

通讯访问约束条件下线性随机系统的状态可估计性

王丽娟, 章 辉

(浙江大学 工业控制技术国家重点实验室; 控制科学与工程学系 工业控制研究所, 浙江 杭州 310027)

摘要: 本文从信息论的视角考察了线性离散随机系统在访问约束情况下的可估计性问题. 针对系统中存在的访问约束所带来的通讯冲突现象, 采用一个二值向量函数描述系统中各个输出信号的通讯状态. 针对这类对象, 根据由互信息定义的可估计性概念, 讨论了访问约束系统的状态估计问题, 得出了在输出检测信号传输存在访问约束情况下的状态可估计性条件, 解析分析和仿真结果表明, 存在合理的通信序列, 使得系统在访问约束条件下, 能够保持其状态可估计性. 本文还证明了在访问约束条件下随机系统的可估计性和相应的确定性系统的能观性之间的等价关系.

关键词: 访问约束; 可估计性; 能观性; 通信策略; 互信息

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

On state estimability of linear stochastic system under communication access constraints

WANG Li-juan, ZHANG Hui

(National Key Laboratory of Industrial Control Technology; Institute of Industrial Process Control, Department of Control Science and Engineering, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: The problem of estimability is discussed for linear multivariable discrete-time stochastic systems with communication access constraints. To deal with the communication constraints caused by the limited access, a binary-value function is used to describe the access status of the output signals. Based on the measure of mutual information, the problem of state estimability is discussed and a condition for estimability under access constraints is derived. Analytical analysis and simulation results show that there exist proper communication strategies which preserve the estimability of the system under communication access constraints. Furthermore, an equivalent relation between the estimability of stochastic system and the observability of corresponding deterministic system is proved under communication access constraints.

Key words: access constraints; estimability; observability; communication strategy; mutual information

1 引言(Introduction)

随着复杂工业控制系统的发展, 网络化控制系统(NCS)、远程控制系统和大规模控制系统等复杂控制系统得到了广泛的应用. 在这些控制系统中, 往往需要大量的数据传输, 而传输媒介的带宽资源是有限的, 这些资源必须分配给各个子系统, 因此就出现了各种各样的通信约束, 比如网络诱导延时^[1,2]、访问约束^[3~10](access constraints)等.

在带宽有限的系统中, 由于系统带宽资源的限制, 在固定时刻只能传输有限个信号, 当需同时传输的信号数超过通讯信道所能同时传输信号数目的最大值时, 就出现了访问约束问题.

本文主要研究在通讯访问约束情况下, 线性随机系统的状态可估计性问题. 关于可估计性的定义,

文献[11]中给出了最小均方估计(LMSE)意义下的定义, 即系统的先验误差小于后验误差. 文献[12]在文献[11]的基础上提出了最小最大熵(MMEE)意义下可估计性的定义: 状态的实际值和估计值的互信息大于零. 在具有通讯访问约束的多变量系统中, 由于传输媒介通信带宽的限制, 各个数据无法同时传输, 因此要选择一个通信策略, 决定在某一时刻应该传输哪些数据. 由于通信策略的存在将会影响到系统的性质和性能, 因此在考察线性随机系统的估计问题时, 首先应该判断在访问约束情况下, 该系统是否是可估计的. 解析分析和仿真结果表明, 在静态通信策略下, 存在一个通信策略使得访问约束的系统为可估计的. 本文还进一步讨论了可估计性和能观性之间的关系.

2 问题描述(Problem description)

考虑如下的离散随机系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \end{cases} \quad (1)$$

其中: A, B, C 是具有相应维数的定常矩阵, $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $E\{\mathbf{x}(0)\} = 0$, $E\{\mathbf{x}(0)\mathbf{x}^T(0)\} = \Pi(0)$, $\mathbf{w}(k)$ 和 $\mathbf{v}(k)$ 相互独立的零均值随机序列, 且与 $\mathbf{x}(0)$ 相互独立.

在访问约束系统中, 在同一时刻只能传输有限个数据, 假设连接输出端和估计器的通信媒介只有 $W_m (1 \leq W_m < m)$ 个输出通道, 即在任意时刻 m 个输出中只有 W_m 个信号能够与估计器通信, 而其他的信号则处于等待状态. 因此就要设计一个通信策略, 决定在某一时刻应该传输哪些输出数据.

本文基于文献[4]中提出的静态通信策略, 研究访问约束系统的可估计性问题. 该通信策略主要思想为: 对于 $i = 1, 2, \dots, m$, 用一个二值函数 $\sigma_i(k)$ 表示在第 k 时刻第 i 个输出是否与估计器通信, 用 \tilde{y} 表示估计器得到的输出值, 那么估计器得到的第 k 个时刻第 i 个输出值为 $\tilde{y}_i(k) = \sigma_i(k)y_i(k)$, 对于输出 $y_i(k)$, 如果 $\sigma_i(k) = 1$, 则 $y_i(k)$ 不被传输, 估计器把其值当做零处理.

m 个输出信号在 k 时刻的瞬时通信状态可以用一个 $m \rightarrow W_m$ 通信序列表示:

$$\boldsymbol{\sigma}(k) = [\sigma_1(k) \ \dots \ \sigma_m(k)],$$

其中 $m \rightarrow W_m$ 的通信序列表示这样一个映射: $\sigma_i(k)$ 的值域为 $\{0, 1\}$, 并且 $\|\boldsymbol{\sigma}(k)\|_2^2 = W_m, \forall k$.

