文章编号: 1000−8152(2011)01−0001−12

线性系统的同时镇定问题

关　强[1], 何冠男[2], 王　龙[3], 郁文生[4]

(1. 中国科学院 自动化研究所 综合信息系统研究中心, 北京 100190; 2. 北京化工大学 信息科学与技术学院, 北京 100029;
3. 北京大学 工学院 机器感知与智能教育部重点实验室, 北京 100871; 4. 华东师范大学 上海高可信计算重点实验室, 上海 200062)

摘要: 线性系统的同时镇定问题, 是系统与控制理论中的基本问题, 有着广泛的理论意义和应用价值. 本文介绍了线性系统同时镇定问题的研究现状和最新进展. 首先回顾了同时镇定问题的研究内容、基本方法及相关结果. 其次, 从理论求解和控制器设计的角度对线性系统同时镇定研究中著名的“香槟问题”,“比利时巧克力问题”和“威士忌问题”进行了分析探讨, 并基于不等式型定理机器证明理论, 给出了线性系统同时镇定问题的相关工作. 最后指出了对于同时镇定多个线性系统方面的若干研究方向.

关键词: 线性系统; 同时镇定; 香槟问题; 比利时巧克力问题; 威士忌问题; 复分析; 不等式型定理; 机器证明; 半代数系统

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Simultaneous stabilization of linear systems

GUAN Qiang[1], HE Guan-nan[2], WANG Long[3], YU Wen-sheng[4]

(1. The Integrated Information System Research Center, Institute of Automation, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China;
2. College of Information Science & Technology, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;
3. College of Engineering, Key Laboratory of Machine Perception(Ministry of Education), Peking University, Beijing 100871, China;
4. Shanghai Key Laboratory of Trustworthy Computing, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: Simultaneous stabilization of linear systems is a fundamental issue in system and control theory, and is of theoretical, as well as practical, significance. Current theories and recent developments in the simultaneous stabilization of linear systems are discussed. Firstly, the substance of the simultaneous stabilization of linear systems, the basic research methods and the related results are reviewed. Some well-known problems, including the “champagne problem”, “Belgian chocolate problem” and “Whiskey problem” are analyzed from the perspectives of theoretical solution and controller design. Based on the development in automated inequality-type theorem proving, some original work on solving these open problems is also presented. Finally, possible future research directions for the simultaneous stabilization of linear systems are given.

Key words: linear systems; simultaneous stabilization; champagne problem; Belgian chocolate problem; Whiskey problem; complex analysis; inequality-type theorem; automated theorem proving; semi-algebraic systems

1　引言(Introduction)

线性系统的同时镇定(simultaneous stabilization)问题是系统与控制理论中的基本问题, 有着广泛的理论意义和应用价值[1~3]. 作为一广义鲁棒控制问题, 其来源于实际工程中多模型特征系统的稳定需要, 例如, 飞行器的动态特性随着其飞行高度和速度而变化[4], 实际对象可能由于某些传感器的失效而有几种工作模式[5]. 这一问题描述非常精炼, 多年来一直受到系统与控制理论界广泛关注. 线性系统同时镇定问题的研究可溯源到单对象可镇定条件这一经典结果, 进而在两个对象的同时镇定问题获得圆满解决之后, 学者们一直在探求3个以上对象可同时镇定的充分必要条件, 但是问题远比想象的要复杂, 迄今为止, 易于判定的3个以上对象可同时镇定的充要条件仍未获得. Blondel等人利用复分析方法[6~10], 通过具体的例子明确证明3个对象的同时镇定问题不是有理可决定的(rationally undecidable)[1,11], 这一结论使学者们对3个对象同时镇定问题的复杂性有了新的认识. 同时, 为进一步说明3个对象同时镇定问题的复杂性, Blondel等人提出了若干个具体的同时镇定问题[1,11,12]. 这些问题看似简单, 实际解决起来却非常困难. 研究这些问题一方

收稿日期: 2010−04−13; 收修改稿日期: 2010−07−15.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61070048, 60874010); 国家自然科学基金委员会创新研究群体科学基金资助项目(61021004); 国家重点基础研究发展规划资助项目(2011CB302802); 上海市教育委员会科研创新资助项目(11ZZ37).

面可以从理论上揭示同时镇定问题与其他理论如复分析之间的密切联系, 另一方面, 在具体求解镇定控制器时, 需要利用和探索新的工具和方法, 如全局优化方法[13~16]、非凸非光滑分析[17]、不等式机器证明[14~16]等. 因此, 对于这些具体同时镇定问题的研究已经成为目前同时镇定研究一个活跃的热点领域.

本文首先回顾线性系统同时镇定问题及其研究概况, 进而较为深入地分析Blondel等人提出的若干特殊的同时镇定问题, 并对这些问题的国内外研究进展进行了总结, 最后对同时镇定问题研究进行了展望.

2 符号与定义(Notations and conventions)

为行文方便, 首先引入相关符号与定义. 本文中用P表示多项式集合, n是非负整数, P^n表示n阶多项式集合; H表示Hurwitz稳定的多项式集合(仅具负实部的根), H^n表示n阶Hurwitz多项式集合, MH^n表示首一n阶Hurwitz多项式集合; S表示Schur稳定的多项式集合(仅具单位圆外的根).

注 1 有些学者恰好用相反的方式定义Schur多项式集合, 即要求其仅具单位圆内的根, 在讨论同时镇定问题的多数文献中都采用本文这样的定义, 这仅是一种习惯, 也是为了更方便地利用复分析的结果, 并不影响问题的实质.

S^n表示n阶Schur多项式集合. 多项式均指实系数多项式, 变量均默认为s或z(通常表示Hurwitz多项式时变量默认为s, 而表示Schur多项式时变量默认为z). 用$\mathbb{C}$表示复平面, $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$表示开单位圆, $\mathrm{cl}(D)=\{z\in\mathbb{C}:|z|\leqslant 1\}$表示$D$的闭包, 即闭单位圆. $\overline{z}$表示复数z的共轭. $\mathbb{C}_{+\infty}=\{s\in\mathbb{C}:\mathrm{Re}(s)\geqslant 0\}\cup\{\infty\}$表示扩展的闭右半平面.

本文中的对象和控制器均限定为用实有理分式描述的线性时不变单输入单输出系统. 给定对象p, 控制器c镇定该对象, 是要求传递函数$pc(1+pc)^{-1}, c(1+pc)^{-1}, p(1+pc)^{-1}$和$(1+pc)^{-1}$都是稳定的, 即它们的分母多项式是稳定的(在连续时间意义下系指Hurwitz稳定, 而在离散时间意义下系指Schur稳定). 控制器的阶次是指其分母多项式阶次和分子多项式阶次之间较大者. 控制器c强镇定(strongly stabilize)对象p, 是指控制器c镇定对象p, 同时控制器c也是稳定的. 双稳定镇定(bistable stabilization), 即要求实现镇定的控制器是稳定的且其逆也是稳定的, 这样的控制器称为双稳定的控制器或单元(Unit)控制器[1].

用$U(\mathrm{cl}(D))=\{c(z)=\dfrac{y(z)}{x(z)}:x(z)\in S, y(z)\in S\}$表示离散时间意义下所有双稳定的控制器或单元(Unit)控制器集合, 显然$U(\mathrm{cl}(D))$中的任何元素及其逆元在$\mathrm{cl}(D)$上都是解析的.

3 基本问题和相关结论(Basic problems)

首先, 给出一般意义下的线性系统同时镇定问题描述[1~3,18]:

线性系统同时镇定问题: 给定k个线性时不变、单输入单输出对象$p_1,p_2,\cdots,p_k$, 问在什么条件下存在控制器c, c同时镇定每个对象$p_i(i=1,\cdots,k)$?

