第 29 卷第 1 期
2012 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 29 No. 1
Jan. 2012

文章编号: 1000−8152(2012)01−0091−06

Lurie系统的鲁棒量化控制

范蓉蓉[1], 张小美[2], 祁 恬[4], 陆国平[1,3]

(1. 南通大学 电气工程学院, 江苏 南通 226019; 2. 南通大学 电子信息学院, 江苏 南通 226019;

3. 江苏信息职业技术学院, 江苏 无锡 214513; 4. 华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究了Lurie系统的鲁棒量化状态反馈控制问题, 其中的量化器为静态对数量化器. 首先, 根据Lurie系统自身特点以及对数量化器的特性, 将量化状态反馈控制作用下的Lurie系统建模成具有两个扇形约束的不确定系统. 然后分别考虑了没有量化和有量化作用两种情形, 利用小增益定理, 得到了闭环系统内稳定的充分必要条件, 并进一步给出了相应的状态反馈控制律. 最后, 数值例子表明了本文方法的有效性.

关键词: Lurie系统; 量化反馈控制; 鲁棒控制; 小增益定理

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Robust quantized control for Lurie systems

FAN Rong-rong[1], ZHANG Xiao-mei[2], QI Tian[4], LU Guo-ping[1,3]

(1. School of Electrical Engineering, Nantong University, Nantong Jiangsu 226019, China;
2. School of Electronics and Information, Nantong University, Nantong Jiangsu 226019, China;
3. Jiangsu College of Information Technology, Wuxi Jiangsu 214513, China;
4. College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The robust quantized state-feedback control for Lurie systems is addressed, where the static logarithmic quantizer is considered. According to the characteristics of the Lurie systems and the properties of the logarithmic quantizer, the Lurie systems with quantized state-feedback control are modeled as uncertain systems with two sector constraints. Then, by applying the small gain theorem, we establish a sufficient and necessary condition of internal stability for the closed-loop system with or without quantization effect, respectively. The corresponding state feedback control law is also developed. A numerical example is given to illustrate the effectiveness of the method proposed.

Key words: Lurie systems; quantized feedback control; robust control; small gain theorem

1 引言(Introduction)

早在1956年, Kalman[1]指出镇定控制器量化后, 反馈系统可能会产生极限环和混沌现象. 近年来, 由于数字计算机在控制系统中的广泛应用以及网络化控制理论研究的不断深入, 量化反馈控制问题引起了研究者的广泛关注[2–12]. 目前关于量化反馈控制的研究主要有两类: 基于静态量化器[3–4, 7–10]和基于动态量化器[2,5–6]. 静态量化器是无记忆非线性函数, 而动态量化器则是有记忆的. 在以上基于静态量化器研究反馈控制的文献中, 文献[3]研究了线性系统利用量化状态反馈实现二次镇定问题, 证明了最粗糙的量化器是对数量化器. 文献[4]利用扇形界方法将文献[3] 的结果推广到量化输出反馈控制问题. 文献[7]研究了单输入仿射非线性系统的量化状态反馈和量化输出反馈控制问题, 其中量化输出反馈控制包括量化输入和量化测量两种情形. 文献[8]利用量化依赖方法研究了线性时不变离散时间系统的量化状态反馈控制问题. 文献[9]研究了线性时不变系统的量化时滞反馈控制问题, 其中考虑了两种类型的量化: 量化控制输入和量化状态. 文献[10]研究了有限信道容量下不确定系统的鲁棒H_∞估计问题, 其中信道约束包括测量量化、信号传输时延和数据包丢失.

尽管对量化反馈控制问题的研究已经取得了许多重要的结果, 然而, 不可否认, 现有的结论绝大部分以线性系统为对象, 非线性系统的量化反馈控制的研究结果较少. 由于大多数的工业实际系统都存在由系统模型复杂、元器件不精确及其磨损老化所造成的严重的非线性和不确定性, 所以研究非线性系统的量化反馈控制问题具有更重要的实际意义. Lurie系统作为一类非常重要的控制系统, 其稳定性研究已取得了不少的成果[13–15]. 许多非线性系统可

收稿日期: 2010−04−18; 收修改稿日期: 2011−07−20.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60874021, 61004027, 60774057, 60834003); 江苏省自然科学基金资助项目(BK2010275); 江苏省高校“青蓝工程”资助项目; 南通大学自然科学基金资助项目(09ZY002); 中央高校基本业务费资助项目(2009zm0144).