令 $M_\sigma(k) = \text{diag}\{\boldsymbol{\sigma}(k)\}$, 则 $\tilde{\mathbf{y}}(k) = M_\sigma(k)\mathbf{y}(k)$, 因此, 访问约束系统可以描述为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{w}(k), \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) = M_\sigma(k)C\mathbf{x}(k) + M_\sigma(k)\mathbf{v}(k). \end{cases} \quad (2)$$

由于访问约束的存在将会影响到系统的性质和性能, 因此讨论在这样条件下系统的可估计性成为状态估计问题的理论基础.

3 访问约束系统的可估计性(Estimability under access constrains)

关于系统状态可估计性的定义, 本文采用参考文献[12]中在最小最大误差熵(MMEE)准则下的定义: 参数的实际值和估计值的互信息大于零. 这个定义是以文献[11]中在最小均方估计(LMSE)意义下的可估计性定义为基础的. 所谓最大熵原理^[13]就是对于一个随机变量, 当其分布函数未知时, 应该最客观地按照它的熵(不确定性)达到最大的原则来选择其概率分布. 对于不同的约束条件, 可以得出几种典型的概率分布函数, 如Jaynes等^[13]已经证明, 当约束条件为系统的方差时, 由最大熵准则得出的估计为高斯

分布. 对于式(2)所描述的系统, 在MMEE估计准则意义下其随机变量的分布考虑为高斯分布. 文献[12]已经证明, 在线性高斯系统中, 该定义和最小均方估计意义下的可估计性是一致的.

3.1 MMEE意义下的可估计性(Estimability under minimax error entropy)

根据文献[11]中关于可估计性的定义, 文献[12]给出了MMEE意义下的可估计性.

考虑一般意义下的随机系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = f(k, \mathbf{x}(k), \mathbf{w}(k)), \\ \mathbf{y}(k) = h(k, \mathbf{x}(k), \mathbf{v}(k)), \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m$, $k = 1, 2, \dots$; $\mathbf{w}(k)$ 和 $\mathbf{v}(k)$ 为零均值的随机噪声. 设 $\hat{\mathbf{x}}(k)$ 为在给定观测系列 $\mathbf{Y}(k) = \{\mathbf{y}(k), \mathbf{y}(k-1), \mathbf{y}(k-2), \dots\}$ 下关于系统状态 $\mathbf{x}(k)$ 在最小最大误差熵(MMEE)意义下的最优估计, $\tilde{\mathbf{x}}(k)$ 为状态的真实值和估计值的误差, 并且 $\tilde{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)$ 相应的先验和后验均方误差为:

$$\Gamma(k) = E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\}, \quad \Xi(k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k)\}.$$

系统(3)在MMEE意义下的可估计性定义如下:

定义 1^[12] 系统(3)为可估计的, 当且仅当

$$I(\mathbf{x}(k); \hat{\mathbf{x}}(k)) > 0, \quad \forall k \geq n, \quad (4)$$

式中 $I(\cdot; \cdot)$ 为互信息.

注 1 1) 由文献[14]知, 式(4)等价于

$$H(\mathbf{x}(k)) > H(\tilde{\mathbf{x}}(k)), \quad \forall k \geq n, \quad (5)$$

即系统的后验熵小于先验熵.

2) 由于式(1)为线性高斯的, 所以 $\mathbf{x}(k)$ 的MMEE估计等同于Kalman估计, 即也是LMSE意义下可估计的.

引理 1^[11,12] 系统(1)在MMEE/LMSE意义下是可估计的, 当且仅当 $\forall k \geq n$, 可估计性矩阵

$$\Lambda(k, 0) = \{\Phi_{k,j}L(j), j \leq k\} \quad (6)$$

满秩, 即 $\text{rank}(\Lambda(k, 0)) = n, \forall k \geq n$. 其中: $L(j) = \Gamma(j)C^T$; $\Phi_{k,j} = A(k-1)A(k-2)\dots A(j)$ 为状态转移矩阵.

3.2 访问约束系统的可估计性(Estimability under access constrains)

由第2节的分析知, 输出约束系统可以用式(2)来描述. 由3.1节的分析知, 对于没有约束的系统, 假设系统对于任意起始时刻都是可估计的:

$$\text{rank}(\Phi_{k,j}L(j), j \leq k) = n, \quad \forall k \geq n, \quad (7)$$

在输出约束的情况下, 设 $C_1(j) = M_\sigma(j)C$, 则

$$L_1(j) = \Gamma_j C_1^T(j) = \Gamma_j C^T M_\sigma^T(j) = L(j) M_\sigma^T(j).$$

在输出约束的情况下, 式(6)表示的可估计性判别阵变为

$$\tilde{A}(k, 0) = \{\Phi_{k,j}L(j)M_{\sigma}^T(j), j \leq k\}. \quad (8)$$

注意, 对于每个时刻 j , $\sigma(j)$ 是一个包含 W_m 个 “1” 和 $m - W_m$ 个 “0” 的向量. 因此, 在每个时刻 j , $\Phi_{k,j} \cdot L(j)M_{\sigma}^T(j)$ 相当于从 $\Phi_{k,j}L(j)$ 中选出 W_m 个列.

定理 1 假设 1 描述的系统对于任意起始时刻是可估计的, 并且 A 是可逆的, 那么对于任意的 $1 \leq W_m < m$, 存在一个 $m \rightarrow W_m$ 的通信序列 $\sigma(\cdot)$, 一个整数 $k_f \leq \lceil n/W_m \rceil (n + 1)$, 使得系统 (2) 在 $[0, k_f]$ 内是可估计的.