上述问题当仅考虑单个对象, 即$k=1$时, 退化为单个对象的镇定问题, 此时只要描述该对象的传递函数不出现零点和极点相消的情况, 则能实现镇定的控制器总是存在的[1~3], 并且Youla等人[19,20]及Kucera[21]还用参数化方法对所有实现镇定的控制器进行了完整的刻画[1~3,22], 即有如下结果:

定理 1[1~3] 设R_{s}为稳定有理分式环, 存在X, Y是R_{s}中的两个函数且满足Bezout等式$NX+MY=1$, 则可镇定对象$p=\dfrac{N}{M}$的所有控制器c的集合为

$$\{\frac{X+MQ}{Y-NQ}:Q\in R_{\mathrm{s}}\}.$$

注 2 上述基于有理函数稳定因式互质分解的参数化方法, 即Youla-Kucera参数化方法, 作为控制系统综合的一种基本方法, 它也是求解同时镇定问题的经典方法之一. 尤其是在当$k=2$时, 即两个对象的同时镇定问题, 这种方法会起到关键的作用.

当$k=2$时, 利用Youla-Kucera参数化方法可将两个对象的同时镇定问题转化为一个对象的强镇定(strong stabilization) 问题, 这一结果最早由Saeks和Murray[18]给出:

定理 2[1~3,18] 设R_{s}为稳定的有理分式环, 单输入单输出对象为p_1和p_2, 引入R_{s}中的互质分解:

$$p_i=\frac{N_i}{M_i}, N_iX_i+M_iY_i=1, i=1,2,$$

并定义

$$N=N_2M_1-N_1M_2, M=N_2X_1+M_2Y_1, p=\frac{N}{M},$$

则对象p_1和p_2可同时镇定当且仅当p可强镇定.

注 3 定理2揭示了两个对象同时镇定问题与单个对象强镇定问题之间的密切联系, 其多变量系统形式由Vidyasagar等人给出[3,23].

利用定理2, 两个对象的可同时镇定问题便可转化为单个对象的强镇定问题, 而对于单个对象的强镇定问题, Youla等人[24]给出如下优美的充分必要条件:

定理 3[1~3,24] 对象p可强镇定当且仅当p的每对不稳定的实零点(包括∞)之间存在偶数个不稳定的实极点.

综合定理2和定理3, 两个对象的同时镇定问题就已得到了解决, 同时定理3给出的条件, 也称为奇偶交替性(parity interlacing property, 简称PIP条件)[1~3,24], 其检验只涉及到实轴上的零极点分布情况, 易于判定[25].

对于3个对象或3个以上对象的同时镇定问题, 研究者们也期望找到同两个对象时类似的易于判定的条件, 但是此时问题远比想象的要复杂, 为此, 学者们作了相当多的研究工作, 首先, 受定理2启发, 寻求3个对象同时镇定问题的等价问题, Vidyasagar等人给出以下结果: k个对象的同时镇定问题可转化为相应的$k-1$个对象的强镇定问题[1~3], 即:

定理 4[1,3,23] 设$R_{\rm s}$为稳定有理分式环, 考虑k个对象$p_1,\cdots,p_k$, 引入互质分解, 有$p_i=\dfrac{n_i}{d_i}, i=1,\cdots,k$, 且$x,y\in R_{\rm s}$, 满足$n_1x+d_1y=1$.

定义

$$a_{ij}=n_id_j-n_jd_i, i,j=1,\cdots,k$$

与

$$b_i=n_ix+d_iy, i=1,\cdots,k,$$

则k个系统$p_i, i=1,\cdots,k$可同时镇定当且仅当$k-1$个系统$p_i'=\dfrac{a_{i1}}{b_i}, i=2,\cdots,k$可同时强镇定.

考虑3个对象同时镇定问题与最小相位稳定控制器部分极点配置问题[26]之间的联系, Blondel等给出了同时镇定问题与双稳定镇定问题之间的等价性:

定理 5[1,27] 设$R_{\rm s}$为稳定有理分式环, 考虑k个对象$p_1,\cdots,p_k$且满足$p_1(\infty)\neq p_2(\infty)$, 引入互质分解, 有$p_i=\dfrac{n_i}{d_i}, i=1,\cdots,k$.

定义

$$a_{ij}=n_id_j-n_jd_i, i,j=1,\cdots,k,$$

则k个系统$p_i, i=1,\cdots,k$可同时镇定当且仅当$k-2$个系统$p_i'=\dfrac{a_{2i}}{a_{i1}}, i=3,\cdots,k$可同时双稳定镇定.

注 4 定理4和定理5作为等价形式, 阐明了同时镇定问题与强镇定问题、双稳定镇定问题之间的密切联系, 但是迄今为止, n个对象($n\geqslant 2$)可同时强镇定与n个对象($n\geqslant 1$)可同时双稳定镇定的充分必要条件仍未获得. 实际上, 它们是与n个对象($n\geqslant 3$)同时镇定问题具有同等难度的复杂问题.

另一方面, 在两个对象的同时镇定问题中, PIP条件起着核心的作用, 易于计算判别. 为了寻求n个对象($n\geqslant 3$)可同时镇定问题易判定的充分必要条件, 基于PIP条件, 学者们也给出了一些计算上可检验的必要条件, 如偶交替条件(even interlacing condition)[1,27,28], 强交替性(strong interlacing property)[29,30], 3–交替条件 (3-interlacing condition)[1,27,30,31] 以及k–交替条件 (k-interlacing condition)[1,27]等, 这些条件本质上都是对PIP条件进行扩展, 其计算检验只涉及到正实轴, 实质上就是要使闭环系统无不稳定的实极点, 不难看出, 这些条件对于同时镇定问题是必要的, 同时, 学者们也猜测这些条件也是充分的[28].

但是, 对于n个对象($n\geqslant 3$)同时镇定问题与上述正实轴上的计算条件之间的关系, Blondel等人明确指出:

定理 6[1,27] 对于k个对象的同时镇定问题($k\geqslant 3$), 存在控制器使得闭环传递函数无不稳定的实极点并不能保证同时镇定问题有解, 即仅仅考虑正实轴上的条件是不充分的.

上述结论的获得, Blondel等人采用的是基于复分析理论[6~10]的构造反例法, 首先, 构造多个特定的对象, 这些对象满足正实轴上的计算条件, 即存在控制器使得闭环系统无不稳定的实极点, 再利用双线性变换, 将连续时间域的同时镇定问题转换为离散时间域的同时镇定问题, 进而由复分析理论可知这多个对象无法同时镇定. 这种方法有力地揭示了同时镇定问题与复分析理论之间的深入联系, 使得对同时镇定问题的理论内涵有了进一步的认识.

同时, 由于同时镇定问题的工程应用价值, 学者们也对同时镇定问题的充分条件和控制器设计进行了研究[5,32~38]. 这些结果大都是基于实际工程意义提出的. 典型的结果是考虑最小相位系统的[35,37,38]. Wei和Barmish[37,38]给出了单输入单输出系统同时镇定的迭代设计方法, 这种方法可设计稳定且严格正则的控制器对一组严格正则、最小相位且高频增益符号相同的对象实现同时镇定, 该方法也可适用于多输入多输出系统.

作为一类特殊的同时镇定问题, 区间族对象的镇定问题也获得了一些较好的结果[39,40], 这些结果也从一个方面说明了同时镇定问题与传统意义下的鲁棒控制理论之间的联系.

尽管多年来学者们已经给出了不少关于3个及3个以上对象同时镇定计算可行的充分条件或必要条件, 但是易于计算判定的充分必要条件迄今为止却仍然没有获得. Ghosh在文[26]就已指出利用稳定且最小相位的控制器实现极点配置时的超越性, 进一步, 同样基于复分析方法[6~10], Blondel等人对同时镇定问题的复杂性与难解性进行了充分研究, 给出了如下经典结论:

定理 7[1,11] 两个2阶对象的强镇定问题不是有理可决定的(rationally undecidable), 即两个2阶对象的强镇定问题不可能存在由所给对象的系数经过有限次的代数运算(加、减、乘、除)、逻辑运算("与"及"或")以及符号测试比较运算("等于"、"大于"、"大于等于"、"小于"、"小于等于")描述的充分必要条件.

