

采用鲁棒容许集对有约束的不确定系统作鲁棒模型预测控制

秦伟伟^{1,2}, 马建军¹, 郑志强¹, 刘 刚²

(1. 国防科技大学 机电工程与自动化学院, 湖南 长沙 410073; 2. 第二炮兵工程学院 自动控制系, 陕西 西安 710025)

摘要: 针对输入和状态受约束的干扰有界多胞不确定线性系统, 提出了基于鲁棒容许集的扩大吸引域鲁棒模型预测控制(RMPC)方法. 首先给出了多面体不变集的鲁棒容许集计算方法, 并推导了鲁棒容许集存在的充分必要条件. 其次, 为了拓展Tube不变集鲁棒模型预测控制算法的适用范围, 讨论了干扰有界多胞不确定线性系统的Tube不变集控制策略. 之后为了扩大约束系统吸引域, 提出了干扰有界多胞不确定系统的鲁棒容许集模型预测控制策略. 通过采用鲁棒容许集和Tube不变集RMPC, 该方法不仅扩大了吸引域, 而且降低了在线计算量; 同时, 采用基于最小鲁棒正不变集的Tube不变集策略保证了算法的鲁棒性. 最后仿真结果验证了算法的有效性.

关键词: 干扰有界; 多胞不确定系统; 鲁棒容许集; 鲁棒模型预测控制; Tube不变集

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust model-predictive-control based on robust admissible set for constrained uncertain systems

QIN Wei-wei^{1,2}, MA Jian-jun¹, ZHENG zhi-qiang¹, LIU Gang²

(1. College of Machronics and Automation, National University of Defense Technology, Changsha Hunan 410073, China;

2. Department of Automatic Control, The Second Artillery Engineering Institution, Xi'an Shaanxi 710025, China)

Abstract: Based on the robust admissible set, a robust model-predictive-control(RMPC) strategy with extended domain of attraction is developed for an input-constrained and state-bounded polytopic uncertain linear system. First, the algorithm for calculating the robust admissible set of the polytopic invariant set is presented; the necessary and sufficient conditions for the existence of this robust admissible set are derived. Next, to expand the application range of Tube invariant set RMPC(Tube-RMPC) algorithm, the Tube-RMPC strategy for polytopic uncertain systems with bounded disturbances is considered. Afterwards, to extend the domain of attraction of the constrained system, we put forward the RMPC strategy with admissible set for the polytopic uncertain system with bounded disturbances. By employing the robust admissible set and Tube invariant set RMPC, this algorithm extends the domain of attraction and reduces the on-line computation load; meanwhile, the robustness of the algorithm is guaranteed by employing the minimal robust positive-invariant set. Finally, numerical simulation results validate the proposed method.

Key words: bounded disturbances; polytopic uncertain systems; robust admissible set; robust model-predictive-control; Tube invariant set

1 引言(Introduction)

在现有的研究中, 不确定系统常分为受扰系统和参数不确定系统. 参数不确定系统和非线性系统可以转化为多胞不确定系统处理, 因此多胞不确定系统的鲁棒模型预测控制(RMPC)具有广泛的适用性, 一直以来都是研究的热点^[1,2]. 受扰系统RMPC研究的比较早, 在诸多RMPC算法中设计干扰不变集是一种独特的方法. 对于线性时不变系统的有界干扰, Mayne等人设计了基于干扰不变集的Tube不变集RMPC^[3,4]. 由于该方法在处理有界干扰时具有普遍意义, 文献[5]将该方法应用于输出反馈控制, 文献[6]推广到具有匹配非线性的非线性系统. 为了描

述干扰不变集, 文献[7, 8]分别讨论了标称系统和线性微分包含的最小鲁棒正不变集的近似求法.

由于实际系统中参数不确定和干扰往往同时存在, 很多情况下需要研究干扰有界多胞不确定系统的鲁棒模型预测控制. 从目前掌握的文献看, 基于Tube不变集的鲁棒模型预测控制主要针对干扰有界的线性时不变系统, 而对于干扰有界的多胞不确定线性系统还未见到相关报道.

为此, 本文以干扰有界多胞不确定系统为研究对象, 讨论其RMPC策略. 首先给出了多面体集的鲁棒容许集计算方法, 并给出了鲁棒容许集存在的充分必要条件. 然后研究了干扰有界多胞不确定系统

的Tube不变集RMPC(Tube-RMPC). 最后为了扩大约束系统吸引域,降低控制输入在线计算量,在多面体不变集控制算法的基础上,结合最小鲁棒正不变集以及鲁棒容许集,设计基于鲁棒容许集的鲁棒模型预测控制策略(RAS-RMPC).