证 由于原系统是可估计的, 所以当 $k = n$ 时, 系统的可估计式 (7) 是满秩的, 则

$$\begin{aligned} \Lambda(k, 0) &= \Lambda(n, 0) = \\ &[A^n L(0) \ A^{n-1} L(1) \ \cdots \ AL(n-1) \ L(n)], \\ \text{rank}(\Lambda(k, 0)) &= \text{rank}(\Lambda(n, 0)) = n. \end{aligned} \quad (9)$$

当 $k = n + i, i = 1, 2, \dots$ 时,

$$\begin{aligned} \Lambda(k, 0) &= \Lambda(n + i, 0) = \\ &[A^{n+i} L(0) \ A^{n+i-1} L(1) \ \cdots \ A^i L(n) \\ & \ A^{i-1} L(n+1) \ \cdots \ L(n+i)] = \\ &[A^i [A^n L(0) \ A^{n-1} L(1) \ \cdots \ L(n)] \\ & \ A^{i-1} L(n+1) \ \cdots \ L(n+i)] = \\ &[A^i \Lambda(n, 0) \ A^{i-1} L(n+1) \ \cdots \ L(n+i)]. \end{aligned}$$

由式 (9) 知, $\text{rank}(\Lambda(n, 0)) = n$, 又因为 A 是可逆的, 所以 $\text{rank}(A^i \Lambda(n, 0)) = n$, 所以 $\text{rank} \Lambda(n + i, 0) = n$, 因此 A 可逆时, 若可估计判别阵在 $k = n$ 时是满秩的, 则对于任意的 $k \geq n$, 可估计判别阵都是满秩的. 此时, 系统的可估计性判别阵 (7) 变为

$$\text{rank}(\Phi_{k,j}L(j), j \leq k) = n, \exists k \geq n. \quad (10)$$

因为原系统对于任意起始时刻都是可估计的, 所以 $\text{rank}(\Lambda(n, 0)) = n$, 若初始时刻是 $n + 1$, 则

$$\text{rank}(\Lambda(n + 1 + n, n + 1)) = n,$$

同理

$$\begin{aligned} \text{rank}(\Lambda(i(n + 1) + n, i(n + 1))) &= n, \\ i &= 0, 1, 2, \dots, \lceil n/W_m \rceil - 1. \end{aligned} \quad (11)$$

可估计性判别式可以表示为

$$\begin{aligned} \Lambda(i(n + 1) + n, 0) &= \\ &[A^{i(n+1)} \Lambda(n, 0) \ A^{(i-1)(n+1)} \Lambda(n+1+n, n+1) \ \cdots \\ & \ \Lambda(i(n + 1) + n, i(n + 1))], \end{aligned}$$

令

$$\begin{cases} \Lambda_1(n, 0) = A^{i(n+1)} \Lambda(n, 0), \\ \Lambda_1(n + 1 + n, n + 1) = \\ \Lambda^{(i-1)(n+1)} \Lambda(n + 1 + n, n + 1), \\ \vdots \\ \Lambda_1(i(n + 1) + n, i(n + 1)) = \\ \Lambda(i(n + 1) + n, i(n + 1)), \end{cases} \quad (12)$$

则

$$\begin{aligned} \Lambda(i(n + 1) + n, 0) &= \\ &[\Lambda_1(n, 0) \ \Lambda_1(n + 1 + n, n + 1) \ \cdots \\ & \ \Lambda_1(i(n + 1) + n, i(n + 1))]. \end{aligned}$$

由 A 为满秩和式 (11)(12), 得 $\Lambda_1(n, 0), \dots, \Lambda_1(i(n + 1) + n, i(n + 1))$ 均为满秩的.

在系统输出受限时, 由 3.1 节的分析知, 若式 (8) 所表示的访问约束条件下状态可估计判别式满秩, 即存在一个 k_f , 使得 $\text{rank}(\tilde{A}(k_f, 0)) = n$, 则式 (2) 所描述的访问约束系统为状态可估计的.

令

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_1[n, 0] &= \\ &A^{k_f - (n+1)} [\Phi_{n,0} L(0) M_{\sigma}^T(0) \ \Phi_{n,1} L(1) M_{\sigma}^T(1) \\ & \ \cdots \ \Phi_{n,n} L(n) M_{\sigma}^T(n)]. \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_1[i(n + 1) + n, i(n + 1)] &= \\ &A^{k_f - (i+1)(n+1)} \{ \Phi_{i(n+1)+n, i(n+1)} L(i(n+1) + \\ & \ 1) M_{\sigma}^T(i(n+1)), \Phi_{i(n+1)+n, i(n+1)+1} L(i(n+1) + \\ & \ 1) M_{\sigma}^T(i(n+1) + 1), \dots, L(i(n+1) + \\ & \ n) M_{\sigma}^T(i(n+1) + n) \}. \end{aligned} \quad (13)$$

在访问约束条件下, 输出通信序列 $M_{\sigma}(k)$ 从每个 $\Phi_{k_f,k}L(k)$ 中选出 W_m 个列向量. 由于 $\Lambda_1(i(n+1) + n, i(n+1))$ 的秩为 n , 令 $r_i^0, r_i^1, \dots, r_i^{n-1}$ 为 $\Lambda_1(i(n+1) + n, i(n+1))$ 中任意 n 个线性独立的向量, 并且令 $R_i = (r_i^0, r_i^1, \dots, r_i^{n-1})$, 考虑如下的算法:

1) 令 $R = R_0$;

2) 从 R_1 中选 W_m 列来替换 R 中的 $(r_0^{W_m}, r_0^{W_m+1}, \dots, r_0^{W_m+W_m-1})$, 并且保持 $\text{rank}(R) = n$, 这样一个替换是肯定存在的, 因为 $\text{rank}(R_1) = n$;

3) 依次从 R_i 中选出 W_m 列来替换 R 中的 $(r_0^{iW_m}, r_0^{iW_m+1}, \dots, r_0^{iW_m+W_m-1})$, 并且保持 $\text{rank}(R) = n, i = 2, 3, \dots, \lceil n/W_m \rceil - 1$.

