文章编号: 1000−8152(2011)06−0759−04

双回路复杂波网络的镇定

王　雷, 许跟起

(天津大学 电气与自动化工程学院 自动化系, 天津 300072; 天津大学 理学院 数学系, 天津 300072)

摘要: 本文研究双回路的复杂波网络系统, 主要探索带回路系统的控制问题, 通过设计反馈控制器使得闭环系统稳定. 同时借助于谱分析方法讨论了相应闭环系统算子谱的分布情况并证明了系统算子的(广义)本征向量构成状态空间上的一组加括号Riesz基, 得到了闭环系统特征模态的展开.

关键词: 复杂网络; C_0半群; 渐近稳定; 谱分析; 特征模态

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Stabilization of the complex wave network with two circuits

WANG Lei, XU Gen-qi

(Department of Automation, School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China; Department of Mathematics, School of Science, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

Abstract: A complex wave network with two circuits is stabilized by using a feedback controller for stabilizing the closed-loop. By the spectral analysis, we prove that the system is asymptotic stable, and the spectra of the closed-loop system operator is located in a strip on the left half complex plane and being parallel to the imaginary axis. As a consequence, the sequence of eigenvectors and generalized eigenvectors of the system operator forms the parenthesized Riesz basis for the state space. Hence, the solution of the system can be expanded in the characteristic modes of the system.

Key words: complex network; C_0 semigroup; asymptotic stable; spectral analysis; characteristic modes

1　引言(Introduction)

由于网络系统在工程上具有广泛的应用背景, 几十年来网络系统动力学与控制问题一直是各个领域学者研究的热点问题, 已出现大量出色的结果: J Von Below通过建立不等式的方法研究抛物型网络方程的可解性[1]; J E Lagness, G Leugering与E J P G Schmidt为代表的研究组采用向量形式对系统的可控性, 可观测不等式进行了研究, 给出了一些可控性结果[2∼4]; Y V Pokornyi主要研究网络微分方程的基本理论[5]; Ammari和Jellouli借助于达朗贝尔公式及观测不等式对星型弦网络在公共节点处施加反馈控制器后的指数稳定性进行了分析[6]. 另外文献[7∼9]则是通过谱分析的方法, 研究了网络的Riesz基性质与稳定性. 更多工作参见文献[10∼12]及其参考文献.

在工程上, 鉴于波传播的普遍性, 一维波网络的研究更为人们所关注. 目前结果还主要针对星型和树形网络, 对比较复杂的网络, 特别是带有回路的网络研究结果相对较少. 主要困难在于复杂网络的控制器设计以及相应闭环系统的稳定性分析. 作为复杂网络的一种简单情形, 本文研究带有两个回路的复杂网络系统, 主要探索带回路系统的控制问题. 研究目标是设计最少个数的反馈控制器使得闭环系统稳定.

2　模型的建立与系统适定性分析(Modeling and well-posedness of the system)

设$G = (V, E)$为$\mathbb{R}^2$中的简单连通图(见图1), 其中顶点集$V = (a_1, a_2, \cdots, a_{11})$, 边集$E = (e_1, e_2, \cdots, e_{12})$. $a_i(i = 1, 2, 3, 4, 5)$是图G的边界点, 设a_1点固定, $a_i(i = 2, 3, 4, 5)$自由. 其他顶点$a_i(i = 6, 7, 8, 9, 10, 11)$为内部节点, 记为$V_{\rm int}$. 每条边$e_i$弧长为$l_i$, 边$e_i$上的点通过弧长参数化函数

$$\pi_i : [0, l_i] \to e_i,\ i = 1, 2, \cdots, 12$$

与区间$[0, l_i]$上的点一一对应.

假设考虑的复杂网络在静止时与图$G = (V, E)$重合. 用$u(x, t)$表示$\pi_i(x) \in G(i = 1, 2, \cdots, 12)$位置上在时刻$t$偏离平衡状态的位移. 设$y(x, t) = u(xl_j, t)$, $x \in (0, 1)$, $\pi_i(xl_j) \in e_j$. 假设系统经历微小振动, 其运动满足如下条件:

1) 在每条边e_j上满足偏微分方程

收稿日期: 2010−04−09; 收修改稿日期: 2010−08−20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(NSFC–60874034).

$$m_j y_{j,tt}(x,t) = T_j y_{j,xx}(x,t),\ j=1,2,\cdots,12,$$

$x\in(0,1),\ t>0$, 其中$m_j>0,\ T_j>0$分别表示系统第j条边的质量密度和张力;

