模型(5), 如果粒子速度为

$$\begin{cases} v_k = 1 + \Delta v_k, \\ \Delta v_k = K_1 \cdot \text{Re}/\text{Im}\{(R - r_k) \cdot (-1)^m\}, \\ 0 < K_1 < 1. \end{cases} \quad (8)$$

模型(5)的解收敛于沿实轴或虚轴的空间步调同步的平行编队. 其中, $\text{Re}/\text{Im}\{\}$ 表示取实部或虚部,

$$m = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi, \\ 2, & \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \cup 0 < \theta < \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

证 下面证明以沿实轴步调一致、粒子群向右侧平行运动为例, 即 $\Delta v_k = K_1 \cdot \text{Re}\{R - r_k\}$. Δv_k 与 $\text{Re}\{R - r_k\}$ 成正比例关系, 即 Δv_k 随着粒子 k 与粒子群质心的距离的增大而增大, 减小而减小, 使得粒子群有紧缩的趋势, 那么当 $t \rightarrow \infty$, $\Delta v_k \rightarrow 0$, $v_k \rightarrow 1$, 根据定理1, 粒子速度公式(8)保证变速度粒子模型(5)收敛于平行编队. 对于粒子 k , $t + 1$ 时刻的粒子速度由 t 时刻的该粒子与粒子群质心的距离的实部决定, 其速度增量为

$$\Delta v_k(t + 1) = K_1 \cdot \text{Re}\{R(t) - r_k(t)\}, \quad (9)$$

那么 $t + 1$ 时刻第 k 个粒子与粒子群质心的距离的实部为

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{R(t + 1) - r_k(t + 1)\} = \\ & \text{Re}\left\{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (r_j(t) + v_j(t + 1) \cdot e^{i\theta_j(t)}) - \right. \\ & \left. (r_k(t) + v_k(t + 1) \cdot e^{i\theta_k(t)})\right\}. \end{aligned}$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时, 变速度粒子模型(5)收敛于平行编队, 即 $\theta_j = \theta_k, \forall j, k \in \{1, \dots, N\}$, 那么

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{R(t + 1) - r_k(t + 1)\} = \\ & \text{Re}\left\{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_j(t) - r_k(t)\right\} + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (v_j(t + 1) - \\ & v_k(t + 1)) \cdot \cos \theta_k. \end{aligned}$$

根据式(6)(7)的相位同步态定义, 有 $\sum_{j=1}^N \Delta v_j(t + 1) = 0$, 那么

$$\begin{aligned} & \text{Re}\{R(t + 1) - r_k(t + 1)\} = \\ & \text{Re}\{R(t) - r_k(t)\} - \Delta v_k(t + 1) \cdot \cos \theta_k = \end{aligned}$$

$$(1 - K_1 \cdot \cos \theta_k) \text{Re}\{R(t) - r_k(t)\}.$$

因为 $0 < K_1 < 1$, 当 $t \rightarrow \infty$, $\cos \theta_k$ 为常数, 所以粒子 k 与粒子群质心的距离的实部不断减小, 最后收敛于沿实轴单位速度平行编队, 且空间步调一致, 实现空间同步平行编队. 对于其他沿虚轴及 $m = 1$ 的情形, 同理可证. 证毕.

4 仿真结果(Simulation results)

下面基于粒子模型(1)和(5), 本文使用控制律(4), 粒子群的初始位置和初始方向为随机, 令 $K = -1$, $K_1 = -0.1$, 进行平行编队数值模拟. 图1是基于单位速度粒子模型(1)的10个粒子的平行编队, 可见无法实现空间同步. 对应于该结果, 图2给出了基于变速度粒子模型(5)和(8)的10个粒子的粒子群沿实轴方向的空间同步的平行编队, 其中粒子群的初始位置和初始方向与图1相同. 图3给出了20个粒子的变速度粒子群沿实轴方向的空间同步平行编队. 图4给出了10个粒子的变速度粒子群沿虚轴方向的空间同步平行编队. 图中圆圈表示起点, 箭头表示前进方向, 图中曲线表示粒子在 x - y 平面内的运动轨迹, 坐标单位为单位长度.

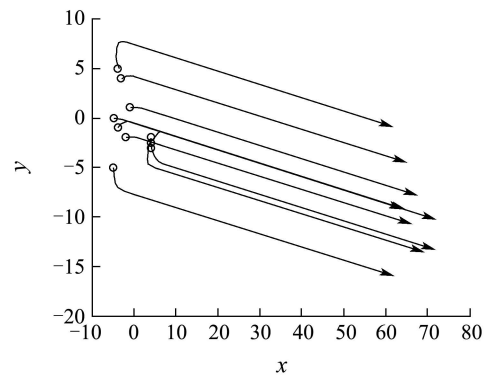


图1 10个粒子的平行编队(非空间同步)

Fig. 1 Parallel formation of 10 particles (non-spatial synchrony)

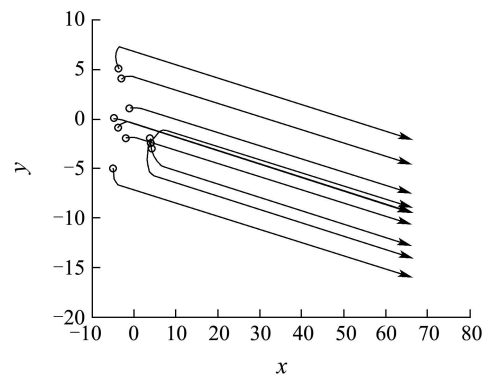


图2 10个粒子沿实轴方向的空间同步平行编队
Fig. 2 Spatial synchronized parallel formation of 10 particles along the real axis