那么, R 包含每个 R_i 中的 W_m 列, 并且 $\text{rank}(R) = n$. 以上算法保证从每个 R_i 中选择 W_m 列, 可以选出 n 个线性独立的列向量. 但是在式 (13) 中, 输出通信序列 $M_{\sigma}(k)$ 从每个 $\Phi_{k_f,k}L(k)$ 中选出 W_m 个列向量, 而 $M_{\sigma}(\cdot)$ 实际上从每个 $\Lambda_1((i(n+1) + n, i(n+1)))$ 中选择 $W_m \times (n + 1)$ 个列向量. 所以肯定存在一个通信序列 $\sigma(\cdot)$, 可以在 $\lceil n/W_m \rceil (n + 1)$ 步内选出 n 个线性独立的列向量, 即当 $i = \lceil n/W_m \rceil - 1$ 时, 访问约束情况下的可估计性判别式

$$\begin{aligned} \tilde{A}(i(n + 1) + n, 0) &= \\ &[\tilde{\Lambda}_1(n, 0) \ \cdots \ \tilde{\Lambda}_1(i(n + 1) + n, i(n + 1))] \end{aligned}$$

满秩, 所以存在一个通信策略, 使得约束后的系统是可估计的. 证毕.

4 访问约束系统的可估计性和可观测性之间的关系(The relationship between estimability and observability under access constraints)

确定性系统的可观测性在现代控制理论中已经很成熟, Kam等^[15]从信息理论的角度对它进行了研究.

考虑一个线性定常系统

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k), \end{cases} \quad (14)$$

其中: $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^m, k = 1, 2, \dots, A, B, C$ 为具有相应维数的定常矩阵, $\mathbf{w}(k), \mathbf{v}(k)$ 为相互独立的随机序列, 且与 $\mathbf{x}(0)$ 相互独立, $E\{\mathbf{w}(k)\} = 0, E\{\mathbf{v}(k)\} = 0$. 相应于系统(14)的定常系统为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \\ \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k). \end{cases} \quad (15)$$

设系统(14)(15)的所有可能初始状态向量 $\mathbf{x}(0)$ 具有相同的有限支持集 X_0 , 即 $\mathbf{x}(0) \in X_0$, 记

$$\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ \dots \ x_n(0)]^T.$$

根据熵的定义, 则 $H(\mathbf{x}(0)) = H(X_0)$. 并设系统(14)(15)具有离散初始状态, 即每一个 $\mathbf{x}_i(0) \in X_0 (i = 1, 2, \dots, n)$ 随机地取值于一个有限的集合 F_i , 并在每一个 F_i 上定义一个概率测度. 从一般意义上考虑, $x_i(0)$ 的概率特性是未知的. 为此, 采用Jaynes等的“最大熵”原则, 设所定义的 $x_i(0)$ 的概率分布使得 $x_i(0)$ 的熵最大. 也就是说, 在缺乏先验信息的情况下, 本文“最无偏见地”假定 $x_i(0)$ 取值的不确定性最大, 设

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{y}(0)^T \ \mathbf{y}(1)^T \ \dots \ \mathbf{y}(n-1)^T]^T. \quad (16)$$

引理 2^[15] \mathbf{Y} 中包含了所有反映在无限长观测序列 $\mathbf{y}(i) (i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n, \dots)$ 中关于 $\mathbf{x}(0)$ 的信息

$$H([\mathbf{y}(0) \ \mathbf{y}(1) \ \dots \ \mathbf{y}(n-1) \ \dots]^T) = H(\mathbf{Y}). \quad (17)$$

对于系统(15), 当 $m = 1$ 即系统为单输出系统时, Kam等^[15]给出了可观测性的定理.

引理 3^[15] 具有取值于 X_0 的离散初始状态的单输出系统(15)($m = 1$), 系统为可观测的当且仅当

$$H(X_0) = H(\mathbf{Y}), \quad (18)$$

即包含在 \mathbf{Y} 中的信息等于包含在 $\mathbf{x}(0)$ 中的信息.

由第2节的分析知, 式(14)(15)在访问约束情况下的描述为:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{w}(k), \\ \tilde{\mathbf{y}}(k) = M_\sigma(k)C\mathbf{x}(k) + M_\sigma(k)\mathbf{v}(k), \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k), \\ \tilde{\mathbf{y}}'(k) = M_\sigma(k)C\mathbf{x}(k). \end{cases} \quad (20)$$

令: $\tilde{\mathbf{Y}}' = [\tilde{\mathbf{y}}'(0)^T \ \tilde{\mathbf{y}}'(1)^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{y}}'(k_f-1)^T]^T, k_f \leq [n/W_m]n$.