2) 在内部节点a_j处位移连续

$$y(a_j,t)=y_k(0,t)=y_i(1,t),\ \forall k\in J^-(a_j),\ i\in J^+(a_j);$$

3) 在节点a_k满足动力学条件

$$\sum_{j\in J^+(a_k)} T_j y_{j,x}(1,t) - \sum_{i\in J^-(a_k)} T_i y_{i,x}(0,t) = f(a_k,t),$$

其中: $a_k\in V_{\rm int}$, $J^-(a_k)$表示从a_k点出来的边的指标集, $J^+(a_k)$表示进入a_k点的边的指标集, $f(a_k,t)$为作用在a_k处的外力. 该系统称为一维波网络.

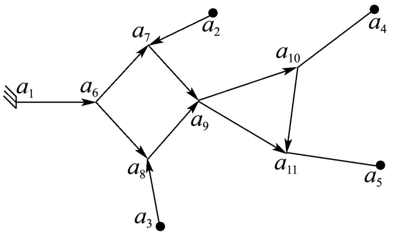

图 1 复杂波网络

Fig. 1 Complex wave network

为了叙述方便, 在网络G中引入定向关联矩阵$\Phi^-=(\phi_{ij}^-)_{11\times12}$及$\Phi^+=(\phi_{ij}^+)_{11\times12}$, 其中:

$$\phi_{ij}^-=\begin{cases}1,\ x_j(0)=a_i,\\ 0,\ 其他,\end{cases}\quad \phi_{ij}^+=\begin{cases}1,\ x_j(1)=a_i,\\ 0,\ 其他.\end{cases}$$

令:

$$\begin{aligned}&F(v,t)=[f(a_1,t)\ \ f(a_2,t)\ \cdots\ f(a_{11},t)]^{\rm T},\\&Y(x,t)=[y_1(x,t)\ \ y_2(x,t)\ \cdots\ y_{12}(x,t)]^{\rm T},\\&Y(v,t)=[y(a_1,t)\ \ y(a_2,t)\ \cdots\ y(a_{11},t)]^{\rm T},\\&W(v)=[w(a_1)\ \ w(a_2)\ \cdots\ w(a_{11})]^{\rm T}\in\mathbb{C}^{11}.\end{aligned}$$

定义投影映射P, $P:(w(a_1),w(a_2),\cdots,w(a_{11}))^{\rm T}\to(0,w(a_2),\cdots,w(a_{11}))^{\rm T}$.

为设计反馈控制器, 考虑系统的能量函数

$$E(t)=\frac12\sum_{j=1}^{12}\Big(\int_0^1 m_j y_{j,t}^2(x,t)\mathrm{d}t+\int_0^1 T_j y_{j,x}^2(x,t)\mathrm{d}x\Big),$$

对能量函数微分, 利用内点及边界的位移连续性条件和动力学条件得到$\dfrac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=(F(v,t),Y_t(v,t))_{\rm V}$. 为使能量衰减, 取反馈控制律$F(v,t)=-\varGamma Y_t(v,t)$, 其中: $\varGamma=[\alpha_1\ \ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_{11}]^{\rm T}$, $a_i\geqslant0$是对角矩阵.

为了保证反馈控制器具有较少的个数, 先在外边界加控制器, 即$\alpha_i>0,\ i\in\{2,3,4,5\}$. 然后在内节点$a_6$和$a_9$处再加两个反馈控制器. 在这样的控制设计下, 有$\alpha_i>0,\ i\in I_\Gamma,\ I_\Gamma=\{2,3,4,5,6,9\}$. 定义$\mathbb{C}^{11}$的一个子集$V$,

$$V=\{W(v)=[w(a_1)\ \ w(a_2)\ \cdots\ w(a_{11})]^{\rm T}|w(a_1)=0\}.$$

从而一维波系统的闭环形式可写成向量微分方程

$$\begin{cases}MY_{tt}(x,t)=TY_{xx}(x,t),\\ x\in(0,1),\ \exists Y(v,t)\in V,\\ \text{s.t. } Y(1,t)=(\varPhi^+)^{\rm T}Y(v,t),\\ \qquad Y(0,t)=(\varPhi^-)^{\rm T}Y(v,t),\\ \qquad P\varPhi^+TY_x(1,t)-P\varPhi^-TY_x(0,t)=\\ \qquad -\varGamma Y_t(v,t),\\ Y(x,0)=Y_0,\ Y_t(x,0)=Y_1,\end{cases}\tag{1}$$

其中: $M=\mathrm{diag}\{m_1,m_2,\cdots,m_{12}\}$, $T=\mathrm{diag}\{T_1,T_2,\cdots,T_{12}\}$, 且均为正定对角矩阵; $\varGamma$是半正定对角矩阵.