2 问题描述(Problems statement)

考虑干扰有界多胞不确定线性系统

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k), \quad (1)$$

其中: $u(k) \in \mathbb{R}^m$, $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 分别表示控制输入,系统状态($A(k), B(k) \in \Delta$, 其中

$$\Delta = \{(A, B) | (A, B) = \sum_{i=1}^L \lambda_i (A_i, B_i), \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^L \lambda_i = 1\}, \quad (2)$$

$(A_1, B_1), (A_2, B_2), \dots, (A_L, B_L)$ 表示凸多面体顶点. 输入和状态约束满足:

$$x(k) \in X \triangleq \{x(k) | A_x x(k) \leq \bar{1}\}, \quad \forall k \geq 0, \quad (3)$$

$$u(k) \in U \triangleq \{u(k) | A_u u(k) \leq \bar{1}\}, \quad \forall k \geq 0, \quad (4)$$

式中: $\bar{1}$ 表示元素为1的列向量,维数与式中矩阵相对应. 范数有界干扰 $w(k) \in \mathbb{R}^n$ 满足约束

$$w \in W \triangleq \{w | \|w\|_\infty \leq a, a \geq 0\}. \quad (5)$$

RMPC设计目标是针对系统(1)(2),在每个时刻计算容许控制输入,将系统状态驱动到原点,并最小化性能指标

$$\max_{[A(k+i), B(k+i)] \in \Delta, i \geq 0} J_\infty(k) = \sum_{i=0}^{\infty} (\|x(k+i|k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k+i|k)\|_R^2), \quad (6)$$

其中: Q_1 和 R 为加权矩阵; $x(k+i|k)$ 和 $u(k+i|k)$ 分别表示在 k 时刻对 $k+i$ 时刻状态和输入的预测值.

为了扩大约束系统吸引域,增加双模在线优化策略的可操作性,并降低控制输入在线计算量,本文引入了鲁棒容许集,下面首先给出其相关概念和算法.

定义1 干扰有界离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k)$, 状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_1^r(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, 有界干扰满足 $w(k) \in W \subset \mathbb{R}^n$. 如果存在容许控制输入使得 $x(k+1) \in \Omega$, 则称 $\tilde{\Xi}_1^r(\Omega)$ 是集合 Ω 的一步鲁棒容许集, 即

$$\tilde{\Xi}_1^r(\Omega) \triangleq \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : f(x(k), u(k)) + w(k) \in \Omega\}. \quad (7)$$

定义2 干扰有界离散系统

$$x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k),$$

状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N^r(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$, 有界干扰满足 $w(k) \in W \subset \mathbb{R}^n$. 对于任意干扰序列 $w(k), \dots, w(k+N-$

$1) \in W$, 如果存在容许控制输入序列 $u(k), \dots, u(k+N-1) \in U$ 使得 $x(k+N) \in \Omega$, 则称 $\tilde{\Xi}_N^r(\Omega)$ 是集合 Ω 的 N 步鲁棒容许集, 即

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_N^r(\Omega) \triangleq \\ \{x(k), \dots, x(k+N) \in X | \exists u(k), \dots, \\ u(k+N-1) \in U : x(k+N) \in \Omega\}. \quad (8) \end{aligned}$$

3 干扰有界多胞不确定系统的鲁棒容许集计算(Computation of robust admissible set for polytopic uncertain systems with bounded additional disturbances)

对于系统(1),一步鲁棒容许集表示为

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_1^r(\Omega) \triangleq \\ \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : (Ax(k) + \\ Bu(k)) \oplus W \in \Omega, \forall (A, B) \in \Delta\} = \\ \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : A_i x(k) + B_i u(k) \in \\ \Omega \ominus W, \forall (A_i, B_i) \in \text{Vert}(\Delta), i=1, \dots, L\}, \quad (9) \end{aligned}$$

式中: \oplus 表示Minkowski集和, \ominus 表示Pontryagin集差, $\text{Vert}(\Delta)$ 表示多胞的顶点. 另设 $\Omega' = \Omega \ominus W \triangleq \{x(k) \in \mathbb{R}^n | Qx(k) \leq q\}$, 并定义

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} = \left\{ \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid x(k) \in X, u(k) \in U, \right. \\ \left. A_i x(k) + B_i u(k) \in \Omega', i=1, \dots, L \right\} = \\ \left\{ \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \begin{bmatrix} QA_1 & QB_1 \\ \vdots & \vdots \\ QA_L & QB_L \\ A_x & 0 \\ 0 & A_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ u(k) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} q \\ \vdots \\ q \\ \bar{1} \\ \bar{1} \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

集合 \mathcal{Y} 在前 n 个坐标张成的子空间上的正交投影即为一步鲁棒容许集^[9], 即

$$\tilde{\Xi}_1^r(\Omega) \triangleq \{x(k) \in \mathbb{R}^n | \exists [x(k), u(k)]^T \in \mathcal{Y}\}, \quad (10)$$

由此得到 N 步鲁棒容许集的计算方法.

算法1 D 若目标集 Ω 是凸多面体集, 则 N 步鲁棒容许集 $\tilde{\Xi}_N^r(\Omega)$ 采用如下方法计算:

① 令 $k=0$, $\tilde{\Xi}_0^r(\Omega) = \Omega$;

② 按照一步鲁棒容许集方法计算:

$$\begin{aligned} \tilde{\Xi}_k^r(\Omega) = \{x(k) \in X | \exists u(k) \in U : A_i x(k) + B_i u(k) \in \\ \tilde{\Xi}_{k-1}^r(\Omega) \ominus W, \forall (A_i, B_i) \in \text{Vert}(\Delta), \\ i=1, \dots, L\}; \quad (11) \end{aligned}$$

③ 令 $k=k+1$, 若 $k > N$, 计算结束; 否则返回②.