假设 $\tilde{\mathbf{Y}}'$ 中包含了所有反映在无限长观测序列 $\tilde{\mathbf{y}}'(i) (i = 0, 1, 2, \dots)$ 中关于 $\mathbf{x}(0)$ 的信息

$$H([\tilde{\mathbf{y}}'(0)^T, \tilde{\mathbf{y}}'(1)^T, \dots, \tilde{\mathbf{y}}'(k_f-1)^T, \dots]) = H(\tilde{\mathbf{Y}}').$$

文献[10]已经证明, 在静态通信策略下, 存在一个通信序列, 使得访问约束系统仍然是可观测的, 下面给出该结论在信息理论意义上的描述:

定理 2 在访问约束情况下, 存在一个通信序列, 使得取值于 X_0 的离散初始状态的系统(20)是可观测的, 当且仅当

$$H(X_0) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'). \quad (21)$$

证 对于系统(20), 根据第2节的分析, 在访问约束情况下, 系统的运动方程为

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{Y}}' = & [M_\sigma(0)C \ M_\sigma(1)CA \ \dots \ M_\sigma(k_f-1)CA^{k_f-1}]^T \mathbf{x}(0). \end{aligned}$$

令

$$Q_c = [M_\sigma(0)C \ M_\sigma(1)CA \ \dots \ M_\sigma(k_f-1)CA^{k_f-1}]^T,$$

则 $\tilde{\mathbf{Y}}' = Q_c \mathbf{x}(0)$.

必要性. 文献[10]已经证明, 在静态通信策略下, 存在一个通信策略 $\sigma(\cdot)$, 使得访问约束系统在 $[0, k_f]$ 内是可观测的, 其中 $k_f \leq [n/W_m]n$, 即 $\text{rank}(Q_c) = n$.

从 Q_c 中选出相互独立的 n 行, 组成一个新的矩阵

$$Q'_c = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n]^T.$$

令 $\tilde{\mathbf{Y}}_1 = Q'_c \mathbf{x}(0)$, $\tilde{\mathbf{Y}}'$ 中的其他值为 $\tilde{\mathbf{Y}}_2$, 则 $\tilde{\mathbf{Y}}^* = [\tilde{\mathbf{Y}}_1 \ \tilde{\mathbf{Y}}_2]^T$. 由联合熵的性质得

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}^*) = H(\tilde{\mathbf{Y}}_1) + H(\tilde{\mathbf{Y}}_2/\tilde{\mathbf{Y}}_1) \geq H(\tilde{\mathbf{Y}}_1). \quad (22)$$

又因为 $\tilde{\mathbf{Y}}'$ 和 $\tilde{\mathbf{Y}}^*$ 含有相同的随机变量, 所以 $H(\tilde{\mathbf{Y}}') = H(\tilde{\mathbf{Y}}^*)$, 结合式(22)得

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}') \geq H(\tilde{\mathbf{Y}}_1). \quad (23)$$

又因为 $\tilde{\mathbf{Y}}_1 = Q'_c \mathbf{x}(0)$, $\text{rank}(Q'_c) = n$, 由熵的以下性质: 对于一个离散随机变量 z 和其函数 $f(z)$, 有 $H(z) \geq H(f(z))$, 当且仅当 $f(\cdot)$ 具有单值逆时等号成立. 所以

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}_1) = H(\mathbf{x}(0)) = H(X_0). \quad (24)$$

由式(23)(24)得

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}') \geq H(X_0). \quad (25)$$

又因为 $\tilde{\mathbf{Y}}' = Q_c \mathbf{x}(0)$, 所以

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}') \leq H(\mathbf{x}(0)) = H(X_0). \quad (26)$$

由式(25)(26)得 $H(\tilde{\mathbf{Y}}') = H(X_0)$.

充分性. 如果存在一个通信策略, 使得

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}') = H(X_0). \quad (27)$$

反证法: 假设

$$\text{rank}(Q_c) = r < n, \quad (28)$$

那么在 \mathbf{Y} 中找不到 n 个相互独立的行向量, 只能找到 r 个相互独立的行向量, 再找 $n - r$ 个行向量组成 Q'_c , 令 $\tilde{\mathbf{Y}}_1 = Q'_c \mathbf{x}(0)$, 因为 $\text{rank}(Q'_c) = r < n$, 所以

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}_1) < H(\mathbf{x}(0)) = H(X_0). \quad (29)$$

由于 $\text{rank}(Q_c) = r < n$, 所以 Q_c 中的其他行向量能用 r 行线性独立的行向量线性表示, 所以 $\tilde{\mathbf{Y}}'$ 能用 $\tilde{\mathbf{Y}}_1$ 线性表示, 即 $\tilde{\mathbf{Y}}' = f(\tilde{\mathbf{Y}}_1)$, 所以

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}') \leq H(\tilde{\mathbf{Y}}_1), \quad (30)$$

由式(29)(30)得 $H(\tilde{\mathbf{Y}}') < H(X_0)$, 与式(27)矛盾, 所以式(28)的假设不成立, 所以 $\text{rank}(Q_c) = n$. 系统为能观的. 证毕.

利用定理2和文献[12]本文可以得出可估计性和可观测性之间的关系, 先给出结论:

定理3 若 $\text{rank}(A) = n$, 则系统(19)是可估计的, 当且仅当系统(20)是可观测的.

证 记系统(19)的状态为 $\mathbf{x}(k)$, 相应的输出观测序列为 $\tilde{\mathbf{Y}}_k = [\tilde{\mathbf{y}}(0)^T \ \tilde{\mathbf{y}}(1)^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{y}}(k)^T]^T$; 记系统(20)的状态向量为 $\mathbf{x}'(k)$, 其相应的输出观测序列为

$$\tilde{\mathbf{Y}}'_k = [\tilde{\mathbf{y}}'(0)^T \ \tilde{\mathbf{y}}'(1)^T \ \dots \ \tilde{\mathbf{y}}'(k)^T]^T.$$

充分性. 设存在一个通信序列, 使得系统(20)为可观测的, 由定理2得

$$H(X_0) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k), \ \forall k \geq k_f, \ k_f \leq [n/W_m] n.$$