对于定理7, Blondel等人考虑的是以下两个2阶对象:

$$p_{1,\beta}(z)=\frac{z}{z^2-\beta}, p_{2,\beta}(z)=\frac{z}{z^2+\beta}, \beta\in\mathbb{R}.$$

由复分析理论[8,9]可知, 当$|\beta|>A$时, $p_{1,\beta}(z)$和$p_{2,\beta}(z)$可由一稳定的控制器实现同时镇定, 而当$0<|\beta|<A$时, 则不存在稳定控制器同时镇定$p_{1,\beta}(z)$和$p_{2,\beta}(z)$, 这里$A=\dfrac{4\pi^2}{\Gamma^4(\frac{1}{4})}$, $\Gamma(\,)$为Gamma函数. 而由$A=\dfrac{4\pi^2}{\Gamma^4(\frac{1}{4})}$为超越数[1,41], 可知两个2阶对象的同时强镇定问题不是有理可决定的. 进而由定理4可知, 3个对象的同时镇定问题不是有理可决定的.

定理7从可决定性的角度对3个对象同时镇定问题的复杂性进行了分析, 实际上, 从计算复杂性的角度来看, 3个对象同时镇定问题也是系统与控制理论中难解问题的典型代表, 和NP难解性有密切联系[42,43]. 为形象说明3个对象同时镇定问题的复杂性, Blondel等人提出了若干个具体的同时镇定问题[1,11,12]. 这些问题看似简单, 实际解决起来却非常困难. 研究这些问题一方面可以从理论上揭示同时镇定问题与其他理论如复分析[6~10]之间的密切联系, 另一方面, 在具体求解镇定控制器时, 需要利用和探索新的工具和方法, 如全局优化方法[13~16]、非凸非光滑分析[17]、不等式机器证明[14~16]. 因此, 对于这些特殊同时镇定问题的研究已经成为同时镇定研究中的热点领域. 后文中, 将针对这几个具体的同时镇定问题进行分析探讨.

需要说明的是, 这里仅限于讨论利用线性时不变控制器实现同时镇定, 对于利用非线性控制器实现同时镇定方面的结果可参见文[44].

4 香槟问题(Champagne problem)

首先来看一下线性系统同时镇定研究中著名的"香槟问题"[11,12,14,27,45~47], 该问题由Blondel等人在文[11,12,27]中提出并冠名为"香槟问题(champagne problem)", 作为一具体给定对象的同时镇定问题, 常用以说明简单问题中可能蕴含巨大的复杂性. 问题的具体描述如下:

香槟问题: 是否存在控制器同镇定以下系统:

$$p_1(s)=\frac{2}{17}\frac{s-1}{s+1},$$
$$p_2(s)=\frac{(s-1)^2}{(9s-8)(s+1)},$$
$$p_3(s)=0?$$

由镇定的基本定义可知, 控制器c镇定对象$p=0$, 则控制器c必是稳定的, 因此香槟问题本质上是两个对象的强镇定问题.

对于香槟问题, Patel于1999年给出否定的答案, 证明了所要设计的控制器是不存在的[46], 所用方法是传统的有理函数稳定互质分解[3]与复分析中的$\frac{1}{16}$–定理[1,8,9,46], 实际上考虑了如下的更一般的问题:

广义香槟问题: 存在制器同时镇定以下3个系统:

$$p_1(s)=\frac{2\delta(s-1)}{s+1},$$
$$p_2(s)=\frac{2\delta(s-1)^2}{((1+\delta)s-(1-\delta))(s+1)},$$
$$p_3(s)=0, \delta\text{是实数}$$

时, δ的区间范围是什么?

显然, 广义香槟问题即是要确定控制器存在时参数δ的区间范围, 而香槟问题即是问$\delta=\dfrac{1}{17}$是否属于该区间?

对于广义香槟问题, Patel在文[46]中得到, 当$\delta<\dfrac{1}{16}$时不存在满足条件的控制器, 实际上, Patel在文[46]中默认了$\delta>0$, 否则该条件应为$0<|\delta|<\dfrac{1}{16}$. 在文[46]末Patel还指出当$\delta=\dfrac{1}{16}$时, 是否存在满足条件的控制器依然是公开问题. Leizarowitz等人指出当$\delta=\dfrac{1}{2e}=\dfrac{1}{5.4366}$时控制器存在, 并猜测该$\delta$是使控制器存在的$\delta$的最小值[45,47], 但2002年Patel等人在文[47]指出, 当$\delta=\dfrac{1}{6.719367588932806}$时, 存在满足条件的控制器$c=\dfrac{y(s)}{x(s)}, x(s)\in H^9, y(s)\in P^9$, 注意, 这里给出的控制器阶次是9阶的, 从而说明Leizarowitz等人的猜想[45]是不正确的.

对于广义香槟问题, Guan等人于2007年给出了完整的理论解[14], 具体结论如下:

定理 8 存在控制器同时镇定下面3个系统:

$$p_1(s)=\frac{2\delta(s-1)}{s+1},$$
$$p_2(s)=\frac{2\delta(s-1)^2}{((1+\delta)s-(1-\delta))(s+1)},$$
$$p_3(s)=0, \delta\text{是实数}$$

的充分必要条件是$\delta=0$或$|\delta|>\dfrac{1}{16}$.

定理8的获得主要依赖于复分析理论中的$\dfrac{1}{16}$–定理[1,8,9,46]与Runge定理[7,10]这两个著名结果:

利用线性分式变换$s=\dfrac{1+z}{1-z}$, 广义香槟问题可等价地化为如下3个对象:

$$\begin{cases} p_{1\mathrm{d}}(z)=2\delta z,\\ p_{2\mathrm{d}}(z)=\dfrac{2\delta z^2}{z+\delta},\\ p_{3\mathrm{d}}(z)=0, \delta\text{是实数}\end{cases}\tag{1}$$

在离散时间意义下的同时镇定问题.

第1步　利用$\dfrac{1}{16}$–定理, 可证明当$0<|\delta|<\dfrac{1}{16}$时, 由式(1)中所给出的3个对象在离散时间意义下是不可同时镇定的.

第2步　当$\delta=0$时, 由式(1)中所给出的3个对象退化为一个对象$p_{1\mathrm{d}}(z)=p_{2\mathrm{d}}(z)=p_{3\mathrm{d}}(z)=0$, 显然, 此时$c(z)$只要是稳定的即可满足要求.

而当$|\delta|=\dfrac{1}{16}$时, 根据熟知的多项式根与系数的连续依赖性[48,49], 容易知道此时满足条件的控制器是不存在的, 即由(1)中所给出的3个对象不可同时镇定的.

第3步　利用$\dfrac{1}{16}$–定理和Runge定理, 可证明当$|\delta|>\dfrac{1}{16}$时, 由式(1)中所给出的3个对象在离散时间意义下可同时镇定.

注 5　定理8理论上已经完整地解决了广义香槟问题[46,47], 当然也包含了香槟问题[1,11,12,27,45~47]的解. 定理9证明中的第1步已包含Patel文[46]的主要结果, 同时证明中的第2步已回答了Patel文[46]末提出的问题.

尽管定理8理论上已经完整地解决了广义香槟问题, 但从问题研究的另一方面来看, 实际要构造能同时镇定多个对象的控制器还是比较困难的, 这一点从文[45,47]中具体构造的控制器例子中也可看出, 特别是当$\delta>\dfrac{1}{16}$已给定时, 如何找到满足同时镇定的最小阶次的控制器? 或者在给定控制器阶次的情况下如何确定δ的界限? 都是具有明显理论及应用意义的研究课题.

对于广义香槟问题而言, 问题求解的关键在于确定参数δ的界限, 而这与全局优化问题有着密切的联系. 如何选取优化模型以及优化算法, 就成为求解问题的基础, 直接影响到求解的效果.

Patel等人的方法是利用稳定因式互质分解[3], 将广义香槟问题转化为单元控制器的插值问题[47], 进而利用Hurwitz条件导出优化模型, 求解方法采用随机优化算法[50], 算法给出的最好结果是:

当$\delta=\dfrac{1}{6.719367588932806}$时, 存在满足条件的控制器$c=\dfrac{y(s)}{x(s)}, x(s)\in H^9, y(s)\in P^9$.

下一小节将介绍一种直观且有效的同时镇定控制器设计方法, 该方法的基础是基于不等式自动发现的半代数系统求解.