II 若目标集为凸多面体集的并集 $\Omega \triangleq \bigcup_{j=1}^M \Omega_j$,

N 步鲁棒容许集计算方法如下:

Ω 的一步鲁棒容许集为

$$\tilde{\Xi}_1^r(\Omega) = \tilde{\Xi}_1^r\left(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j\right) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}_1^r(\Omega_j), \quad (12)$$

Ω 的 N 步鲁棒容许集为

$$\tilde{\Xi}_N^r(\Omega) = \tilde{\Xi}_N^r\left(\bigcup_{j=1}^M \Omega_j\right) = \bigcup_{j=1}^M \tilde{\Xi}_N^r(\Omega_j). \quad (13)$$

如果有界干扰过大, 鲁棒容许集可能不存在. 为此, 引入可达集讨论其存在的充分必要条件.

定义 3 在离散系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k))$ 中, 对于任意给定状态 $x(k) \in \Omega$, 在容许控制 $u(k) \in U$ 作用下, 下一时刻状态的集合 $\tilde{\mathfrak{R}}(\Omega)$ 称为集合 Ω 的可达集, 即

$$\tilde{\mathfrak{R}}(\Omega) \triangleq \{x(k+1) \in X | \exists u(k) \in U, \exists x(k) \in \Omega : x(k+1) = f(x(k), u(k))\}. \quad (14)$$

定理 1 对于干扰有界系统 $x(k+1) = f(x(k), u(k)) + w(k)$, 状态和输入约束分别满足式(3)和式(4), 则集合 Ω 的 i 步鲁棒容许集存在的充分必要条件是

$$\tilde{\mathfrak{R}}[\tilde{\Xi}_i^r(\Omega) \setminus \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega)] \cap (\tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega) \ominus W) \neq \emptyset. \quad (15)$$

其中:

$$\tilde{\Xi}_i^r(\Omega) \setminus \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega) = \{x | x \in \tilde{\Xi}_i^r(\Omega), x \notin \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega)\},$$

\emptyset 表示空集.

证 假设 k 时刻状态 $x(k)$ 满足

$$\begin{cases} x(k) \in \tilde{\Xi}_i^r(\Omega) \setminus \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega), \\ i = \min\{j : x(k) \in \tilde{\Xi}_j^r(\Omega)\}. \end{cases} \quad (16)$$

I) 充分条件.

根据可达集定义可知

$$f(x(k), u(k)) \in \tilde{\mathfrak{R}}[\tilde{\Xi}_i^r(\Omega) \setminus \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega)], \quad (17)$$

由式(15)可知, $\forall w(k) \in W$, 必存在可行控制输入使得

$$f(x(k), u(k)) \in \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega) \ominus W, \quad (18)$$

因此式(11)成立, 即 i 步鲁棒容许集存在. 充分性得证.

II) 必要条件.

假设 i 步鲁棒容许集存在, 则对于满足式(16)的状态 $x(k)$, 存在可行输入使得

$$f(x(k), u(k)) \in \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega) \ominus W.$$

又由可达集定义可知

$$\begin{aligned} x(k) \in (\tilde{\Xi}_i^r(\Omega) \setminus \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega)) &\Rightarrow \\ f(x(k), u(k)) \in \tilde{\mathfrak{R}}[\tilde{\Xi}_i^r(\Omega) \setminus \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega)], \end{aligned} \quad (19)$$

则存在控制输入使得

$$f(x(k), u(k)) \in$$

$$\tilde{\mathfrak{R}}[\tilde{\Xi}_i^r(\Omega) \setminus \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega)] \cap (\tilde{\Xi}_{i-1}^r(\Omega) \ominus W) \neq \emptyset, \quad (20)$$

因此式(15)成立. 必要性得证.

根据定理1, 对于给定的 W , 将满足约束(16)的最大 $i^* \in \mathbb{N}^+$ 定义为确定参数. 如果 i^* 为有限整数, 则定义

$$\tilde{\Xi}_C(\Omega) \triangleq \bigcup_{k=1}^{i^*} \tilde{\Xi}_k^r(\Omega)$$

为有限确定的鲁棒控制容许集. 如果 i^* 为无限数, 则定义

$$\tilde{\Xi}_C(\Omega) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \bigcup_{k=1}^N \tilde{\Xi}_k^r(\Omega)$$

为鲁棒控制容许集.

4 干扰有界多胞不确定系统的 RMPC (RMPC for polytopic uncertain systems with bounded unknown disturbances)

4.1 干扰有界多胞不确定系统的 Tube-RMPC (Tube-RMPC for polytopic uncertain systems with bounded unknown disturbances)

对于有界干扰多胞不确定线性系统, 从目前掌握的资料来看, 还没有相关的文献给出该类问题的 Tube 不变集鲁棒 MPC 策略. 为此本文在文献[3]的基础上, 设计有界干扰多胞不确定系统的 Tube-RMPC 策略.