以表示成Lurie系统的结构形式, 即一个线性系统和非线性单元的反馈连接, 而非线性部分满足一个扇形约束条件.

本文研究Lurie系统的鲁棒量化状态反馈控制问题. 通过分析Lurie系统中非线性环节和对数量化器的特性, 将量化反馈控制作用下的Lurie系统建模成具有两个扇形不确定性的系统. 将利用小增益定理证明, 闭环系统内稳定的充分必要条件与一个代数Riccati方程唯一正定解的存在性有关, 且相应的量化状态反馈控制器由该代数Riccati方程的唯一正定解决定.

2 系统描述与预备知识(System description and preliminaries)

考虑如下形式的Lurie系统:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)-G\varphi(t,Cx(t))+B_1\omega(t), \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$是系统状态, $u(t)\in\mathbb{R}^m$是控制输入, $\omega(t)\in\mathbb{R}^p$是外部输入; $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, $B_1\in\mathbb{R}^{n\times p}$, $C\in\mathbb{R}^{1\times n}$和$G\in\mathbb{R}^{n\times 1}$均是已知的常数矩阵; $\varphi(t,y)$是一个无记忆非线性函数, 关于t分段连续, 关于y满足全局Lipschitz条件, 有$\varphi(t,0)=0$, 且满足如下扇形约束:

$$[\varphi(t,y)-L_1y]^{\mathrm{T}}[\varphi(t,y)-L_2y]\leqslant 0, \tag{2}$$

其中: L_1,L_2是已知常数矩阵, 且满足$L_2-L_1>0$. 通常称这样的一个非线性函数$\varphi(t,y)$属于扇形区域$[L_1,L_2]$, 记作$\varphi(t,y)\in[L_1,L_2]$.

均匀量化器采用的是相同的量化间隔, 所以为了适应大数值输入信号, 同时满足量化精度的要求, 必须增加量化等级, 这也意味着需要增加网络带宽. 对数量化器是一种非均匀的量化器, 量化等级在对数意义下是线性的, 这种类型的量化器可以保证在带宽较低情况下, 信号量化误差比较小; 其次, 浮点运算的本质实际上就是一种对数量化; 此外, 文献[3]中指出, 经由一个量化了的状态反馈控制器镇定一个不稳定的线性系统, 所需要的量化器是对数形式的, 即对数量化器. 因此, 本文考虑对数量化器 $f(\cdot)$, 其量化等级满足如下形式:

$$\begin{aligned}U=\{&\pm u_i,u_i=\rho^i u_0,i=\pm1,\pm2,\cdots\}\cup\\&\{\pm u_0\}\cup\{0\},\ 0<\rho<1,\ u_0>0.\end{aligned} \tag{3}$$

且量化器$f(\cdot)$满足[3,4]

$$f(v)=\begin{cases}u_i, & \dfrac{1}{1+\sigma}u_i<v\leqslant\dfrac{1}{1-\sigma}u_i, v>0,\\ 0, & v=0,\\ -f(-v), & v<0.\end{cases} \tag{4}$$

其中: $\sigma=\dfrac{1-\rho}{1+\rho}$, ρ为量化密度, 满足$0<\rho<1$.

根据对数量化器的数学特性, 有

$$f(v)=(1+\varDelta(v))v, \tag{5}$$

其中$|\varDelta(v)|\leqslant\sigma$.

注 1 与文献[3]不同的是, 它研究的是量化精度与稳定性之间的关系, 并给出满足系统二次稳定的最坏的量化密度; 本文则研究的是量化密度、Lurie系统中的非线性特性与系统稳定性三者之间的关系.