4.1 半代数系统求解与镇定控制器设计(Solving semi-algebra systems and stabilizing controller designing)

首先考虑广义香槟问题的等价形式:

广义香槟问题等价形式: 令

$$a_1(s)=s+1, b_1(s)=2\delta(s-1),$$
$$a_2(s)=((1+\delta)s-(1-\delta))(s+1),$$
$$b_2(s)=2\delta(s-1)^2.$$

当存在稳定多项式$x(s)\in H^n$和$y(s)\in P^m$满足$a_i(s)x(s)+b_i(s)y(s)\in H(i=1,2)$时, δ的区间范围是什么?

当控制器的阶次限定时, 上述问题本质上就是一组代数不等式的求解问题, 即半代数系统的求解问题[1,31,51]. 而以半代数系统为基础的判定方法(decision method)或消去理论(elimination theory), 早已在系统与控制研究中得以应用[52], 只是因为当时软硬件条件的限制, 使得该方法未能得以推广.

所谓半代数系统(semi-algebraic systems), 是指多项式方程组与多项式不等式组构成的系统, 形如

$$\begin{cases} p_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=0,\cdots,p_r(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})=0,\\ g_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\geqslant 0,\cdots,g_k(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\geqslant 0,\\ g_{k+1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})>0,\cdots,g_t(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})>0,\\ h_1(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\neq 0,\cdots,h_m(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})\neq 0.\end{cases}\tag{2}$$

这里: $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_{\mathrm{d}})$表示参数, $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_{\mathrm{s}})$表示变元, $t\geqslant k\geqslant 0, m\geqslant 0, p_i, g_i, h_i$均为多项式. 这样的系统定义的点集称为半代数集(semi-algebraic set).

半代数系统的求解一直是数学中基本问题之一, 大量的理论与应用问题可归结为半代数系统的求解问题, 同时其与自动推理、机器证明有着紧密的联系.

对于半代数系统的求解, 早在20世纪50年代, Tarski[53]即论证了此类问题的可判定性[49,52~56]. 但Tarski的判定算法[53]仅在理论上解决问题, 由于其计算复杂度太高, 实际上不可能判定任何非平凡的代数和几何命题[49,54~56]. 后来, 经Collins提出又经他人合作改进的“柱形代数剖分”(cylindrical algebraic decomposition, CAD)算法[57~59], 效率上有很

大提高, 已经能够在计算机上实际判定一些难度不大的代数与几何的非平凡命题, 但作为定理机器证明的一个通用程序, 计算复杂度仍然很高.

1977年吴文俊[54]提出的初等几何定理机器判定的新方法是这一领域的重大突破[49,55,56]. 吴方法(Wu Method)主要是针对等式型命题的判定方法. 吴方法的成功在世界范围内推动了机器证明代数方法研究的加速发展[49,55,56]. 但对不等式机器证明的研究仍是举步维艰, 而不等式机器证明的困难在于它依赖于实代数的自动推理.

1996年杨路及其合作者[49,60]建立的多项式完全判别系统(complete discrimination system for polynomials, CDS)为实代数自动推理提供了有效的工具, 使得不等式机器证明的成果得以普遍接受并付诸实际应用.

杨路等人[61~64]利用多项式的判别序列[49,60]、吴方法[54~56]及部分的柱形代数分解[57~59]算法, 给出了能自动发现不等式和实现全局优化的实用算法, 这些算法对一大类不等式型定理是完备的, 并在Maple下编制了通用程序Discoverer[63]和Bottema[61,62,64], 具有很强的实用性, 也非常适用于同时镇定问题中的控制器设计.

下面给出几个利用程序 Discoverer[63] 和Bottema[61,62,64]对广义香槟问题等价问题进行计算而获得的有一定意义的算例.

因为同时镇定的控制器可以相差一个非零的常数因子, 不妨设定控制器的分母多项式首项系数均为1. 另外, 为方便讨论, 仅考虑$\delta > 0$的情况.

注意, 这里的控制器可以是非正则的, 即分子多项式的阶次可以大于分母多项式的阶次. 在讨论同时镇定的文献中, 常常可以不要求控制器一定是正则的[1,11,12,27], 这主要是因为同时镇定问题本质上可转化为扩展复平面上一些解析函数性质[6~10]的研究, 另外, Blondel在文[1]也给出一个结论: k个对象可同时镇定则必存在一个正则的控制器. 事实上, 若有一个非正则的控制器同时镇定k个对象, 根据多项式根与系数的连续依赖性[48,49], 总可以对该控制器的分母多项式进行一个小的扰动, 从而得到一个满足要求的正则的控制器[14].

例 1[14] 令

$$a_1(s) = s+1, b_1(s) = 2\delta(s-1),$$
$$a_2(s) = ((1+\delta)s-(1-\delta))(s+1),$$
$$b_2(s) = 2\delta(s-1)^2, \delta > 0,$$

则当$\delta > \dfrac{1}{2}$时, 存在稳定多项式$x(s) \in MH^i (i = 0, 1, 2)$和$y(s) \in P^0$满足

$$a_j(s)x(s) + b_j(s)y(s) \in H, j = 1, 2,$$

而当$\delta \leqslant \dfrac{1}{2}$时, 不存在满足条件的稳定多项式. 对于给定的$\delta > \dfrac{1}{2}$, 例如$\delta = \dfrac{3}{4}$时, $c(s) = y_0$是所要求的控制器.

注 6 上述例1说明: 1) 在限定控制器阶次的情况下, 利用杨路等人开发的程序可以确切地得到δ的精确界限; 2) 进而, 在给定δ确定值的情况下, 可以确切给出控制器参数的范围. 由于算法的完备性, 所得条件均是充分必要的. 这是一般数值算法所无法比拟的.

例 2[14] 令

$$a_1(s) = s+1, b_1(s) = 2\delta(s-1),$$
$$a_2(s) = ((1+\delta)s-(1-\delta))(s+1),$$
$$b_2(s) = 2\delta(s-1)^2, \delta > 0,$$

则当$\delta > \dfrac{1}{4}$时, 存在稳定多项式$x(s) \in MH^i (i = 0, 1, 2)$和$y(s) \in P^1$满足

$$a_j(s)x(s) + b_j(s)y(s) \in H, j = 1, 2,$$

而当$\delta \leqslant \dfrac{1}{4}$时, 不存在满足条件的稳定多项式. 对于给定的$\delta > \dfrac{1}{4}$, 例如$\delta = \dfrac{1}{2}$时, $c(s) = y_1 s + y_0$是所要求的控制器, 这里

$$(y_1, y_0) \in \{(\frac{1}{10}, \frac{51}{100}), (\frac{3}{5}, \frac{3}{5}), (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})\}.$$

此时, 为了要得到正则的控制器, 根据多项式根与系数的连续依赖关系[48,49], 可取$\tilde{c}(s) = \dfrac{y_1 s + y_0}{\varepsilon s + 1}$为是所要求的正则控制器, $\varepsilon > 0$为充分小, 例如当$(y_1, y_0) \in \{(\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5})\}$时, $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$.

例 3[14] 令

$$a_1(s) = s+1, b_1(s) = 2\delta(s-1),$$
$$a_2(s) = ((1+\delta)s-(1-\delta))(s+1),$$
$$b_2(s) = 2\delta(s-1)^2, \delta > 0,$$

则当$\delta > \dfrac{1}{6}$时, 存在稳定多项式$x(s) \in MH^0$和$y(s) \in P^2$满足

$$a_j(s)x(s) + b_j(s)y(s) \in H, j = 1, 2,$$

而当$\delta \leqslant \dfrac{1}{6}$时, 不存在满足条件的稳定多项式. 例如$\delta = \dfrac{10}{59}$时, $c(s) = y_2 s^2 + y_1 s + y_0$是所要求的控制器, 这里

$$(y_2, y_1, y_0) \in \{(\frac{97}{50}, \frac{39001}{10000}, \frac{245001}{100000}), (\frac{19501}{10000}, \frac{39003}{10000}, \frac{4900299}{2000000})\}.$$

此时, 为了要得到正则的控制器, 根据多项式根与系数的连续依赖关系[48,49], 可取$\tilde{c}(s) = \dfrac{y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{\varepsilon s^2 + \varepsilon s + 1}$

为是所要求的正则控制器, $\varepsilon > 0$为充分小, 例如当$(y_2, y_1, y_0) \in \{(\frac{97}{50}, \frac{39001}{10000}, \frac{245001}{100000})\}$时, $\varepsilon = 10^{-7}$.