定义状态空间

$$\mathcal{H}=V_{\rm E}^1(0,1)\times L^2(E),\tag{2}$$

其中: $V_{\rm E}^1(0,1)=\{f\in H^1(E)|f(0)=(\varPhi^-)^{\rm T}f(v),\ f(1)=(\varPhi^+)^{\rm T}f(v), f(v)\in V\}$. 在$\mathcal{H}$上赋予内积: $\forall(f,g)^{\rm T},(u,v)^{\rm T}\in\mathcal{H}$,

$$<(f,g)^{\rm T},(u,v)^{\rm T}>_{\mathcal{H}}=\int_0^1(Tf'(x),u'(x))_{\mathbb{C}^{12}}\mathrm{d}x+\int_0^1(Mg(x),v(x))_{\mathbb{C}^{12}}\mathrm{d}x.$$

容易验证$\mathcal{H}$为Hilbert空间.

在状态空间$\mathcal{H}$中定义系统算子A:

$$\mathrm{A}(f,g)^{\rm T}=(g(x),M^{-1}Tf''(x))^{\rm T},\ (f,g)^{\rm T}\in\mathcal{D}(\mathrm{A}),\tag{3}$$

其定义域为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathrm{A})=\{&(f,g)^{\rm T}\in\mathcal{H}|f\in V_{\rm E}^2(0,1),\ g\in V_{\rm E}^1(0,1),\\&P\varPhi^+Tf'(1)-P\varPhi^-Tf'(0)=-\varGamma g(v)\}.\end{aligned}\tag{4}$$

从而一维波网络系统可写成$\mathcal{H}$中的发展方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t)=\mathrm{A}Z(t),\ t>0,\\ Z(t)=(Y(x,t),Y_t(x,t))^{\rm T},\\ Z(0)=(Y_0(x),Y_1(x))^{\rm T}.\end{cases}\tag{5}$$

为了证明系统的适定性, 引入下面引理.

引理 1 令A是闭稠定线性算子, 如果A与A*都是耗散的, 那么A可以生成状态空间$\mathcal{H}$中的C_0压缩半群.

定理 1 设空间$\mathcal{H}$与A如式(2)(3)所定义, 则:

1) A是闭稠定线性算子, 且A是耗散算子;

2) 伴随算子A*是耗散算子.

所以A生成状态空间$\mathcal{H}$上一个C_0压缩半群. 从而系统(5)是适定的.

3 系统的渐近稳定性(Asymptotic stability of system)

本节主要分析在选定的节点$a_i,\ i\in I_\Gamma$处设计反

馈控制器后系统的渐近稳定性.

引理 2 　设$\theta \in \mathbb{R}, \xi_k \in \mathbb{C},\ k=1,2,3,\cdots,12$, m_k, T_k如系统方程给出. 如果下列关系式成立:

$$\begin{cases} \xi_k \sin(\theta\sqrt{\dfrac{m_k}{T_k}})=0,\ k\in\{1,2,3,\cdots,12\}, \\ m_s\xi_s^2=m_k\xi_k^2, \qquad s\neq k. \end{cases} \tag{6}$$

设$a_k=\sqrt{m_k/T_k}>0$, 对于某个$s\neq k$, 若有a_s/a_k为无理数, 则必有$\xi_k=0$.

下面分析虚轴上是否有谱. 注意到0不是A的本征值. 假设存在非零的复数$\lambda\in\sigma(\mathrm{A})$, $\Re\lambda=0$是A的本征值, $(f,g)^{\mathrm{T}}\in\mathcal{D}(\mathrm{A})$是相应的本征向量. 不妨设$\lambda=i\theta(\theta\neq 0\in\mathbb{R})$. 由算子的耗散性易知$\varGamma^{\frac{1}{2}}g(v)=0$, 即$g(a_k)=0, k\in I_\Gamma$. 这意味着$f(a_k)=0, k\in I_\Gamma$.