若控制信号被对数量化器量化, 则系统(1)中的控制输入$u(t)$可表示成如下形式[4]:

$$u(t)=(1+\varDelta)Kx(t). \tag{6}$$

记

$$y=Cx,\ \hat{y}=\varphi(t,y),$$

则量化状态反馈控制作用下的Lurie系统, 可由图1表示.

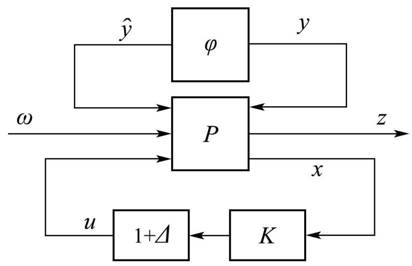

图 1 量化状态反馈控制

Fig. 1 Quantized state feedback control

图1中, 受控系统P由下面的方程表示:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)-G\hat{y}+B_1\omega(t). \tag{7}$$

根据$\varphi(t,y)$的扇形约束条件(2)可知

$$\begin{aligned}&[\hat{y}-\frac{1}{2}(L_1+L_2)y-\frac{1}{2}(L_1-L_2)y]^{\mathrm{T}}\times\\&[\hat{y}-\frac{1}{2}(L_1+L_2)y+\frac{1}{2}(L_1-L_2)y]\leqslant 0.\end{aligned}$$

进一步, 有

$$\begin{aligned}&[\hat{y}-\frac{1}{2}(L_1+L_2)y]^{\mathrm{T}}[\hat{y}-\frac{1}{2}(L_1+L_2)y]\leqslant\\&[\frac{1}{2}(L_1-L_2)y]^{\mathrm{T}}[\frac{1}{2}(L_1-L_2)y].\end{aligned} \tag{8}$$

记

$$\begin{aligned}&v_1=\frac{1}{2}(L_1-L_2)y,\\&v_2=\hat{y}-\frac{1}{2}(L_1+L_2)y,\\&v_2=\bar{\varphi}(t,v_1),\end{aligned}$$

则量化状态反馈控制作用下的Lurie系统可进一步由图2表示.

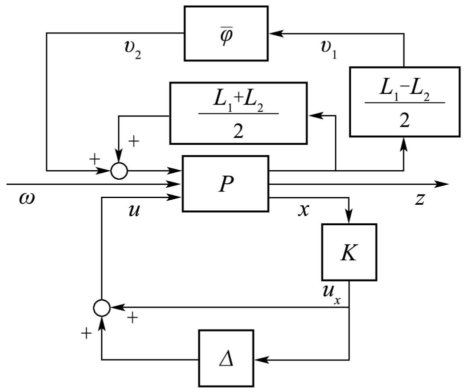

图 2 量化状态反馈系统

Fig. 2 The quantized state feedback system

很明显, $\bar{\varphi}$是一个新的非线性函数. 若把该非线性函数看成是系统内部的一种不确定性, 对于$t \in [0,\infty)$, 这种不确定性满足下面关系:

$$\|\bar{\varphi}\|_\infty = \sup_{v_1(t)\neq 0}\frac{\|v_2\|_2}{\|v_1\|_2} \leqslant 1. \tag{9}$$

由此可知, 量化状态反馈控制作用下的Lurie系统是一个具有两个扇形不确定性的系统. 一个不确定性来自系统内部, 即$\bar{\varphi}$; 另一个不确定性则由量化器引起, 即Δ. 对于这样一个系统, 能否设计一个状态反馈控制器使得闭环系统内稳定?

注 2　对数量化器结构上的特征, 使得笔者可以用乘性不确定性来描述其特征. 运用这些结构特征, 可进一步将量化密度与网络化系统对信道带宽基本要求联系起来, 这是与一般的鲁棒控制的不同之处.

定义 1[16]　当$\omega = 0$, $t \to \infty$时, 系统(1)的状态$x(t)$从所有初始状态趋于零, 则称该系统是内稳定的.