注 7　上述诸例中得到的控制器, 实际上是对变量参数空间进行适当的剖分, 然后在满足同时镇定条件的各胞腔中取的样本点.

注 8　从上述算例中还可以看出其他一些规律, 例如, 对于广义香槟问题中δ界限的改进主要依赖于控制器分子多项式阶次的提高.

例 4[14]　令

$$a_1(s) = s + 1, b_1(s) = 2\delta(s - 1),$$
$$a_2(s) = ((1 + \delta)s - (1 - \delta))(s + 1),$$
$$b_2(s) = 2\delta(s - 1)^2, \delta > 0.$$

则当$\delta \leqslant \frac{1}{8}$时, 不存在稳定多项式$x(s) \in MH^0$和$y(s) \in P^3$满足

$$a_j(s)x(s) + b_j(s)y(s) \in H, j = 1, 2,$$

而当$\delta = \frac{1}{7}$时, $c(s) = y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0$是所要求的控制器, 这里

$$(y_3, y_2, y_1, y_0) \in \{(\frac{26}{25}, \frac{376}{125}, \frac{50001}{10000}, \frac{300001}{100000}), (\frac{11407}{10000}, \frac{121}{40}, \frac{50001}{10000}, \frac{300001}{100000})\}.$$

此时, 为了要得到正则的控制器, 根据多项式根与系数的连续依赖关系[48,49], 当$\varepsilon_1 > 0$和$\varepsilon > 0$充分小, 并且$\varepsilon^2 > \varepsilon_1$时, 此例中取$\varepsilon = 10^{-7}$及$\varepsilon_1 = 10^{-15}$即可,

$$\widetilde{c}(s) = \frac{y_3 s^3 + y_2 s^2 + y_1 s + y_0}{\varepsilon_1 s^3 + \varepsilon s^2 + \varepsilon s + 1}$$

是所要求的正则控制器.

注 9　例4中的δ已经突破了Patel等人给出的最好界限[47], Patel等人给出的控制器阶次是9阶的, 而例4给出的是3阶的控制器, 阶次要小得多.

5　比利时巧克力问题(Belgian chocolate problem)

本节分析同时镇定研究中另一个著名问题——"比利时巧克力问题", 此问题也是由Blondel提出并冠名的[1,11].

"比利时巧克力问题"可表述为以下两个问题[11,12,17,47]:

原型巧克力问题: 是否存在正则双稳定控制器c, 镇定如下二阶系统:

$$P(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 1.8s + 1}. \tag{3}$$

广义巧克力问题: δ在什么区间范围时, 存在正则双稳定控制器c镇定如下二阶系统:

$$P(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 2\delta s + 1}, \tag{4}$$

这里δ为$[0, 1]$内的实参数.

显然, 广义巧力问题即是确定双稳定控制器存在时δ的区间范围, 而原型巧克力问题即是问$\delta = 0.9$是否属于该区间?

对于原型巧克力问题, 已获得了多个可实现双稳定镇定的控制器[13,15,17,47], 而对于广义巧克力问题, 至今尚未解决.

为分析方便, 给出广义巧克力问题的的等价形式:

广义巧克力问题等价形式: 设$a(s) = s^2 - 2\delta s + 1, b(s) = s^2 - 1, \delta$为$[0, 1]$内的实参数. 问存在$x(s) \in H^m, y(s) \in H^n (m \geqslant n)$满足

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) \in H \tag{5}$$

时δ的区间范围是什么?

对于广义巧克力问题, 当$\delta = 1$时, 因为$a(s)$和$b(s)$具有公共因子$s - 1$, 此时显然(5)无解. 当$\delta \leqslant 0.5$时, 容易找到满足式(5)的解[17]. 但当$\delta = 0.9$时, 问题变得出奇的复杂(其本身即是原型巧克力问题[12,17,47]. 应当指出, "比利时巧克力问题"的复杂性在于当δ趋近1时, 被控对象的开环传递函数将出现近似的不稳定零点与不稳定极点的相消现象(unstable Pole-Zero cancellation), 这使得控制器设计变得非常困难!

对于广义巧克力问题, 一个重要理论结果是由Blondel等人给出[11,12,65]:

定理 9　对于二阶连续系统

$$P_\delta(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2 - 2\delta s + 1},$$

存在$\delta^* > 0$, 当$\delta < \delta^*$时, 存在双稳定控制器$c(s)$镇定$P_\delta(s)$; 而当$\delta > \delta^*$, 不存在稳定控制器$c(s)$镇定$P_\delta(s)$.

注 10　定理9说明存在严格值δ^*将参数区间划分为稳定域与不稳定域, 进而求解广义巧克力问题就是确定δ^*.

δ^*的理论界首先由Rupp[66]给出并由Blondel等人进一步改进[65], 原结果以z域形式表示, 转换为s域后为如下形式:

$$0.7615941559557649 < \delta^* < 0.9999800001999982.$$

类似于广义香槟问题, 广义巧克力问题的控制器求解也可借助优化计算方法.

完全类似于广义香槟问题, Patel等人求解广义巧克力问题的方法依然利用稳定因式互质分解[3], 将广义巧克力问题转化为单元控制器的插值问题[47],

进而利用Hurwitz条件导出优化模型, 求解方法采用随机算法[50], 借助于这种方法, Patel等首先对原型巧克力问题作出了正面的回答, 并给出了一个11阶的双稳定控制器. 对于广义巧克力问题, Patel等人的结果是$\delta^* > 0.937$[47].

Burke等人基于广义巧克力问题的等价形式, 采用限定阶控制器设计方法, 优化模型如下:

$$\min\ \alpha(xy(ax+by)),$$

其中 $\alpha(p)$ 表示多项式 p 的谱半径, 即 $\alpha(p) = \max\{\mathrm{Re}(s) : p(s) = 0\}$. 优化算法采用是基于非凸非光滑分析的梯度采样法, 这是一种局部最优算法. 基于上述方法, 给出了原型巧克力问题的三阶控制器算例, 对于广义巧克力问题, Burke等人给出的最大可行值为$\delta = 0.94375$, 并推测δ^*值将大于0.951, 同时对低阶镇定控制器的结构进行了研究[17].

Chang等人也基于广义巧克力问题的等价形式和限定阶控制器设计思想, 利用基于分支消减法(branch and reduce)的全局优化算法对广义香槟问题进行了求解[13], 在$\delta = 0.97397439924082$时, 获得了一个10阶双稳定控制器(最近, Chang和Sahinidis宣布, 当$\delta = 0.974$时, 存在满足同时镇定条件的8阶的控制器, 见文[68]):

$$x(s) = s^{10}+x_9s^9+x_8s^8+x_7s^7+x_6s^6+ x_5s^5+x_4s^4+x_3s^3+x_2s^2+x_1s+x_0,$$

其中:

$x_9 = 1.97351109136261, x_8 = 5.49402092964662,$

$x_7 = 8.78344232801755, x_6 = 11.67256448604672,$

$x_5 = 13.95449016040116, x_4 = 11.89912895529042,$

$x_3 = 9.19112429409894, x_2 = 5.75248874640322,$

$x_1 = 2.03055901420484, x_0 = 1.03326203778346;$

$$y(s) = y_5s^5 + y_4s^4 + y_3s^3 + y_2s^2 + y_1s + y_0,$$

其中:

$y_5 = 0.00066128189295, y_4 = 3.611364710425,$

$y_3 = 0.03394722108511, y_2 = 3.86358782861648,$

$y_1 = 0.0178174691792, y_0 = 1.03326203778319.$

考虑广义巧克力问题的等价形式, 直接代入Hurwitz条件等稳定性条件, 问题依然是半代数系统的求解问题和约束为代数式的全局优化问题, 因此基于不等式自动发现求解半代数系统的镇定控制器设计方法对于广义巧克力问题仍然适用.