令$B^2=\mathrm{diag}\{\dfrac{m_1}{T_1},\dfrac{m_2}{T_2},\cdots,\dfrac{m_{12}}{T_{12}}\}$, 那么本征值$\mathrm{A}(f,g)^{\mathrm{T}}=\lambda(f,g)^{\mathrm{T}}$问题变为

$$Tf''(x)=-\theta^2Mf(x), \tag{7}$$

其边界条件为:

$$\begin{aligned} &f_1(0)=0,\ f_1(1)=0,\\ &f_k(0)=0,\ f_k(1)=0,\ k\in I_\Gamma,\\ &f_k(0)=f(a_i),\ k\in J^-(a_i),\ a_i\in V_{\mathrm{int}}\backslash\{a_6,a_9\},\\ &f_k(1)=f(a_i),\ k\in J^+(a_i),\ a_i\in V_{\mathrm{int}}\backslash\{a_6,a_9\},\\ &P\varPhi^+Tf'(1)-P\varPhi^-Tf'(0)=0. \end{aligned}$$

由式(7)得

$$f(x)=T^{-\frac{1}{2}}\sin(\theta Bx)\xi+T^{-\frac{1}{2}}\cos(\theta Bx)\eta,$$

其中: $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{12})^{\mathrm{T}},\ \eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{12})^{\mathrm{T}}$为$\mathbb{C}^{12}$中的向量. 由连续性条件与动力学条件得到, 当$\sqrt{m_6/T_6}/\sqrt{m_7/T_7}$为无理比时, 由引理2可得$\xi_i=0(i=6,7,8,9)$与

$$\begin{cases} \sin\theta\sqrt{m_k/T_k}\xi_k=0,\ k\in\{10,11,12\},\\ m_{10}\xi_{10}^2=m_{11}\xi_{11}^2=m_{12}\xi_{12}^2. \end{cases} \tag{8}$$

再次应用引理2有: 如果$\sqrt{m_k/T_k}(k=10,11,12)$中任意两项之比为无理数, 则得到$\xi_k=0(k=10,11,12)$. 所以在虚轴上没有算子A的本征值.

结合半群的稳定性定理, 有如下结果:

定理 2 　假设受控系统在$a_i(i=2,3,4,5,6,9)$点加控制器, 状态空间$\mathcal{H}$和算子A如方程(2)(3)所定义, 如果$\sqrt{m_6/T_6}$与$\sqrt{m_7/T_7}$之比为无理数, 同时$\sqrt{m_k/T_k}(k=10,11,12)$中任意两项之比为无理数时, 则受控网络系统是渐近稳定的.

4 频谱分析及解的展开(Spectral analysis and the expansion of solution)

在工程中, 通常需要作解的近似计算, 关心的问题是系统的解能否按照本征模态展开. 本节将讨论这一问题. 首先讨论算子A本征值的渐近分布, 进而分析A的(广义)本征向量在$\mathcal{H}$中的Riesz基性质, 从而得到系统动态解的展开式.

考虑系统的本征值问题. 令$\lambda\in\mathbb{C}$是A的一个本征值, $(f,g)^{\mathrm{T}}$是相应的本征向量, 从而有

$$\begin{cases} \lambda^2Mf(x)=Tf''(x),\ g(x)=\lambda f(x),\\ \exists f(v)\in V,\\ \text{s.t. } f(1)=(\varPhi^+)^{\mathrm{T}}f(v),\\ \qquad f(0)=(\varPhi^-)^{\mathrm{T}}f(v),\\ P\varPhi^+Tf'(1)-P\varPhi^-Tf'(0)=-\lambda\varGamma f(v). \end{cases} \tag{9}$$

由方程(9)第1式得到

$$f(x)=\cosh(\lambda Bx)\eta_1+\sinh(\lambda Bx)\eta_2,$$

其中$\eta_j\in\mathbb{C}^{12}(j=1,2)$是待定参数向量. 定义映射$\widehat{P}:(0,w(a_2),\cdots,w(a_{11}))^{\mathrm{T}}\to(w(a_2),w(a_3),\cdots,w(a_{11}))^{\mathrm{T}}$. 易知$\dim V=10$, 故存在向量$d\in\mathbb{C}^{10}$使得$\widehat{P}^{\mathrm{T}}d=f(v), f(v)\in V$. 所以由式(9)边界条件得到:

$$\begin{aligned} &((\varPhi^+)^{\mathrm{T}}-\cosh\lambda B(\varPhi^-)^{\mathrm{T}})\widehat{P}^{\mathrm{T}}d-\sinh(\lambda B)\eta_2=0,\\ &\widehat{P}(\lambda P\varPhi^+TB\sinh(\lambda B)(\varPhi^-)^{\mathrm{T}}+\lambda\varGamma)\widehat{P}^{\mathrm{T}}d+\\ &\lambda\widehat{P}(P\varPhi^+TB\cosh(\lambda B)-P\varPhi^-TB)\eta_2=0. \end{aligned}$$