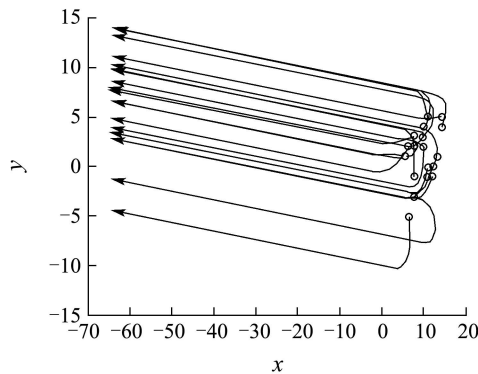


图3 20个粒子沿实轴方向的空间同步平行编队
Fig. 3 Spatial synchronized parallel formation of 20 particles along the real axis

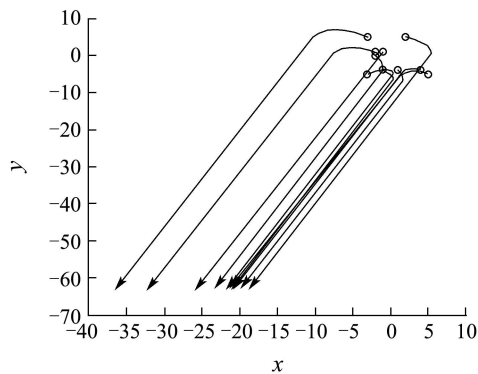


图4 10个粒子沿虚轴方向的空间同步平行编队
Fig. 4 Spatial synchronized parallel formation of 10 particles along the virtual axis

5 结论(Conclusion)

基于粒子运动方向等价于谐振子相位的耦合谐振子理论, 引入了变速度自推进粒子模型, 在变速度控制律中引入了空间距离信息, 解决了单位速度粒子模型无法实现平行编队的空间同步的问题. 对于平行编队, 该方法能够较好地实现空间同步平行编队, 可应用于自动采样移动平台群体的同步观测.

参考文献(References):

- [1] KING E, KUWATA Y, ALIGHANBARI M, et al. Coordination and control experiments on a multi-vehicle testbed[C]// *Proceeding of the 2004 American Control Conference*. New York: IEEE, 2004: 5315 – 5320.
- [2] BERTUCCELLI L F, ALIGHANBARI M, HOW J P. Robust planning for coupled cooperative UAV missions[C]// *The 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway: IEEE, 2004, 3: 2917 – 2922.
- [3] FIORELLI E, LEONARD N E, BHATTA P, et al. Multi-AUV control and adaptive sampling in monterey bay[J]. *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, 2006, 31(4): 935 – 948.
- [4] COUZIN I D, KRAUSE J, JAMES R, et al. Collective memory and spatial sorting in animal groups[J]. *Journal of Theoretical Biology*, 2002, 218(1): 1 – 11.
- [5] OLFATI-SABER R. Flocking for multi-agent dynamic systems: algorithms and theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(3): 401 – 420.
- [6] ZHANG F, LEONARD N E. Coordinated patterns of unit speed particles on a closed curve[J]. *Systems and Control Letters*, 2007, 56(6): 397 – 407.
- [7] 楚天广, 杨正东, 邓魁英, 等. 群体动力学与协调控制研究中的若干问题[J]. *控制理论与应用*, 2010, 27(1): 86 – 93. (CHU Tianguang, YANG Zhengdong, DENG Kuiying, et al. Problems in swarm dynamics and coordinated control[J]. *Control Theory & Applications*, 2010, 27(1): 86 – 93.)
- [8] D'ORSOGNA M R, CHUANG Y L, BERTOZZI A L, et al. Self-propelled particles with soft-core interactions: Patterns, stability, and collapse[J]. *Physical Review Letters*, 2006, 96(10): 104302-1-4.
- [9] JUSTH E W, KRISHNAPRASAD P S. *A simple control law for UAV formation flying*[R]. Maryland: University of Maryland, 2002 – 38.
- [10] LEONARD N E, PALEY D, LEKIEN F, et al. Collective motion, sensor networks and ocean sampling[J]. *Proceedings of the IEEE*, 2007, 95(1): 48 – 74.
- [11] JIN J C, ZHANG J, GUAN S, et al. Simulation of underwater glider fleet's cooperative formation for seafloor massive sulfides' hunting[C]// *The 20th International Offshore(Ocean) and Polar Engineering Conference*. Beijing, China: International Society of Offshore and Polar Engineers, 2010, 1: 186 – 190.
- [12] JUSTH E W, KRISHNAPRASAD P S. Equilibria and steering laws for planar formations[J]. *Systems and Control Letters*, 2004, 52(1): 25 – 38.
- [13] SEPULCHRE R, PALEY D A, LEONARD N E. Stabilization of planar collective motion: all-to-all communication[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(5): 1 – 14.
- [14] STROGATZ S H. From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators[J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2000, 143(1): 1 – 20.

作者简介:

金久才 (1983—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为海洋运动平台协作控制, E-mail: imujc@sina.com;

张杰 (1963—), 男, 研究员, 博士生导师, 目前研究方向为海洋应用技术, E-mail: zhangjie@fio.org.cn;

官晟 (1972—), 男, 副研究员, 目前研究方向为海洋应用技术, E-mail: gsh30@163.com;

王岩峰 (1970—), 男, 研究员, 目前研究方向为海洋应用技术, E-mail: wangyf@fio.org.cn.