考虑限定阶控制器设计, 首先有以下结论:

结论 1 设$a(s) = s^2 - 2\delta s + 1, b(s) = s^2 - 1, \delta > 0$, 则不存在 $x(s) \in H^0$, $y(s) \in H^n$, 满足 $a(s)x(s) + b(s)y(s) \in H$.

下面给出几个利用程序 Discoverer[63] 和Bottema[61,62,64]对广义巧克力问题等价问题进行计算而获得的有一定意义的算例.

例 5[16] 令

$$a(s) = s^2 - 2\delta s + 1, b(s) = s^2 - 1, \delta \in [0, 1].$$

当$\delta < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$时, 存在稳定多项式$x(s) \in MH^1$和$y(s) \in H^i(i = 0, 1)$, 满足

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) \in H,$$

而当$\delta \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$时, 不存在满足条件的多项式. 对给定的$\delta < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 例如$\delta = \dfrac{7}{10}$, $c(s) = \dfrac{y_0}{s + x_0}$是所要求的控制器, 这里

$$(x_0, y_0) \in \{(\frac{71}{100}, \frac{7099}{10000})\}.$$

例 6[16] 令

$$a(s) = s^2 - 2\delta s + 1, b(s) = s^2 - 1, \delta \in [0, 1].$$

当$\delta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$时, 存在稳定多项式$x(s) \in MH^2$和$y(s) \in H^i(i = 0, 1, 2)$, 满足

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) \in H,$$

而当$\delta \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}$时, 不存在满足条件的多项式. 对给定的$\delta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 例如$\delta = \dfrac{85}{100}$, $c(s) = \dfrac{y_0}{s^2 + x_1s + x_0}$是所要求的控制器, 这里

$$(x_1, x_0, y_0) \in \{(\frac{9}{5}, \frac{132}{125}, \frac{10559}{10000})\}.$$

例 7[16] 令

$$a(s) = s^2 - 2\delta s + 1, b(s) = s^2 - 1, \delta \in [0, 1].$$

当$\delta < \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$时, 存在稳定多项式$x(s) \in MH^3$和$y(s) \in H^0$, 满足

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) \in H,$$

而当$\delta \geqslant \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$时, 不存在满足条件的多项式, 这里的精确值$k = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 0.923879\cdots$是多项式$8k^4 - 8k^2 + 1$的最大实根. 对给定的$\delta < \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, 例如$\delta = \dfrac{923}{1000}$, $c(s) = \dfrac{y_0}{s^3 + x_2s^2 + x_1s + x_0}$是所要求的控制器, 这里

$$(x_2, x_1, x_0, y_0) \in$$

$$\{(\frac{37}{20}, \frac{303239}{125000}, \frac{1314133}{1000000}, \frac{26282659}{20000000})\}.$$

当$\delta = 0.9$(即原型巧克力问题)时, 可获得镇定控制器$c(s) = \dfrac{y_0}{s^3 + x_2 s^2 + x_1 s + x_0}$, 其中

$$(x_2, x_1, x_0, y_0) \in \{(\frac{23}{10}, \frac{329}{100}, \frac{73}{40}, \frac{18249}{10000}), (\frac{213}{100}, \frac{301}{100}, \frac{417}{250}, \frac{2083}{1250})\}.$$

例 8[16]　令

$$a(s) = s^2 - 2\delta s + 1, b(s) = s^2 - 1, \delta \in [0, 1].$$

当$\delta < \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$时, 存在稳定多项式$x(s) \in MH^4$和$y(s) \in H^0$, 满足

$$a(s)x(s) + b(s)y(s) \in H,$$

而当$\delta \geqslant \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$时, 不存在满足条件的多项式, 这里的精确值$k = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = 0.951056\cdots$是多项式$16k^4 - 20k^2 + 5$的最大实根.

进一步, 当$\delta > 0.9510$时, 可获得一4阶的双稳定镇定控制器如下式, 这改进了文[17]中的结果.

$$\delta = 0.95105651\ 62896110\ 29420643\ 88946743\ 89112458\ 55475719\ 38$$

时, 有如下双稳定镇定控制器:

$$x(s) = s^4 + x_3 s^3 + x_2 s^2 + x_1 s + x_0,$$
$$y(s) = y_0,$$

其中:

$$x_0 = 1.6180339889\ 4536286946\ 9494993565\ 8952157345\ 868769824,$$
$$x_1 = 3.0776835375\ 2911962833\ 8955905332\ 3366931516\ 571678076,$$
$$x_2 = 2.6180339889\ 9793598068\ 1189007281\ 2013909496\ 030952963,$$
$$x_3 = 1.9021130326\ 7922205884\ 1287778934\ 8778224917\ 109514388,$$
$$y_0 = 1.6180339889\ 4536286946\ 9494993565\ 8952157344\ 868769824.$$

注 11　作为一种特殊情况, 可知当$\delta \geqslant 0.96$时, 不存在$x(s) \in MH^5$和$y(s) \in H^0$满足$a(s)x(s) + b(s)y(s) \in H$.

详细的δ^*分布与控制器阶次的关系见表1.

其中$\delta' = 0.554194\cdots$是多项式

$$512\delta^{10} - 1536\delta^8 - 192\delta^7 + 1536\delta^6 + 384\delta^5 - 488\delta^4 - 192\delta^3 - 78\delta^2 - \delta + 54$$

的最小实根, $\delta'' = 0.933781\cdots$是多项式

$$16\delta^5 - 20\delta^3 - 2\delta^2 + 5\delta + 2$$

的最大实根.

表 1　δ^*分布与控制器阶次的关系

Table 1　The distribution of δ^*

$x(s)$	$y(s)$	δ^*	$x(s)$	$y(s)$	δ^*
MH^0	H^0	—			
MH^1	H^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	MH^1	MH^0	$\frac{1}{2}$
MH^1	H^1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	MH^1	MH^1	—
MH^2	H^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	MH^2	MH^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
MH^2	H^1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	MH^2	MH^1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
MH^2	H^2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	MH^2	MH^2	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
MH^3	H^0	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	MH^3	MH^0	δ'
MH^3	H^1	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	MH^3	MH^1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
MH^3	H^2	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	MH^3	MH^2	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
MH^3	H^3	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	MH^3	MH^3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
MH^4	H^0	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$			
MH^4	H^1	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	MH^4	MH^1	δ''
MH^4	H^2	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$			
MH^4	H^3	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$			
MH^4	H^4	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$			

通过表1, 可以发现一些有趣的规律, 有以下猜想:

猜想 1[16]　在广义巧克力问题中, δ_b^*是系统存在形如$x(s) \in MH^n$, $y(s) \in H^0$双稳定镇定控制器时参数δ的上界, 则δ_b^*也是系统存在形如$x(s) \in MH^n$, $y(s) \in H^i (i = 1, \cdots, n)$双稳定镇定控制器时参数$\delta$的上界.

猜想1在$n \leqslant 4$时已有理论验证[15,16].

进一步分析控制器阶次与δ^*之间的关系, 考虑控制器取$x(s) \in MH^n (n = 1, 2, 3, 4)$, $y(s) \in H^0$的情形, 注意到当实变量$\delta \to \delta_n^*$时, 有$a(s)x(s) + b(s)y(s) \to s^{n+2}$, 同时利用实多项式稳定的必要条件–笛卡尔符号法则, 则$\delta_n^* (n = 1, 2, 3, 4)$可通过求解一系列方程显式获得.

对这一结论推广, 可得到一系列关于δ^*的必要条件, 如以下猜想:

猜想 2[16] 对于广义巧克力问题, δ_n^*是当控制器取

$$x(s)\in MH^n, n=1,2,\cdots,$$
$$y(s)\in H^0$$

形式时参数δ的上界, 则每个δ_n^*等于或小于δ_n, 其中δ_n是如下连分式的最大正实根:

$$\begin{cases} f_n=-\dfrac{1}{f_{n-1}}-2\delta, \\ f_0=-\delta, \end{cases}$$

进一步, $\delta_n=\sin\dfrac{(n+2)\pi}{2(n+1)}$.