3 无量化影响的Lurie系统鲁棒控制(Robust control for Lurie systems without quantization effect)

由上一节的分析可知, 若不考虑量化的影响, 即$u(t) = Kx(t)$, 则设计状态反馈控制器使得闭环系统内稳定的问题就变成一个标准的鲁棒控制问题.

引理 1[16](小增益定理)　考虑如图3所示的互联系统.

令$\alpha > 0$, 则图3中所示的系统对所有满足$\|\Delta\|_\infty \leqslant \alpha$的$\Delta$是内稳定的, 当且仅当$\|M\|_\infty < 1/\alpha$.

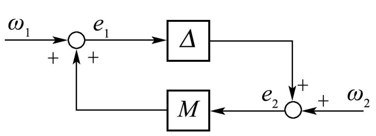

图 3 小增益定理

Fig. 3 Small gain theorem

记$T_{v_1v_2}$表示图2中从信号v_2到v_1的传递函数. 由引理1可知, 当不考虑量化影响时, Lurie系统是内稳定的, 当且仅当$T_{v_1v_2}$满足

$$\|T_{v_1v_2}\|_\infty = \sup_{v_1(t)\neq 0}\frac{\|v_1\|_2}{\|v_2\|_2} < 1. \tag{10}$$

定理 1　考虑图2所示的系统, 其中被控系统P由式(7)表示. 当$\Delta = 0$时, 闭环系统是内稳定的, 当且仅当以下代数Riccati方程存在唯一正定解$P > 0$:

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A} + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} + PGG^{\mathrm{T}}P - PBB^{\mathrm{T}}P = 0, \tag{11}$$

其中

$$\bar{A} = A - \frac{G}{2}(L_1+L_2)C, \bar{C} = \frac{1}{2}(L_1 - L_2)C.$$

此时状态反馈控制器增益为

$$K = -B^{\mathrm{T}}P. \tag{12}$$

证　当$\omega(t) = 0$时, 若以信号$v_2(t), u(t)$为输入, 信号$v_1(t)$为输出, 经过简单计算, 可以很容易得到系统的状态空间描述

$$\begin{cases}\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + Bu(t) - Gv_2(t),\\ v_1(t) = \bar{C}x(t).\end{cases} \tag{13}$$

构造一个Hamilton矩阵H, 满足

$$H := \begin{bmatrix}\bar{A} & GG^{\mathrm{T}} - BB^{\mathrm{T}}\\ -\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} & -\bar{A}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}. \tag{14}$$

设$P := \mathrm{Ric}(H)$存在, 则P满足Riccati方程(11).

用$x(t)$表示系统状态, 对$x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)$求微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^{\mathrm{T}}Px) = \dot{x}^{\mathrm{T}}Px + x^{\mathrm{T}}P\dot{x} =$$
$$x^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A})x + 2 < u, B^{\mathrm{T}}Px > -$$
$$2 < v_2, G^{\mathrm{T}}Px > .$$

用P的Riccati方程(11)代入$\bar{A}^{\mathrm{T}}P + P\bar{A}$项, 得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^{\mathrm{T}}Px) =$$
$$-\|v_1\|^2 - \|G^{\mathrm{T}}Px\|^2 + \|B^{\mathrm{T}}Px\|^2 +$$
$$2 < u, B^{\mathrm{T}}Px > -2 < v_2, G^{\mathrm{T}}Px > =$$
$$-\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - \|u\|^2 +$$
$$\|u + B^{\mathrm{T}}Px\|^2 - \|v_2 + G^{\mathrm{T}}Px\|^2.$$

由于要求闭环系统是内稳定的, 所以$x(\infty) = 0$, 那么在零初始条件, 即$x(0) = 0$下, 对上式两边关于t从$t = 0$到$t = \infty$积分, 有

$$\|v_1\|_2^2 - \|v_2\|_2^2 =$$
$$\|u + B^{\mathrm{T}}Px\|_2^2 - \|v_2 + G^{\mathrm{T}}Px\|_2^2 - \|u\|_2^2.$$

由上式可以看出, 对于所有能量有限的信号v_2, $\|T_{v_1v_2}\|_\infty < 1$, 当且仅当状态反馈控制器增益$K$满

足

$$K = -B^{\mathrm{T}}P.$$

证毕.