由于 $\text{rank}(A) = n$, 即 A 是非奇异的, 所以

$$H(\mathbf{x}'(k)) = H(X_0) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k). \quad (31)$$

而

$$H(\mathbf{x}(k)) \geq H(\mathbf{x}'(k)), \quad (32)$$

所以, 由信息论知识

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}(k); \tilde{\mathbf{Y}}_k) &\geq I(X_0; \tilde{\mathbf{Y}}_k) = I(\tilde{\mathbf{Y}}'_k; \tilde{\mathbf{Y}}_k) = \\ &H(\tilde{\mathbf{Y}}_k) - H(\tilde{\mathbf{Y}}_k | \tilde{\mathbf{Y}}'_k). \end{aligned} \quad (33)$$

由于 $\tilde{\mathbf{Y}}_k$ 和 $\tilde{\mathbf{Y}}'_k$ 不是相互独立的, 由熵的性质知

$$H(\tilde{\mathbf{Y}}_k) > H(\tilde{\mathbf{Y}}_k | \tilde{\mathbf{Y}}'_k).$$

因而, 当 $H(X_0) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k)$ 时, 有 $I(\mathbf{x}(k); \tilde{\mathbf{Y}}_k) > 0$, 即系统(20)是可估计的.

必要性. 当系统(19)可估计时, 即当 $I(\mathbf{x}(k); \tilde{\mathbf{Y}}_k) > 0$ 时, 根据信息理论有

$$I(\mathbf{x}'(k); \tilde{\mathbf{Y}}'_k) \geq I(\mathbf{x}(k); \tilde{\mathbf{Y}}_k) > 0. \quad (34)$$

对于无噪声系统(20), 存在 $\mathbf{x}'(k)$ 的在已知下的最优估计 $\hat{\mathbf{x}}'(k)$. 由于没有测量噪声, 这一估计精确地等于状态本身^[16], 即 $m\hat{\mathbf{x}}'(k) = \mathbf{x}'(k)$. 所以有

$$\begin{aligned} I(\mathbf{x}'(k); \tilde{\mathbf{Y}}'_k) &= I(\mathbf{x}'(k); \hat{\mathbf{x}}'(0)) = \\ &I(\mathbf{x}'(k); \mathbf{x}'(k)) = H(\mathbf{x}'(k)). \end{aligned}$$

由于 $\text{rank}(A) = n$, 所以

$$I(X_0; \tilde{\mathbf{Y}}'_k) = I(\mathbf{x}'(k); \tilde{\mathbf{Y}}'_k) = H(\mathbf{x}'(k)) = H(X_0). \quad (35)$$

而 $I(X_0; \tilde{\mathbf{Y}}'_k) = H(X_0) - H(X_0 | \tilde{\mathbf{Y}}'_k)$, 所以

$$H(X_0 | \tilde{\mathbf{Y}}'_k) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k | X_0) = 0.$$

因而有

$$I(X_0; \tilde{\mathbf{Y}}'_k) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k) - H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k | X_0) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k). \quad (36)$$

由式(35)(36)可知, 当 $I(\mathbf{x}(k); \tilde{\mathbf{Y}}_k) > 0$ 时, $H(X_0) = H(\tilde{\mathbf{Y}}'_k)$. 证毕.

5 仿真(Simulation)

仿真1 以文献[17]中造纸机网前部的线性稳定对象为例进行仿真.

成纸定量和水分是造纸机控制系统中两个最重要的品质指标, 而超薄型电容器纸生产中无法测量定量, 必须估计.

定量由网前部浆门控制. 网前部是一个多罐系统, 为简化, 等效成一个单罐系统, 如图1所示. 来自网下的白水和中浓浆混合, 配成低浓浆, 在网前箱以接近网速的流速上铜网. 成纸定量取决于上网浆量和浓度. 网前部实际已决定了成纸定量(绝干定量).

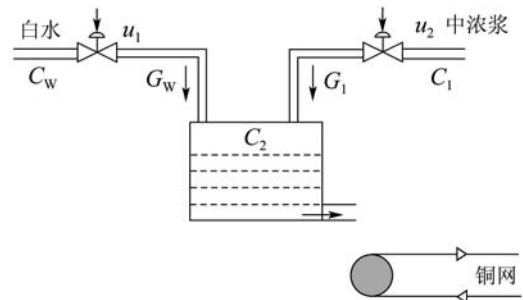


图1 造纸机网前部原理图

Fig. 1 The system of the headbox of paper machine

记 C_1, C_2, C_w 和 $H(k)$ 分别为中浓浆、低浓浆、白水浓度和网前箱液位; G_1, G_w 分别是中浓浆和白水的流量; u_1 和 u_2 分别为浆门和白水阀的开度; B_w 表示成纸定量.

定义状态变量, 输出变量和控制变量分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= [G_1(k) \ G_2(k) \ C_2(k)]^T, \\ \mathbf{y}(k) &= [G_1(k) \ H(k) \ C_2(k)]^T, \\ \mathbf{u}(k) &= [u_1(k-1) \ u_2(k-1)]^T, \end{aligned}$$

输入变量 $u_1(k) = 1, u_2(k) = 1$. 输入噪声 $\mathbf{w}(k)$ 、测量噪声 $\mathbf{v}(k)$ 和状态初值 $\mathbf{x}(0)$ 是互不相关的零均值高斯白噪声序列, 其方差分别为:

$$\begin{aligned} Q(k) &= \text{diag}\{0.4, 0.4, 0.4\}, \\ R(k) &= \text{diag}\{0.3, 0.3, 0.3\}, \\ P(0) &= \text{diag}\{0.8, 0.8, 0.8\}, \end{aligned}$$