由于δ_n在n趋向于无穷时的极限为1, 因此当n充分大时, 猜想2成立. 又从文[15,16]可以看出, $\delta_n^*=\delta_n(n=1,2,3,4)$. 实际上, 对于目前已有文献中获得的所有控制器, 猜想2都是成立的!

6 威士忌问题(Whiskey problem)

在对"香槟问题"和"比利时巧克力问题"这两个具体的同时镇定问题分析之后, 来看一个更具一般性的同时镇定问题——"威士忌问题", 该问题仍由Blondel提出的[12], 其表述非常简单.

威士忌问题: 3个任意的一阶系统可同时镇定的充分必要条件是什么?

实际上, 威士忌问题来源于下面两个结果.

定理 10[1,11,12] 如下3个离散一阶系统

$$p_1(z)=\frac{1}{z}, p_2(z)=\frac{1}{z}+\beta, p_3(z)=\frac{1}{z}-\beta$$

可同时镇定, 当且仅当

$$|\beta|<\frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}=4.377\cdots,$$

其中Γ为Gamma函数.

定理 11[12,51] $\beta_i(i=1,2,3)$是不相同的实数, 如下3个离散系统

$$\frac{z}{1+\beta_1 z}, \frac{z}{1+\beta_2 z}, \frac{z}{1+\beta_3 z}$$

同时镇定, 当且仅当

$$|a_1|<\frac{2\Im(\nu(a_0))}{|\nu'(a_0)|},$$

其中

$$a_0=\frac{\beta_2-\beta_3}{\beta_2-\beta_1}, a_1=\frac{(\beta_2-\beta_3)(\beta_1-\beta_3)}{\beta_2-\beta_1},$$

$\Im(z)$表示复数z的虚部, ν为椭圆模函数λ的局部逆[10,67].

注 12 定理10基于复分析方法, 由数$\frac{\Gamma^4(1/4)}{4\pi^2}$为超越数[1,41]这一经典结果可得出3个对象的同时镇定问题不是有理可决定的.

注 13 定理11的证明是由Bertilsson和Blondel给出的[51], 在其证明中应用了复变函数几何理论中的Laudau定理和椭圆模函数方法[67], 进而又得出: 从可计算性理论的角度而言, 多于两个系统的同时镇定问题不能利用标准的计算机器所判定.

注 14 定理10和定理11均可看作威士忌问题的特殊情形, 而一般形式下的威士忌问题由于所含参数过多还未有任何结果. 不难看出, 威士忌问题的解决与复分析理论有本质上的密切联系.

7 结语(Conclusions)

本文对线性系统同时镇定及相关问题的研究内容, 研究方法, 研究难点, 最新研究进展情况进行了介绍, 尤其是对同时镇定研究中著名的"香槟问题"和"比利时巧克力问题"以及"威士忌问题"进行了分析, 并给出了一些探讨结果, 从前述分析中不难看出, 从理论研究的角度来讲, 同时镇定问题的研究从传统的代数方法发展到复分析方法, 充分说明了系统控制理论与现代数学理论之间的交融. 同时镇定问题本质上即可转化为复分析中解析函数几何性质的研究, 同长期以来的复几何数学难题Bloch常数、Landau常数[1,6~10]有着深刻的联系. 而从实际求解同时镇定问题, 设计具体镇定控制器的角度来看, 由于同时镇定问题的难解性, 必须借助于其他领域内的新方法、新工具, 而这些新方法、新工具[13~17]的引入会使系统与控制研究保持新的活力, 从而促进理论和工程技术的发展.

参考文献(References):

[1] BLONDEL V. *Simultaneous Stabilization of Linear Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences 191*[M]. London: Springer-Verlag, 1994.

[2] DOYLE J, FRANCIS B, TANNENBAUM A. *Feedback Control Theory*[M]. New York: Macmillan Publishing Company, 1991.

[3] VIDYASAGAR M. *Control System Synthesis: A Factorization Approach*[M]. Massachusetts: The MIT Press, 1985.

[4] ACKERMANN J. *Uncertainty and Control, Lecture Notes in Control and Information Sciences 70*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1985.

[5] ALOS A. Stabilization of a class of plants with possible loss of outputs and actuator failures[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1983, 28(2): 231 – 233.

[6] AHLFORS L. *Conformal Invariants: Topics in Geometric Function Theory (McGraw-Hill Series in Higher Mathematics)*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1973.

[7] CONWAY J. *Functional of One Complex Variable*[M]. Second Edition. New York: Springer-Verlag, 1978.

[8] 戈鲁辛(陈建功译). 复变函数的几何理论[M]. 北京: 科学出版社, 1956.
(GLOUZIN G. *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable*[M]. Beijing: Science Press, 1956.)

[9] NEHARI Z. *Conformal Mapping*[M]. New York: McGraw-Hill Book Company, 1952.

[10] RUDIN W. *Real and Complex Analysis*[M]. Third Edition. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.

[11] BLONDEL V, GEVERS M. Simultaneous stabilization of three linear systems is rationally undecidable[J]. *Mathematics of Control, Signals, and Systems,* 1993, 6(2): 135 – 145.

[12] BLONDEL V, SONTAG E D, VIDYASAGAR V, et al. *Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*[M]. London: Springer, 1999.

[13] CHANG Y, SAHINIDIS N. Global optimization in stabilizing controller design[J]. *Journal of Global Optimization*, 2007, 38(4): 509 – 526.

[14] GUAN Q, WANG L, XIA B, et al. Solution to the generalized champagne problem on simultaneous stabilization of linear systems[J]. *Science in China (F)*, 2007, 50(5): 719 – 731.

[15] 何冠男, 王龙, 夏壁灿, 等. 比利时巧克力系统的低阶控制器设计[C] //第26届中国控制会议论文集. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2007: 88 – 92.
(HE Guannan, WANG Long, XIA Bican, et al. Stabilization of the Belgian chocolate system via low-order controllers[C] //*Proceedings of the 26th Chinnese Control Conference.* Beijing: Beijing University of Aeronauntics & Astronautics Press, 2007: 88 – 92.)

[16] HE G, WANG L, YU W. French champagne and Belgian chocolate problems in simultaneous stabilization of linear systems[C] //*Proceedings of the 16th IFAC World Congress.* Singapore: Elsevier Science, 2008.

[17] BURKE J V, HENRION D, LEWIS A S, et al. Stabilization via nonsmooth, nonconvex optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1760 – 1769.

[18] SAEKS R, MURRAY J. Fractional representation, algebraic geometry and the simultaneous stabilization problem[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1982, 27(4): 895 – 903.

[19] YOULA D, BONGIORNO J, JABR H. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers - part I: the single-input-output case[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1976, 21(1): 3 – 13.

[20] YOULA D, JABR H, BONGIORNO J. Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers-part II: the multivariable case[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1976, 21(3): 319 – 338.

[21] KUCERA V. *Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach*[M]. New York: Wiley, 1979.

[22] DESOER C, LIU R, MURRAY J, et al. Feedback system design: the fractional representation approach to analysis and synthesis[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1980, 25(3): 399 – 412.

[23] VIDYASAGAR M, VISWANADHAM N. Algebraic design techniques for reliable stabilization[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1982, 27(5): 1085 – 1095.

[24] YOULA D, BONGIORNO J, LU C. Single-loop feedback stabilization of linear multivariable plants[J]. *Automatica,* 1974, 10(2): 159 – 173.

[25] ANDERSON B. A note on the Youla-Bongiorno-Lu condition[J]. *Automatica,* 1976, 12(4): 387 – 388.

[26] GHOSH B. Transcendental and interpolation methods in simultaneous stabilization and simultaneous partial pole placement problems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1986, 24(6): 1091 – 1109.

[27] BLONDEL V, GEVERS M, MORTINI R, et al. Simultaneous stabilization of three or more systems: conditions on the real axis do not suffice[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization,* 1994, 32(2): 572 – 590.

[28] WEI K. Stabilization of a linear plant via a stable compensator having no real unstable zeros[J]. *Systems & Control Letters*, 1990, 15(3): 259 – 264.

[29] JIA Y, ACKERMANN J. Condition and algorithm for simultaneous stabilization of linear plants[J]. *Automatica,* 2001, 37(9): 1425 – 1434.