与线性时不变系统 Tube 不变集策略相似, 干扰有界多胞不确定系统的 Tube-RMPC 基本思路是利用反馈控制律构成闭环系统 $x(k+1) = (A(k) + B(k)K)x(k) + w(k)$, 然后采用一定控制策略, 使得实际不确定系统的轨迹始终处于不含干扰的多胞不确定系统

$$x'(k+1) = (A(k) + B(k)K)x'(k)$$

最优轨迹为中心的干扰不变集状态序列 $X : \{X_1, X_2, \dots, X_N\}$ 中, 其中 $X_i = x'_i \oplus Z$. x'_i 表示最优轨迹状态, Z 表示干扰不变集. 对于有界干扰线性时不变系统, 文献[3]给出了关于 Tube 不变集策略.

引理 1 假设 Z 是系统

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) + w(k)$$

的干扰不变集. 实际不确定系统为

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k),$$

对应标称系统为

$$x'(k+1) = Ax'(k) + Bu'(k).$$

如果 k 时刻实际系统状态 $x(k) \in x'(k) \oplus Z$, 采用控制输入

$$u(k) = u'(k) + K(x(k) - x'(k)).$$

可保证对于任意 $w \in W$ 都有 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z$.

在引理1基础上, 将Tube不变集控制策略推广到有界干扰多胞不确定线性系统.

定理2 假设 Z 是系统

$$x(k+1) = (A(k) + B(k)K)x(k) + w(k)$$

的干扰不变集. 实际不确定系统(1)对应不含干扰的多胞系统定义为

$$x'(k+1) = A(k)x'(k) + B(k)u'(k).$$

如果 k 时刻实际状态 $x(k) \in x'(k) \oplus Z$, 则采用控制输入

$$u(k) = u'(k) + K(x(k) - x'(k)),$$

可保证对于任意 $w \in W$ 都有 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z$.

证 系统矩阵满足多胞约束(2), 对于任一多胞顶点 (A_i, B_i) , 定义预测状态:

$$x_i(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + w_i(k), \quad (21)$$

$$x'_i(k+1) = A_i x'(k) + B_i u'(k), \quad (22)$$

其中 $1 \leq i \leq L$. 为了便于说明问题, 这里假设 $w_i(k) \in W$, 且

$$\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) w_i(k) = w(k). \quad (23)$$

由于 Z 是多胞不确定系统的干扰不变集, 则 Z 也是 $x_i(k+1) = A_i x(k) + B_i u(k) + w_i(k)$ 的干扰不变集. 由引理1可知, 采用控制输入 $u(k) = u'(k) + K(x(k) - x'(k))$ 可以保证对于任意 $w(k) \in W$,

$$x_i(k+1) \in x'_i(k+1) \oplus Z, \quad (24)$$

由式(2)可知, $k+1$ 时刻实际状态为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \\ & \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) A_i \right) x(k) + \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) B_i \right) u(k) + \\ & \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) w_i(k) \right) = \\ & \sum_{i=1}^L \lambda_i(k) (A_i x(k) + B_i u(k) + w_i(k)) = \\ & \sum_{i=1}^L \lambda_i(k) x_i(k+1). \end{aligned} \quad (25)$$

同理, 不含干扰系统 $k+1$ 时刻状态为

$$\begin{aligned} x'(k+1) &= \\ & \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) A_i \right) x'(k) + \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) B_i \right) u'(k) = \\ & \sum_{i=1}^L \lambda_i(k) x'_i(k+1). \end{aligned} \quad (26)$$

由式(24)~(26)可得

$$x(k+1) \in \sum_{i=1}^L \lambda_i(k) (x'_i(k+1) \oplus Z) =$$

$$\left(\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) x'_i(k+1) \right) \oplus \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i(k) \right) Z = x'(k+1) \oplus Z,$$

即 $x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z$. 证毕.

定理2为建立干扰有界多胞不确定系统的Tube-RMPC提供了理论基础, 下面基于文献[4, 5]思路设计相应的控制律.

系统(1)对应的不含干扰多胞不确定系统为

$$x'(k+1) = A(k)x'(k) + B(k)u'(k), \quad (27)$$

并定义性能指标函数 \bar{J}_N 为

$$\begin{aligned} \bar{J}_N &= \sum_{i=0}^{N-1} \|x'(k+i|k)\|_{Q_1}^2 + \|u'(k+i|k)\|_R^2 + \\ & \bar{V}_f(x'(N+k|k)), \end{aligned} \quad (28)$$

其中: N 表示预测步长, $\bar{V}_f(\cdot)$ 表示终端代价函数. 对于系统(27)的状态 $x'(k)$ 和控制输入 $u'(k)$ 满足更加严格的约束:

$$(u', x') \in (\bar{X}, \bar{U}), \quad \bar{X} \triangleq X \oplus Z, \quad \bar{U} \triangleq U \oplus KZ.$$