注 3 小增益定理利用系统输入信号与输出信号之间的某种增益关系给出了一般系统满足鲁棒稳定性的充分必要条件, 本文利用小增益定理得到了闭环系统内稳定的充分必要条件.

4 Lurie系统的鲁棒量化反馈控制(Robust quantized feedback control for Lurie systems)

当控制信号不经过量化器时, 若采用上一节中的状态反馈控制器设计方法, 可以使闭环系统内稳定, 即$\|T_{v_1v_2}\|_\infty < 1$. 但是, 若控制信号先经过对数量化器再作用于受控系统, 控制信号的信息会损失. 量化密度越高, 损失的信息量越少, 量化后得到的信号越接近真实信号, 反之亦然. 闭环系统内稳定的充分必要条件$\|T_{v_1v_2}\|_\infty < 1$ 可能会因此而被破坏. 那么, 对于所有满足$|\Delta| \leqslant \sigma$的$\Delta$, 能否设计一个量化状态反馈控制器使得受控的Lurie系统内稳定? 即设计一个量化状态反馈控制器, 使得

$$\max_{|\Delta|\leqslant\sigma} \|T_{v_1v_2}\|_\infty < 1.$$

定理 2 考虑如图2所示的量化状态反馈系统, 其中受控对象为一阶Lurie系统, 则闭环系统是内稳定的, 当且仅当下面代数Riccati方程存在唯一正定解$P_{\mathrm{q}} > 0$:

$$\bar{A}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}} + P_{\mathrm{q}}\bar{A} + \bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} + P_{\mathrm{q}}GG^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}} - (1-\sigma)^{-2}P_{\mathrm{q}}BB^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}} = 0, \tag{15}$$

其中:

$$\bar{A} = A - \frac{G}{2}(L_1+L_2)C,\ \bar{C} = \frac{1}{2}(L_1-L_2)C.$$

此时状态反馈控制器增益为

$$K_{\mathrm{q}} = -(1-\sigma)^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}. \tag{16}$$

证 假设存在一个状态反馈控制器, 其增益形如$K_{\mathrm{q}} = -\dfrac{1}{\beta}B^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}$, 则由式(6)可知, 对于所有满足$|\Delta| \leqslant \sigma$的$\Delta$, 系统(13)可写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}x(t) - \dfrac{1+\Delta}{\beta}[BB^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}]x(t) - Gv_2(t), \\ v_1(t) = \bar{C}x(t). \end{cases} \tag{17}$$

如果该系统是一阶的, 同时假设Δ是时不变的, 则计算可得

$$\|T_{v_1v_2}(\Delta)\|_\infty = \frac{|\frac{1}{2}(L_1-L_2)CG|}{|-A+\dfrac{G}{2}(L_1+L_2)C+\dfrac{1+\Delta}{\beta}BB^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}|}.$$

很明显, $\|T_{v_1v_2}(\Delta)\|_\infty$关于$\Delta$是单调下降的, 因此容易得到下面的引理.

引理 2 考虑如图2所示的系统. 当$\Delta = -\sigma$时, 若存在状态反馈控制器满足条件$\|T_{v_1v_2}\|_\infty < 1$, 那么对于所有满足$|\Delta| \leqslant \sigma$的$\Delta$, 此条件均成立.

根据引理2, 只考虑$\Delta = -\sigma$时的情形, 此时, 若以u, v_2为系统输入, v_1为系统输出, 类似于系统(13), 量化反馈控制系统可以写成如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}u(t) - Gv_2(t), \\ v_1(t) = \bar{C}x(t), \end{cases}$$

其中$\bar{B} = (1-\sigma)^{-1}B$.

构造一个Hamilton矩阵H_{q}满足

$$H_{\mathrm{q}} := \begin{bmatrix} \bar{A} & GG^{\mathrm{T}} - \bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}} \\ -\bar{C}^{\mathrm{T}}\bar{C} & -\bar{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \tag{18}$$

设$P_{\mathrm{q}} := \mathrm{Ric}(H_{\mathrm{q}})$存在, 则$P_{\mathrm{q}}$满足Riccati方程(15).