则文献[17]得出的造纸机网前部数学模型为

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.6970 & 0 & 0 \\ 1 & 0.8667 & 0 \\ 0.1575 & -0.05033 & 0.9099 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} -0.03443 & 0 \\ 0 & -0.6877 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(k) + w(k), \\ y(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1.58 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + v(k). \end{cases} \quad (37)$$

接入约束条件1: 输出端到估计器的传输通道同时只能传输一个信号, 即 $W_m = 1$. 选择1个周期为3的通信序列

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots \right\}.$$

接入约束条件2: 输出端到估计器的传输通道同时传输两个信号, 即 $W_m = 2$. 选择1个周期为3的通信序列

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \dots \right\}.$$

按照第2节所描述的方法, 在访问约束条件下, 将系统(37)描述成式(2)的形式, 然后用Kalman滤波估计出参数的值. 图2~4分别表示没有接入约束, 接入约束条件1和接入约束条件2情况下状态的真实值和估计值, 其中实线表示实际值, 点线表示估计值; 图5表示没有接入约束、接入约束条件1和接入约束条件2这三种情况下状态的先验误差熵和后验误差熵变化曲线, 其中实线代表先验误差熵, 点划线表示没有接入约束时的后验误差熵, 点线代表在接入约束条件1情况下的后验误差熵, 虚线代表在接入约束条件2时的后验误差熵.

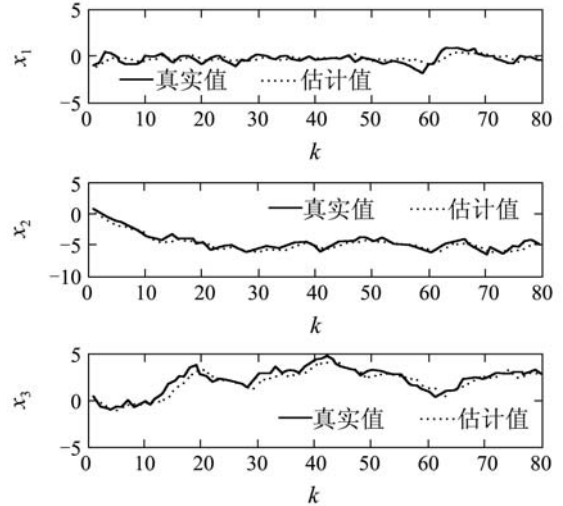


图2 没有访问约束时系统状态的真实值和估计值
Fig. 2 The actual value and estimated value of states without access constraints

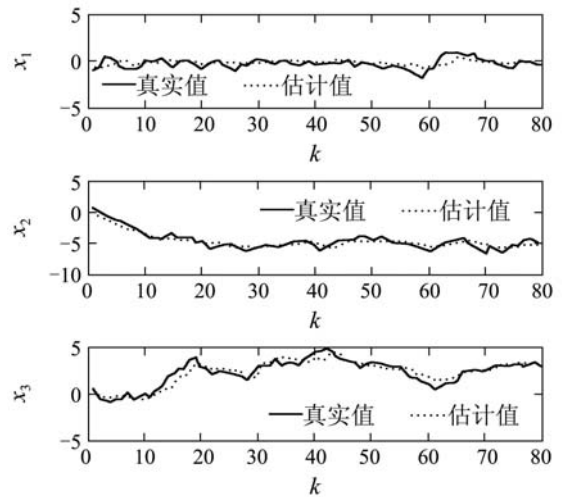


图3 访问约束条件1情况下系统状态的真实值和估计值
Fig. 3 The actual value and estimated value of states on the access constraint 1

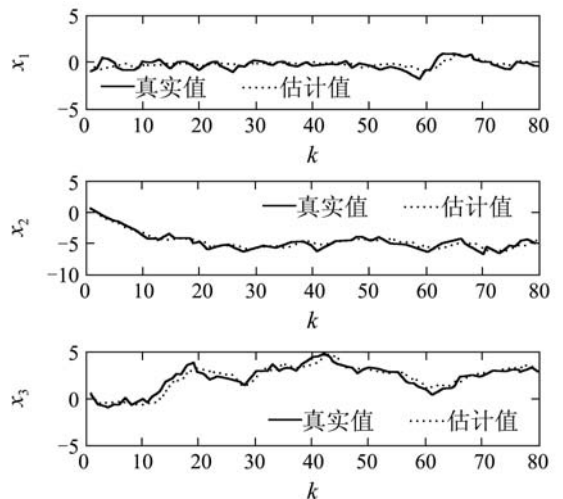


图4 访问约束条件2情况下系统状态的真实值和估计值
Fig. 4 The actual value and estimated value of states on the access constraint 2