假设 $x'(k) \in \bar{X}_N$ 且 N 步预测状态满足如下条件:

$$x(k) \in x'(k) \oplus Z, \quad x'(k+N) \in \bar{X}_f,$$

其中: 集合 \bar{X}_f 表示终端约束集, \bar{X}_N 表示 N 步到达终端约束集的状态可行集合. 因此对于状态 $x'(k) \in \bar{X}_N$, 定义在线优化过程 $P_N(x')$:

$$\bar{J}_N^* = \min_{u'} \{ \bar{J}_N | u' \in U'_N, x' \in X'_N \}, \quad (29)$$

$$u'_* = \arg \min_{u'} \{ \bar{J}_N | u' \in U'_N, x' \in X'_N \}, \quad (30)$$

其中:

$$x' \triangleq \{x'(k|k), \dots, x'(k+N|k)\},$$

X'_N 表示状态序列约束集, 即

$$X'_N = \{x' | x'(i) \in \bar{X}, 1 \leq i \leq N\},$$

$$u' \triangleq \{u'(k|k), \dots, u'(k+N-1|k), Kx'(k+N|k)\},$$

U'_N 表示控制输入序列约束集, 即

$$U'_N = \{u' | u'(i) \in \bar{U}, 1 \leq i \leq N\}.$$

求解 $P_N(x')$ 即可得到最优控制序列 u'_* 和状态序列 x'_* .

对于满足 $x(0) \in x'(0) \oplus Z$ 的初始状态, 在每个采样时刻在线优化 $P_N(x')$, 进而得到Tube-RMPC控制律 $\kappa_N(\cdot)$:

$$\kappa_N(k) = u'_*(k) + K(x(k) - x'(k)), \quad (31)$$

其中 $u'_*(k)$ 表示优化序列 u'_* 中的第1个元素.

4.2 基于鲁棒容许集的RMPC策略(RMPC based on robust admissible set)

定理2为干扰有界多胞不确定系统设计Tube-

RMPC提供了理论基础. 但是, 该方法以单一的控制不变集作为终端约束集, 并采用若干个自由控制变量进行在线优化, 存在吸引域保守性大, 在线计算量大的问题. 本节在定理2的基础上, 以多个控制不变集代替单一反馈增益对应的控制不变集作为终端约束, 并引入鲁棒容许集, 将若干个自由变量的在线优化转化为单步优化, 采用离线设计和在线优化相结合的双模控制策略, 设计基于鲁棒容许集的鲁棒预测控制算法(RAS-RMPC), 以扩大吸引域和降低在线计算量. 其基本思路为: 首先离线构造终端约束集和鲁棒容许集, 然后在线实施双模控制策略(终端约束集作为Mode1, 如果状态属于该集合, 采用反馈增益切换策略, 保证系统收敛到原点为中心的干扰不变集; 鲁棒容许集作为Mode2, 如果系统状态属于鲁棒容许集, 根据状态所处的位置, 确定在线优化目标集, 并进行单步优化, 降低控制输入在线计算量).

为了有效抑制有界干扰, 采用最小鲁棒正不变集作为干扰不变集, 设计RAS-RMPC.

算法2 基于鲁棒容许集的RMPC, RAS-RMPC.

I) 离线部分.

Step 1 按照文献[10]的算法1离线部分, 设计并计算向原点收敛的多面体不变集序列 $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, 以及对应的反馈增益 K_1, \dots, K_M ;

Step 2 采用文献[8]中最小鲁棒正不变集计算方法, 得到 K_1, \dots, K_M 对应的最小鲁棒正不变集序列 Z_1, \dots, Z_M ;

Step 3 $\bar{X}(\bar{X} = X \ominus Z_i)$ 作为新状态约束, $\bar{U}(\bar{U} = U \ominus K_i Z_i)$ 作为输入约束, 计算 K_1, \dots, K_M 对应的控制不变集序列 $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_M$;

Step 4 将 $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i$ 作为目标集, 依据定理1计算鲁棒容许集 $\tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega})$.

II) 在线部分.

Step 1 给定初始状态 $x(0)$, 令 $k = 0$;

Step 2 根据当前时刻系统状态 $x(k)$, 判断: 如果

$$x(k) \in \Psi = \bigcup_{i=1}^M (\tilde{\Omega}_i \oplus Z_i),$$

设计控制输入作用于系统

$$u(k) = K_i x(k), \quad i = \max\{j : x(k) \in \tilde{\Omega}_j \oplus Z_j\}. \quad (32)$$

如果 $x(k) \in \tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega})/\tilde{\Omega}$, 采用单步在线优化鲁棒预测控制计算控制输入, 即求解下面优化过程

$$\min_{u(k)} J(k) = \|x(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_R^2,$$

s.t.

$$\begin{cases} x(k) \in X, u(k) \in U, w(k) \in W, \\ A(k)x(k) + B(k)u(k) \in \begin{cases} \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega}) \ominus W, & i > 1, \\ \tilde{\Omega}, & i = 1, \end{cases} \\ x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k) + w(k), \\ (A(k), B(k)) \in \Delta, \end{cases} \quad (33)$$

其中: $i = \min\{j : x(k) \in \tilde{\Xi}_j^r(\tilde{\Omega})\}$. 通过上述优化问题得到控制输入 $u(k)$ 作用于系统;

Step 3 测量下一时刻的系统状态, 返回在线部分Step 2.