用$x(t)$表示系统状态, 采用上一节中的方法, 对$x^{\mathrm{T}}(t)P_{\mathrm{q}}x(t)$求微分, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x) = x^{\mathrm{T}}(\bar{A}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}} + P_{\mathrm{q}}\bar{A})x - 2 < v_2, G^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x > + 2 < u, \bar{B}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x > .$$

利用上述Riccati方程(15), 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x) = -\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 - \|u\|^2 - \|v_2 + G^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x\|^2 + \|u + \bar{B}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x\|^2.$$

由于要求闭环系统是内稳定的, 所以$x(\infty) = 0$, 那么在零初始条件, 即$x(0) = 0$下, 对上式两边关于t从$t = 0$到$t = \infty$积分, 有

$$\|v_1\|_2^2 - \|v_2\|_2^2 = \|u + \bar{B}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x\|_2^2 - \|v_2 + G^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}x\|_2^2 - \|u\|_2^2.$$

由上式可以看出, 对于所有能量有限的信号v_2, $\max\limits_{|\Delta|\leqslant\sigma} \|T_{v_1v_2}\|_\infty < 1$, 当且仅当状态反馈控制器增益$K_{\mathrm{q}}$满足$K_{\mathrm{q}} = -\bar{B}^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}$, 即

$$K_{\mathrm{q}} = -(1-\sigma)^{-1}B^{\mathrm{T}}P_{\mathrm{q}}.$$

证毕.

考虑量化反馈控制系统(17), 若系统是单输入单输出高阶系统, 系统矩阵$\bar{A}$是一个维数大于1的方阵. 笔者无法得到$\|T_{v_1v_2}\|_\infty$与Δ之间的具体关系, 因此无法像定理2判断出$\max\limits_{|\Delta|\leqslant\sigma} \|T_{v_1v_2}\|_\infty$ 所对应的Δ.

此时, 可以采用2块μ综合方法来设计对于所有满足$|\varDelta| \leqslant \sigma$的$\varDelta$, 使得具有量化影响的Lurie系统鲁棒内稳定的状态反馈控制器.

这里, 系统$G(P, K_{\rm q})$为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [\bar{A} + BK_{\rm q}]x(t) + [-G \quad B]\begin{bmatrix} v_2 \\ u_{x{\rm q}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ u_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ K_{\rm q} \end{bmatrix} x(t). \end{cases} \tag{19}$$

记$\bar{\varDelta} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi} & 0 \\ 0 & \varDelta \end{bmatrix}$, 很明显有

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ u_{x{\rm q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi} & 0 \\ 0 & \varDelta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ u_x \end{bmatrix},\ \|\bar{\varDelta}\|_\infty \leqslant 1.$$

引理 3[16]　考虑如图4中所示的系统, 令$\beta > 0$, $\|\bar{\varDelta}\|_\infty \leqslant \beta$, 系统是内稳定的当且仅当

$$\mu_{\bar{\varDelta}} G(P, K_{\rm q})({\rm j}\omega) = \inf_{D\in\mathcal{D}} \bar{\sigma}\left[DG(P, K_{\rm q})({\rm j}\omega)D^{-1}\right] < \frac{1}{\beta}.$$

其中: $\mathcal{D} = \{\begin{bmatrix} d_1^\omega & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, d_1^\omega > 0\}$, $\bar{\sigma}(\cdot)$ 表示矩阵的最大奇异值.