令

$$D(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda\widehat{P}P\varPhi^+TB\sinh\lambda B(\varPhi^-)^{\mathrm{T}}\widehat{P}^{\mathrm{T}}+\lambda\widehat{P}\varGamma\widehat{P}^{\mathrm{T}} & \lambda\widehat{P}(P\varPhi^+TB\cosh(\lambda B)-P\varPhi^-TB)\\ ((\varPhi^+)^{\mathrm{T}}-\cosh(\lambda B)(\varPhi^-)^{\mathrm{T}})\widehat{P}^{\mathrm{T}} & -\sinh(\lambda B) \end{bmatrix}.$$

显然, 上面的代数方程有非零解当且仅当系数矩阵$D(\lambda)$的行列式为零, 即: $\varDelta(\lambda)=\det D(\lambda)=0$.

定理 3 　令A如式(3)(4)所定义, $T, B, \varPhi^+, \varPhi^-$如前所定义, 那么有

$$\lambda\in\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda\in\mathbb{C}|\varDelta(\lambda)=\det D(\lambda)=0\}.$$

经过复杂的矩阵和行列式的运算, 得到:

$$\lim_{\Re\lambda\to+\infty}\frac{\varDelta(\lambda)}{\lambda^{10}e^{\lambda\mathrm{tr(B)}}}=\frac{1}{2^{12}}\det[\widehat{P}(P\varPhi^+TB(\varPhi^+)^{\mathrm{T}}+\varGamma)\widehat{P}^{\mathrm{T}}],$$

$$\lim_{\Re\lambda\to-\infty}\frac{\varDelta(\lambda)}{\lambda^{10}e^{-\lambda\mathrm{tr(B)}}}=\frac{1}{2^{12}}\det[\widehat{P}\left(\varGamma-P\varPhi^+TB(\varPhi^+)^{\mathrm{T}}\right)\widehat{P}^{\mathrm{T}}],$$

其中$\mathrm{tr}(B)=\sum\limits_{i=1}^{12}\sqrt{m_i/T_i}$. 从而由sine型整函数的定义(见文献[13]第61页定义2)及Levin's定理(见文献[13]论点2)可得

定理 4 　令算子A如式(3)(4)定义, 如果反馈增益矩阵$\varGamma$满足条件$\alpha_k-\sum\limits_{j=1}^{12}\sqrt{T_jm_j}\phi_{kj}^+\neq 0,\ k\in I_\Gamma$, 则有:

1) A的谱分布在一个平行于虚轴的带域里, 即存在一个大于零的常数h, 使得

$$\sigma(\mathrm{A}) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | -h \leqslant \Re\lambda \leqslant 0\}. \tag{10}$$

2) $\varDelta(\lambda)$是一个sine型整函数, $\sigma(\mathrm{A})$为有限个可分离集合的并集.

经过上面讨论, 并利用Phragmen-Lindelof定理[13]得到如下完整性定理:

定理 5 系统状态空间$\mathcal{H}$与算子A如前定义, 当$\det|\widehat{P}(\varGamma - P\varPhi^{+}TB(\varPhi^{+})^{\mathrm{T}})\widehat{P}^{\mathrm{T}}| \neq 0$时, 算子A的本征向量及广义本征向量在$\mathcal{H}$中是完整的.

结合定理4, 5, 由Riesz基抽象判定定理[11], 得到如下结果:

定理 6 令状态空间$\mathcal{H}$与算子A如前所定义, 如果满足条件$\alpha_k - \sum\limits_{j=1}^{12}\sqrt{T_j m_j}\phi_{kj}^{+} \neq 0 (k \in I_\Gamma)$, 那么存在一列算子A的本征向量及广义本征向量构成空间$\mathcal{H}$的一组加括号Riesz基. 结合相应本征值的代数重数的一致有界性, 进而得到系统(5)满足谱确定增长条件.