注1 优化过程(33)中, $i = 1$ 时选择 $\tilde{\Omega}$ 作为优化目标集合是可行的. 如果 $x(k) \in \tilde{\Xi}_1^r(\tilde{\Omega}_i)$, 则存在控制输入使得 $A(k)x(k) + B(k)u(k) \in \tilde{\Omega}_i$, 因此

$$x(k+1) \in (A(k)x(k) + B(k)u(k)) \oplus W \subset \tilde{\Omega}_i \oplus W.$$

又因为 $W \subseteq Z_i$ [8], 则

$$x(k+1) \in \tilde{\Omega}_i \oplus Z_i,$$

所以 $i = 1$ 时选择 $\tilde{\Omega}$ 作为优化目标集合是可行的.

在给出RAS-RMPC方法稳定性证明之前, 首先给出相关的引理.

引理2 RAS-RMPC方法中集合 $\Psi = \bigcup_{i=1}^M (\tilde{\Omega}_i \oplus Z_i)$ 是系统(1)的控制不变集.

证 由算法2可知, 在状态约束 \bar{X} 和输入约束 \bar{U} 的约束条件下, $\tilde{\Omega}_i$ 表示状态反馈 K_i 对应的控制不变集, Z_i 表示系统(1)的最小鲁棒正不变集. $x'(k)$ 表示系统(27)的状态, $x(k)$ 表示实际系统状态.

在集合 Ψ 中, $x'(k)$ 与 $x(k)$ 存在如下关系:

$$x(k) \in x'(k) \oplus Z_i.$$

假设 $x'(k) \in \tilde{\Omega}_i$, 则

$$x(k) \in \tilde{\Omega}_i \oplus Z_i. \quad (34)$$

将 $u(k) = K_i x(k)$ 作用于实际系统, 按照定理2和文献[3]Tube不变集控制策略, 控制输入分解为

$$u(k) = K_i x'(k) + K_i (x(k) - x'(k)). \quad (35)$$

将 $u'(k) = K_i x'(k)$ 作为系统(27)的输入, 即

$$x'(k+1) = (A(k) + B(k)K_i) x'(k), \quad (36)$$

因为 $\tilde{\Omega}_i$ 为控制不变集, 则 $x'(k+1) \in \tilde{\Omega}_i$.

由定理2可知

$$x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z_i, \quad (37)$$

故采用 $u(k) = K_i x(k)$ 保证实际系统状态满足

$$x(k+1) \in x'(k+1) \oplus Z_i \subset \tilde{\Omega}_i \oplus Z_i. \quad (38)$$

由式(34)(38)可知, $\tilde{\Omega}_i \oplus Z_i$ 为系统(1)的控制不变集, 又因为控制不变集的并集仍是控制不变集, 则 $\Psi = \bigcup_{i=1}^M (\tilde{\Omega}_i \oplus Z_i)$ 为控制不变集.

注 2 在优化过程(33)中, 实际性能指标为

$$J(k) = \|x(k)\|_{Q_1}^2 + \|u(k)\|_R^2 + \|x(k+1)\|_P^2,$$

终端集约束为

$$A(k)x(k) + B(k)u(k) \in \begin{cases} \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega}) \ominus W, & i > 1, \\ \tilde{\Omega}, & i = 1, \end{cases} \quad (39)$$

即

$$x(k+1) \in \begin{cases} \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega}), & i > 1, \\ \Psi, & i = 1. \end{cases} \quad (40)$$

由鲁棒容许集定义以及 $\Psi = \bigcup_{i=1}^M (\tilde{\Omega}_i \oplus Z_i)$ 的控制不变集特性可知, 在优化问题(33)中, $\tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega})$ 是一种稳定性约束条件, 即只要系统状态进入 $\tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega})$, 即可通过在线优化以及控制律切换驱动状态向平衡原点收敛. 从这一角度来讲, 系统状态进入即可认为系统达到了稳定的控制目标, 因此可以人为的设计 $P=0$ ^[11], 从而得到形如(33)的性能指标.

定理 3 对于系统(1), 满足约束(2)~(4), 采用算法2设计的RAS-RMPC策略可以保证系统状态渐近稳定到以原点为中心的最小鲁棒正不变集.

证 采用算法2设计的控制策略作用于系统. 对于给定初始状态 $x(0)$. 假设 k 时刻状态为 $x(k)$.

$$\text{I) } x(k) \in \Psi = \bigcup_{i=1}^M (\tilde{\Omega}_i \oplus Z_i),$$

设计控制输入

$$u(k) = K_i x(k), \quad i = \max\{j : x(k) \in \tilde{\Omega}_j \oplus Z_j\},$$

可保证系统收敛到平衡点为中心的最小鲁棒正不变集 Z_M .

由引理2可知, Ψ 为系统的控制不变集, $\tilde{\Omega}$ 为系统(27)的控制不变集, 因此采用反馈增益切换策略可保证系统(27)的状态收敛到平衡点, 实际系统收敛到最小鲁棒正不变集 Z_M .

$$\text{II) } x(k) \in \tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega}).$$

由于已知鲁棒容许集, 因此可根据状态确定到达终端约束集 Ψ 需要的优化时域步长. 算法2中鲁棒容许集满足存在条件(16), 因此如果系统状态 $x(k) \in \tilde{\Xi}_i^r(\tilde{\Omega})$, 则通过优化过程(33), 可得到控制输入 $u(k)$ 保证

$$\begin{aligned} A(k)x(k) + B(k)u(k) &\in \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega}) \ominus Wx(k+1) \in \\ &(A(k)x(k) + B(k)u(k)) \oplus W \subset \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega}), \end{aligned}$$

即 $x(k+1) \in \tilde{\Xi}_{i-1}^r(\tilde{\Omega})$. 若 $i=1$, 则存在可行的控制输入 $u(k)$ 使得

$$A(k)x(k) + B(k)u(k) \in \tilde{\Omega},$$

$$x(k+1) \in (A(k)x(k) + B(k)u(k)) \oplus W \subset \Psi,$$

即 $x(k+1) \in \Psi$. 如果

$$A(k)x(k) + B(k)u(k) \in \tilde{\Omega},$$

即 $x(k+1) \in \Psi$, 则切换到相应控制策略即可保证系统收敛到最小鲁棒正不变集 Z_M .