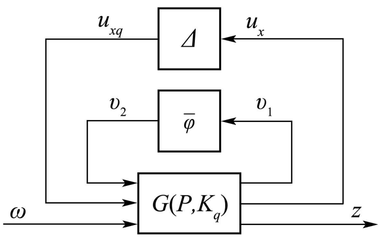

图 4　高阶量化反馈控制系统

Fig. 4　Higher-order quantized feedback control systems

定理 3　考虑量化状态反馈控制作用下的高阶Lurie系统, 如图4所示. 则闭环系统是内稳定的, 当且仅当下面不等式成立:

$$\inf_{D\in\mathcal{D}} \bar{\sigma}\left[DG(P, K_{\rm q})D^{-1}\right] < 1, \tag{20}$$

其中:

$$G(P, K_{\rm q}) = \begin{bmatrix} -\bar{C}\varPhi G_1 & \bar{C}\varPhi B \\ -K\varPhi G_1 & K\varPhi B \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$\varPhi = (sI - \bar{A} - BK_{\rm q})^{-1}.$$

证　系统(19)的传递函数可由四块分块矩阵(21)来表示, 则利用引理3可以直接得到此定理的结论.　　证毕.

这里, 控制器增益$K_{\rm q}$可由标准D-K迭代算法[16]求解, 可以按照以下步骤完成.

Step 1　求一个标量函数$d_1(s), d_1(s), d_1^{-1}(s)$都是稳定的, 使得$|d_1({\rm j}\omega)| \approx d_1^\omega$;

Step 2　令$D = \begin{bmatrix} d_1(s) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求满足

$$\inf_{D\in\mathcal{D}} \bar{\sigma}\left[DG(P, K_{\rm q})D^{-1}\right]$$

的控制器增益 $K_{\rm q}$;

Step 3　固定Step 2中求得的$K_{\rm q}$, 对D在频域上逐点使$\bar{\sigma}[DG(P, K_{\rm q})D^{-1}]$最小. 这个过程会产生一个新的$\hat{d}_1^\omega$;

Step 4　比较$\hat{d}_1^\omega$和d_1^ω, 如果相近, 则停止, 否则用$\hat{d}_1^\omega$代替d_1^ω返回Step 1;

Step 5　此时, 若$\inf\limits_{D\in\mathcal{D}} \bar{\sigma}[DG(P, K_{\rm q})D^{-1}] < 1$, 所对应的控制器增益$K_{\rm q}$即为所求, 若不满足则说明不存在状态反馈控制器使得图4中的闭环系统内稳定.

注 4　文献[6, 8]均采用LMI的方法, 分别给出了实现系统LQR优化问题以及实现系统多重二次可镇定控制器存在的充分条件, 而本文基于代数Riccati方程给出了实现系统内稳定的充分必要条件.

5　数值例子(Numerical example)

考虑外部输入$\omega(t) = 0$的一阶Lurie系统:

$$\dot{x}(t) = 0.8x(t) + u(t) - 0.5\varphi(t, x(t)),$$

其中: $\varphi(t, x(t)) = 0.5(|x(t) + 1| - |x(t) - 1|)$, 且满足扇形约束

$$[\varphi(t, y)]^{\rm T}[\varphi(t, y) - y] \leqslant 0.$$

假设量化密度ρ为不同的值, 利用MATLAB编程求解定理2中的Riccati方程, 得到不同的状态反馈控制器增益$K_{\rm q}$. 图5表示系统在初始条件$x_0 = -2$和不同的量化状态反馈控制下的状态响应图.

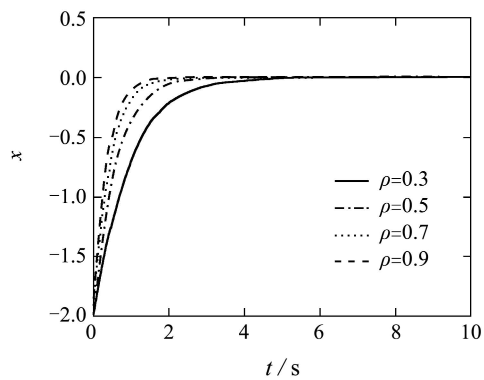

图 5　闭环系统状态响应图

Fig. 5　State response of the closed-loop system

6　结论(Conclusions)

本文讨论了Lurie系统的鲁棒量化状态反馈控制问题. 首先, 针对状态反馈控制器没有量化约束的情形, 利用小增益定理得到了闭环系统内稳定的充分

必要条件, 并基于代数Riccati方程给出了状态反馈控制器的设计方法. 其次, 考虑了量化状态反馈控制作用下的一阶Lurie系统, 利用小增益定理同样得到了闭环系统内稳定的充分必要条件, 此时状态反馈控制器增益是依赖于量化密度的. 最后考虑了受量化影响的高阶Lurie系统, 采用2块μ综合方法并给出标准 D-K 迭代算法设计了保证闭环系统内稳定的量化状态反馈控制器.