定理 7 假设$\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty} = \sigma(\mathrm{A})$, 每个$\lambda_m$的代数重数记为$m_n$. 对应于$\lambda_m$的根子空间存在线性无关的广义本征向量$\{x_{n_i}\}_{i=1}^{m_n}$. 若$\{\{x_{n_i}\}_{i=1}^{m_n}\}_1^{\infty}$构成一个加括号的Riesz基, 则A生成的$C_0$半群$e^{\mathrm{A}t}$可表达为:

$$e^{\mathrm{A}t}x = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \sum_{i=1}^{m_n} f_{n_{ij}}(t) x_{n_j},$$

$$\forall x = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m_n} a_{n_i} x_{n_i} \in \mathcal{H},$$

其中$f_{n_{ij}}(t)$是阶数小于m_n的t的多项式.

5 结论(Conclusion)

本文讨论复杂网络的镇定问题, 针对具有两个回路的系统, 通过设计反馈控制器在一定条件下使闭环系统稳定. 从讨论可以看到: 如果定理2的条件不满足, 即使在所有节点上加控制器也不能使闭环系统稳定, 对于这样的系统需要考虑其他的控制策略; 如果定理2的条件满足, 从稳定性分析可知去掉任何一个控制器系统都将变的不稳定, 在这个意义下, 本文的设计具有最少个数; 从稳定性分析可知, 当边界上有控制器时, 次于边界点的节点即$a_k(k=7,8,10,11)$处的控制器将不起本质作用, 所以在控制器设计中不在这些节点上放置控制器. 这一特性, 在其他网络控制器设计中值的借鉴.

作为实际计算要求, 本文讨论了系统解按照本征向量及广义本征向量的展开问题. 得到的结果是本征向量及广义本征向量可能不是基, 但构成一个加括号基. 因此, 在实际计算取截断时, 只要不破坏加括号性质, 就可得到较好的近似. 如果破坏了加括号性质, 得到的结果可能发散. 这里加括号的方法就是将相近的本征值放在一个括号中, 并保证相邻两个括号中本征值的距离大于某个固定的常数.

参考文献(References):

[1] VON BELOW J. Can one hear the shape of a network?[C] //*Partial Differential Equations on Multistructures*. New York: Marcel Dekker, 2001, 219: 19 – 36.

[2] LAGNESE J E. Modelling and controllability of plate-beam systems[J]. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 1994, 4(1): 1 – 47.

[3] LAGNESE J E. Recent progress and open problem in control of multi-link elastic structures[J]. *Contemporary Mathematics*, 1997, 209: 161 – 175.

[4] LEUGERING G, SCHMIDT E J P G. On the modelling and stabililzation of flows in networks of open canals[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, 41(1): 164 – 180.

[5] PENKIN O M, POKORNYI Y V. On some qualitative properties of equations on a one-dimensional cw-complex [J]. *Mathematical Notes*, 1996, 59(5): 562 – 565.

[6] AMMARI K, JELLOULI M. Stabilization of star-shaped tree of elastic strings[J]. *Differential and Integral Equations*, 2004, 17(11/12): 1395 – 1410.

[7] XU G Q, GUO B Z. Riesz basis property of evolution equations in Hilbert spaces and application to a coupled string equation[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2003, 42(3): 966 – 984.

[8] XU G Q. Boundary deedback exponential stabilization of a Timoshenko beam with both ends free[J]. *International Journal of Control*, 2005, 78(4): 286 – 297.

[9] XU G Q, FENG D X. YUNG S P. Riesz basis property of the generalized eigenvector system of a Timoshenko beam[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2004, 21(1): 65 – 83.

[10] GUO B Z, XU G Q. Expansion of solution in terms of generalized eigenfunctions for a hyperbolic system with static boundary condition[J]. *Journal of Functional Analysis*, 2006, 231(2): 245 – 268.

[11] HAN Z J, XU G Q. Stabilization and Riesz basis property of two serially connected Timoshenko beams system[J]. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2009, 89(12): 962 – 980.

[12] AVDONIN S A, IVANOV S A. *Families of Exponentials: The Method of Moments in Controllability Problems for Distributed Parameter Systems*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

[13] YOUNG R M. *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*[M]. New York: Academic Press, 1980.

作者简介:

王 雷 (1982—), 男, 博士研究生, 研究方向为分布参数系统控制, E-mail: thunder@tju.edu.cn;

许跟起 (1959—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为分布参数系统控制、线性算子谱理论, E-mail: gqxu@tju.edu.cn.