5 仿真算例(Simulation example)

以下面多胞不确定线性系统为例设计控制器:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.1 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_1.$$

状态约束和输入约束为:

$$A_x = [0.1I \quad -0.1I]^T, \quad A_u = [1 \quad -1]^T.$$

有界干扰满足 $w \in W \triangleq \{w \mid \|w\|_\infty \leq 0.1\}$. 性能指标函数中的加权矩阵: $Q_1 = I, R = 1$.

首先按照文献[10]方法构造一组向原点收敛的控制不变集序列 $\Omega_1, \dots, \Omega_M$. 然后构造不含干扰系统的控制不变集序列 $\tilde{\Omega}_1, \dots, \tilde{\Omega}_M$. 定义 $\tilde{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \tilde{\Omega}_i$, 并计算其 N 步鲁棒容许集 $\tilde{\Xi}_N^r(\tilde{\Omega})$.

为了简化计算, 这里选择状态反馈控制律(即 $M=1$) $K = [-0.1842 \quad -0.5019]^T$ 进行仿真. 其对应的控制不变集, 最小鲁棒正不变集, 以及 N 步鲁棒容许集(这里 $N=10$), 如图1所示.

假设初始状态为 $x_0 = (-10, 6.5)^T \in \tilde{\Xi}_{10}^r(\tilde{\Omega})$, 多次仿真结果如图1~3所示. 图1表示系统轨迹曲线, 图2表示最小鲁棒正不变集附近的轨迹曲线. 控制输入变化曲线如图3所示, 表明控制输入满足系统约束. 结果表明RAS-RMPC能够保证系统渐近稳定到原点为中心的最小鲁棒正不变集内.

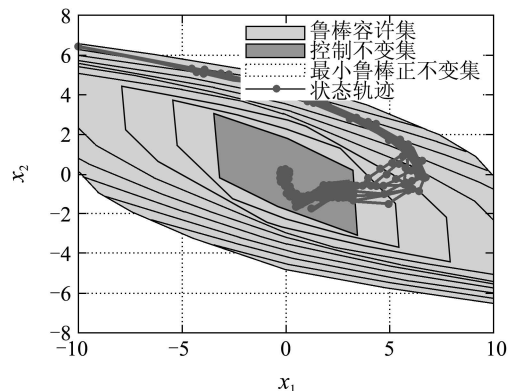


图1 系统轨迹曲线

Fig. 1 The trajectory of system state

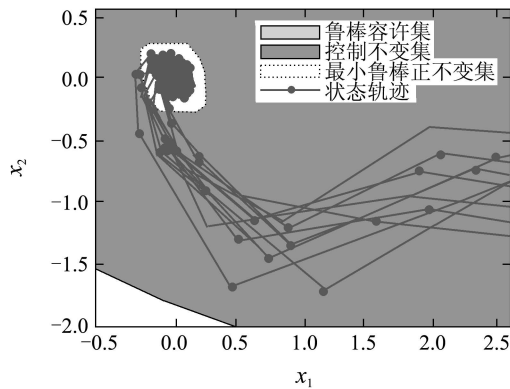


图 2 最小鲁棒正不变集附近的系统轨迹曲线

Fig. 2 The trajectory of system state around minimal robust positive-invariant set

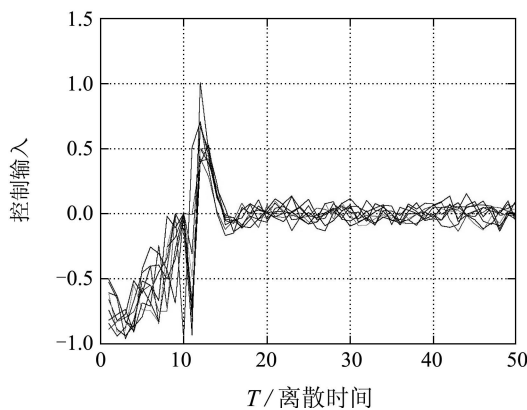


图 3 控制输入曲线

Fig. 3 The control input

由于在模型预测控制中, 在线优化变量越多, 计算量越大, 减小在线优化步数可以极大降低在线计算量. 在RAS-RMPC中引入了鲁棒容许集, 将多步优化转化为单步优化, 因此RAS-RMPC有效降低了在线计算量.

为了表明引入鲁棒容许集在降低计算量上的优势, 分别采用Tube-RMPC与RAS-RMPC方法设计控制输入, 在线计算量比较如表1所示.