参考文献(References):

[1] KALMAN R E. Nonlinear aspects of sampled-data control systems[C] //*Proceedings of the Symposium on Nonlinear Circuit Analysis*. California: Polytechnic Institute of Brooklyn, 1956, VI: 273 – 313.

[2] BROCKETT R W, LIBERZON D. Quantized feedback stabilization of linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(7): 1279 – 1289.

[3] ELIA N, MITTER S K. Stabilization of linear systems with limited information[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1384 – 1400.

[4] FU M Y, XIE L H. The sector bound approach to quantized feedback control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1698 – 1711.

[5] BULLO F, LIBERZON D. Quantized control via locational optimization[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(1): 2 – 13.

[6] YUE D, PENG C, TANG G Y. Guaranteed cost control of linear systems over networks with state and input quantisations[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2006, 153(6): 658 – 664.

[7] CERAGIOLI F, PERSIS C D. Discontinuous stabilization of nonlinear systems: Quantized and switching controls[J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56 (7/8): 461 – 473.

[8] GAO H J, CHEN T W. A new approach to quantized feedback control systems[J]. *Automatica*, 2008, 2(44): 534 – 542.

[9] FRIDMAN E, DAMBRINE M. Control under quantization, saturation and delay: An LMI approach[J]. *Automatica*, 2009, 45(10): 2258 – 2264.

[10] GAO H J, CHEN T W. H_∞ estimation for uncertain systems with limited communication capacity[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(11): 2070 – 2084.

[11] 祁恬, 刘寅, 苏为洲. 基于量化控制信号的线性系统的跟踪性能极限[J]. 控制理论与应用, 2009, 26(7): 745 – 750.
(QI Tian, LIU Yin, SU Weizhou. The performance limit in tracking of a linear system with a quantized control signal[J]. *Control Theory & Applications*, 2009, 26(7): 745 – 750.)

[12] 褚红燕, 费树岷, 刘金良, 等. 时滞依赖网络控制系统的量化控制: 分段时滞法[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 575 – 580.
(CHU Hongyan, FEI Shumin, LIU Jinliang, et al. Quantized control for delay-dependent networked control systems: piecewise delay method[J]. *Control Theory & Applications*, 2011, 28(4): 575 – 580.)

[13] HAN Q L, YUE D. Absolute stability of Lurie's systems with time-varying delay[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2007, 1(3): 854 – 859.

[14] HAO F. New conditions on absolute stability of uncertain Lurie's systems and the maximum admissible perturbed bound[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2007, 24(3): 425 – 433.

[15] HE Y, WU M, SHE J H, et al. Robust stability for delay Lurie's control systems with multiple nonlinearities[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, 176(2): 371 – 380.

[16] ZHOU K M, DOYLE J C, GLOVER K. *Robust and Optimal Control*[M]. Engle-Wood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1995.

作者简介:

范蓉蓉 (1986—), 女, 硕士研究生, 主要研究方向为网络控制系统, E-mail: fanrongrong86@163.com;

张小美 (1964—), 女, 教授, 硕士生导师, 主要研究方向为随机系统、时滞系统以及模糊控制等, E-mail: zhang.xm@ntu.edu.cn;

祁 恬 (1981—), 女, 讲师, 主要研究方向为网络控制、鲁棒控制、最优化控制等, E-mail: auqt@scut.edu.cn;

陆国平 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为非线性控制系统、鲁棒控制、时滞控制、广义控制系统、网络控制系统以及智能控制等, E-mail: lu.gp@ntu.edu.cn.