[30] WEI K, The solution of a transcendental problem and its application in simultaneous stabilization problem[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1992, 37(9): 1305 – 1315.

[31] GHOSH B. An approach to simultaneous system design. Part I: Semi algebraic geometric methods[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1986, 24(3): 480 – 496.

[32] BLONDEL V, CAMPION G, GEVERS M. A sufficient condition for simultaneous stabilization[J]. *IEEE Transactions Automatic Control,* 1993, 38(8): 1264 – 1266.

[33] DEBOWSKI A, KURYLOWICZ A. Simultaneous stabilization of linear single input single output plants[J]. *International Journal of Control*, 1986, 44(5): 1257 – 1264.

[34] EMRE E. Simultaneous stabilization with fixed closed loop characteristic polynomial[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1983, 24(2): 103 – 104.

[35] KWAKERNAAK H. A condition for robust stabilizability[J]. *Systems & Control Letters*, 1985, 2(1): 1005 – 1013.

[36] MAEDA H, VIDYSAGAR M. Some results on simultaneous stabilization[J]. *Systems & Control Letters,* 1984, 5(3): 205 – 208.

[37] WEI K. Simultaneous pole assignment for a class of linear time invariant SISO systems[C] //*Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Florida: IEEE, 1989: 1247 – 1252.

[38] WEI K, BARMISH V. An iterative design procedure for simultaneous stabilization of MIMO systems[J]. *Automatica*, 1988, 24(5): 643 – 652.

[39] WANG L. Robust strong stabilizability of interval plants: It suffices to check two vertices[J]. *Systems & Control Letters*, 1995, 22(2): 133 – 136.

[40] WU Q. Stabilizability may be sufficient for robustly stabilizing an interval plant[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(10): 1084 – 1087.

[41] BAKER A. *Transcendental Number Theory*[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.

[42] BLONDEL V, TSITSIKLIS J N. NP-hardness of some linear control design problems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization,* 1997, 35(6): 2118 – 2127.

[43] BLONDEL V, TSITSIKLIS J N. A survey of computational complexity results in systems and control[J]. *Automatica,* 2000, 36(9): 1249 – 1274.

[44] KABAMBA P, YANG C. Simultaneous controller design for linear time invariant systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(1): 106 – 111.

[45] LEIZAROWITZ A, KOGAN J, ZEHEB E. On simultaneous stabilization of linear plants[J]. *Latin American Applied Research,* 1999, 29(3/4): 167 – 174.

[46] PATEL V V. Solution to the “Champagne Problem” on the simultaneous stabilization of three plants[J]. *Systems & Control Letters,* 1999, 37(3): 173 – 175.

[47] PATEL V V, DEODHARE G, VISWANATH T. Some applications of randomized algorithms for control system design[J]. *Automatica,* 2002, 38(12): 2085 – 2092.

[48] 甘特马赫尔(柯召译). 矩阵论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1955.
(GANTMACHER F. *Matrix Theory*[M]. Beijing: Higher Education Press, 1955.)

[49] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程组与机器证明(非线性科学丛书)[M]. 上海: 上海科学教育出版社, 1996.
(YANG Lu, ZHANG Jingzhong, HOU Xiaorong. *Non-linear equations systems and automated theorem proving*[M] //*Series in Nonlinear Sciences*. Shanghai: Shanghai Press of Science, Technology, and Education, 1996.)

[50] VIDYASAGAR M. Randomized algorithms for robust controller synthesis using statistical learning theory[J]. *Automatica*, 2001, 37(10): 1515 – 1528.

[51] BERTILSSON D, BLONDEL V. Transcendence in simultaneous stabilization[J]. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control,* 1996: 6(3): 1 – 22.

[52] ANDERSON B, BOSE N, JURY E. Output feedback stabilization and related problems-solution via decision methods[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control,* 1975, 20(1): 53 – 66.

[53] TARSKI A. *A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry*[M]. Berkeley: The University of California Press, 1951.

[54] 吴文俊. 初等几何判定问题与机械化证明[J]. 中国科学, 1977, 20(6): 507 – 516.
(Wu Wen Tsun. On the decision problem and mechanization of theorem-proving in elementary-geometry[J]. *Science China,* 1977, 20(6): 507 – 516.)

[55] 吴文俊. 几何定理机器证明的基本原理[M]. 北京: 科学出版社, 1984.
(Wu Wen Tsun. *Mechanical Theorem Proving in Geometries: Basic Principles*[M]. Beijing: Science Press, 1984.)

[56] 吴文俊. 数学机械化[M] //数学机械化丛书. 北京: 科学出版社, 2003.
(Wu Wen Tsun. *Mathematics mechanization*[M] //*Series in Mathematics Mechanization*. Beijing: Science Press, 2003.)

[57] ARNON D S, COLLINS G E, MCCALLUM S. Cylindrical algebraic decomposition I: the basic algorithm[J]. *SIAM Journal on Computing,* 1984, 13(4): 865 – 877.

[58] ARNON D S, COLLINS G E, MCCALLUM S. Cylindrical algebraic decomposition II: an adjacency algorithm for the plane[J]. *SIAM Journal on Computing,* 1984, 13(4): 878 – 889.

[59] COLLINS G E, HONG H. Partial cylindrical algebraic decomposition for quantifier elimination[J]. *Journal of Symbolic Computation,* 1991, 12(3): 299 – 328.

[60] 杨路, 侯晓荣, 曾振柄. 多项式的完全判别系统[J]. 中国科学, 1996, E-26(5): 424 – 441.
(YANG Lu, HOU Xiaorong, ZENG Zhenbing. A complete discrimination system for polynomials[J]. *Science China,* 1996, E-26(5): 424 – 441.)

[61] 杨路. 不等式机器证明的降维算法与通用程序[J]. 高技术通讯, 1998, 8(7): 20 – 25.
(YANG Lu. A dimension-decreasing algorithm with generic program for automated inequalities proving[J]. *High Technology Letters*, 1998, 8(7): 20 – 25.)

[62] YANG L. Recent advances in automated theorem proving on inequalities[J]. *Journal of Computer Science and Technology,* 1999, 14(5): 434 – 446.

[63] 杨路, 侯晓荣, 夏壁灿. 自动发现不等式型定理的一个完备算法[J]. 中国科学, 2001, E-31(3): 424 – 441.
(YANG Lu, HOU Xiaorong, XIA Bican. A complete algorithm for automated discovering of a class of inequality-type theorems[J]. *Science China,* 2001, E-31(3): 424 – 441.)

[64] 杨路, 夏时洪. 一类构造性几何不等式的机器证明[J]. 计算机学报, 2003, 26(7): 769 – 778.
(YANG Lu, XIA Shihong. Automated proving for a class of constructive geometric inequalities[J]. *Chinese Journal of Computer,* 2003, 26(7): 769 – 778.)

[65] BLONDEL V, RUPP R, SHAPIRO H. On zero and one points of analytic functions[J]. *Complex Variables: Theory and Applications,* 1995, 28(2): 182 – 192.

[66] RUPP R. A covering theorem for a composite class of analytic functions[J]. *Complex Variables: Theory and Applications,* 1994, 25(1): 35 – 41.

[67] SEGAL S L. *Nine Introductions in Complex Analysis*[M]. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[68] CHANG Y, SAHINIDIS N. *Stabilizing Controller Design and the Belgian Chocolate Problem*[OL]. http://www.minlp.org/problems/ver/88/over/sessdesc.pdf.

作者简介:

关 强 (1973—), 男, 博士, 助理研究员, 研究方向包括线性系统控制与优化、射频识别网络优化与控制、射频识别测试系统等, E-mail: qiang.guan@ia.ac.cn;

何冠男 (1977—), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向包括鲁棒控制、复杂系统建模与系统镇定性分析等;

王 龙 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 长江学者, 国家教委跨世纪人才基金、国家杰出青年科学基金获得者, 研究方向包括复杂系统智能控制、多机器人系统的协调与控制、集群行为与集群智能、演化博弈与群体决策等;

郁文生 (1967—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向包括系统鲁棒控制、泛函微分方程理论、符号计算及实代数理论及应用、系统全局优化、数学机械化与推理自动化及其在信息技术领域的应用等.