表 1 $x_0 = [-5 \ -2]^T$ 的控制输入计算时间

Table 1 Control input computation time of

$$x_0 = [-5 \ -2]^T$$

在线步数	RAS-RMPC	Tube-RMPC
Step 1	$N = 1$ 0.4034	$N = 6$ 2.9011
Step 2	$N = 1$ 0.3860	$N = 5$ 2.1562
Step 3	$N = 1$ 0.4493	$N = 4$ 1.6244
Step 4	$N = 1$ 0.4279	$N = 3$ 1.0427
Step 5	$N = 1$ 0.4300	$N = 2$ 0.5699
Step 6	$N = 1$ 0.3774	$N = 1$ 0.3270

从计算量上看, RAS-RMPC方法较Tube-RMPC算法极大的降低了在线计算量.

前面的分析表明鲁棒容许集是一种具有稳定性约束的集合, 因此将鲁棒容许集作为双模预测控制的终端约束集是可行的. 相对于Tube-RMPC的控制不变集, RAS-RMPC扩大了终端约束集, 进而可能扩大吸引域. 下面给出初始状态的可行性来比较两种方法吸引域的大小, 如表2所示. 结果表明RAS-RMPC的吸引域要大于Tube-RMPC.

表 2 初始状态可行性分析

Table 2 Feasibility analysis of initial state

x_0	$\begin{bmatrix} -10 \\ 6.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -9 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5 \\ -2.8 \end{bmatrix}$
Tube-RMPC	不可行	不可行	可行 ($N = 6$)	不可行
RAS-RMPC	可行 ($N = 10$)	可行 ($N = 8$)	可行 ($N = 6$)	可行 ($N = 9$)

综上可知, RAS-RMPC方法能够保证干扰有界多胞不确定系统收敛到以原点为中心的最小鲁棒正不变. 该算法不仅有效降低了在线计算量, 而且扩大了吸引域, 达到了期望的目的.

6 结语(Conclusions)

本文以干扰有界多胞不确定系统为研究对象, 在多面体不变集控制策略的基础上, 首先讨论了基于Tube不变集的鲁棒模型预测控制方法. 然后为了扩大约束系统吸引域, 并降低在线计算量, 引入了多面体不变集序列的鲁棒容许集, 并给出鲁棒容许集存在的充分必要条件. 最后结合最小鲁棒正不变集, 设计了约束不确定系统的容许集鲁棒模型预测控制. 仿真结果表明本文设计算法是一种行之有效的鲁棒控制策略.

参考文献(References):

- [1] 席裕庚, 李德伟. 预测控制定性综合理论的基本思路和研究现状[J]. 自动化学报, 2008, 34(10): 1225 - 1234.
(XI Yugeng, LI Dewei. Fundamental philosophy and status of qualitative synthesis of model predictive control[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(10): 1225 - 1234).
- [2] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality[J]. Automatica, 2000, 36(6): 789 - 814.
- [3] MAYNE D Q, SERON M M, RAKOVIC S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances[J]. Automatica, 2005, 41(2): 219 - 224.
- [4] LANGSON W, CHRYSOCHOOS I, RAKOVIC S V, et al. Robust model predictive control using tubes[J]. Automatica, 2004, 40(1): 125 - 133.
- [5] MAYNE D Q, RAKOVIC S V, FINDEISEN R, et al. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems[J]. Automatica, 2006, 42(7): 1217 - 1222.

- [6] RAKOVIC S V, TEEL A R, MAYNE D Q, et al. Simple robust control invariant tubes for some classes of nonlinear discrete time systems[C] // *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision & Control*. New York: IEEE, 2006: 6397 – 6402.
- [7] RAKOVIC S V, KERRIGAN E C, KOURAMAS K I, et al. Invariant approximations of the minimal robust positively invariant set[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 406 – 410.
- [8] KOURAMAS K I, RAKOVIC S V, KERRIGAN E C, et al. On the minimal robust positively invariant set for linear difference inclusions[C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. New York: IEEE, 2005: 2296 – 2301.
- [9] KERRIGAN E C. *Robust constraint satisfaction: invariant sets and predictive control*[D]. Cambridge: University of Cambridge, 2000.
- [10] 席裕庚, 朱红林, 李德伟. 基于多面体不变集的非线性鲁棒模型预测控制器综合[J]. *控制与决策*, 2009, 24(2): 302 – 307.
(XI Yugeng, ZHU Honglin, LI Dewei. Synthesis off-line robust model predictive control based on polyhedron invariant set[J]. *Control and Decisions*, 2009, 24(2): 302 – 307.)
- [11] 邹涛. 约束模型预测控制系统的分析与设计[D]. 上海: 上海交通大学, 2004.
(ZOU Tao. *Analysis and design for constraint robust model predictive control*[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2004.)
- [12] DING B C, XI Y G, LI S Y. A synthesis approach of on-line constrained robust model predictive control[J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 163 – 167.

作者简介:

秦伟伟 (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为模型预测控制、精确制导与控制, E-mail: qww_1982@163.com;

马建军 (1980—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器控制分配;

郑志强 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向精确制导与控制、机器人协同控制;

刘刚 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为精确制导与控制.