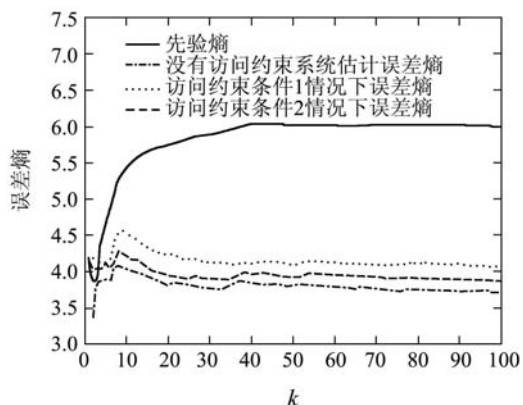


图 5 误差熵曲线

Fig. 5 Error entropy

从图2~图4的对比曲线可以看出, 在系统访问约束时, 存在合理的通信策略, 使得访问约束系统仍然是可估计的. 从图3和图4的曲线可以看出, 不管在访问约束条件1还是条件2下, 均存在合理的通信策略, 使得Kalman滤波器能够实时的估计出状态的变化值. 从图5的误差熵曲线可以看出, 在访问约束条件1情况下, $W_m = 1$, $\lceil n/W_m \rceil (n + 1) = 12$, 当 $k \geq 5$ 时, 系统的后验熵小于先验熵, 即 $k_f = 5 < 12$, 满足访问约束情况下的可估计判别式(5), 即系统是5步内可估计的; 在访问受限条件2情况下, $W_m = 2$, $\lceil n/W_m \rceil (n + 1) = 8$, 当 $k \geq 4$ 时, 系统的后验熵小于先验熵, 即 $k_f = 4 < 8$, 满足访问约束情况下的可估计判别式(5), 即系统是4步内可估计的; 对于没有访问约束的情况, 根据可估计性判别式(5), 对于任意的 $k \geq 3$, 系统的后验熵均小于先验熵, 满足可估计性判别定理, 即系统是可估计的.

从以上仿真结果可以看出, 在访问约束情况下, 存在合理的通信序列, 使得访问约束后的系统是可估计的.

仿真 2 采用文献[10]中所用的两输入两输出的线性离散不稳定系统, 加上输入噪声 $w(k)$ 和测量噪声 $v(k)$, 系统的描述为

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11}{4} & 0 & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k) + \mathbf{w}(k), \\ \mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \mathbf{v}(k). \end{cases} \quad (38)$$

该系统的特征值为: 0.33, 1, 2.67, 0.33, 为不稳定系统. 仿真中假定输入噪声 $w(k)$, 测量噪声 $v(k)$ 状态初值 $x(0)$ 是互不相关的零均值高斯白噪声序列, 其方差分别为 $Q(k) = \text{diag}\{0.81, 0.81, 0.81\}$, $R(k) = \text{diag}\{0.64, 0.64, 0.64\}$, $P(0) = \text{diag}\{0.8, 0.8, 0.8\}$. 输入变量 $u(k) = [1 \ 1]^T$. 输出端到估计器的传输通道同时只能传输一个信号, 即 $W_m = 1$. 选择一个周期为2的通信序列

$$\{\sigma(0), \sigma(1), \dots\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \dots \right\},$$

系统估计误差的熵曲线如图6所示, 其中实线表示先验熵, 虚线表示没有访问约束情况下的后验熵, 点线表示访问约束情况下的后验熵.

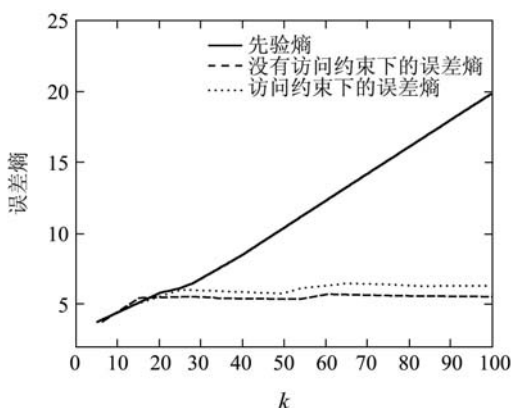


图 6 误差熵曲线

Fig. 6 Error entropy

当 $W_m = 1$ 时, $\lceil n/W_m \rceil (n + 1) = 20$, 从图6可以看出, 当 $k \geq 6$ 时, 系统的后验熵小于先验熵, 即 $k_f = 6 < 20$, 满足可估计性条件, 即访问约束系统是可估计的.

从仿真1和仿真2可以看出, 如果没有访问受限系统为可估计的, 那么不管系统是否稳定, 均存在一个通信序列, 使得访问约束的系统也为可估计的.

6 结论(Conclusion)

本文针对检测信号传输过程中存在通讯访问约束的系统, 研究了系统的状态可估计性问题以及可估计性与能观性之间的关系. 解析分析和仿真结果都表明, 在静态通信策略下, 存在合理的通信序列, 使得访问约束的系统可以保持其状态可估计性. 根据以上讨论的可估计性和能观性之间的关系, 本文可以用现代控制理论中一些很成熟的方法来解决随机系统的估计问题.

参考文献(References):

[1] ZHANG Y, ZHONG Q, WEI L. Stability analysis of networked control systems with transmission delays[C] // *Proceedings of 2008 Chinese Control and Decision Conference*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2008, 7: 340 - 343.

- [2] SINSUKE O, URANO Y, MATSUNO F. The control of constrained system with time-delay and its experimental evaluations using RC model helicopter[C] // *Proceedings of 2007 International Conference on Control, Automation and Systems*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2007, 10: 2897 – 2901.
- [3] HRISTU-VARSAKELIS D, KUMAR P R. Interrupt-based feedback control over a shared communication medium[C] // *Proceeding of the 41st IEEE Conference on Design and Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2002, 10: 3223 – 3228.
- [4] HRISTU-VARSAKELIS D, ZHANG L. LQG control of networked control systems with access constrains and delays[J]. *International Journal of Control*, 2008, 81(8): 1266 – 1280.
- [5] IONETE C, CELA A. Structural properties and stabilization of NCS with medium access constraints[C] // *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2006, 10: 1141 – 1146.
- [6] LU L L, XIE L H, FU M Y. Optimal control of networked systems with limited communication: a combined heuristic and convex optimization approach[C] // *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Design and Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2003, 10: 1194 – 1199.
- [7] RENBINDER H, SANFRIDSON M. Scheduling of a limited communication channel for optimal control[C] // *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Design and Control*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2000, 10: 1011 – 1066.
- [8] WANG Y L, LING X, GUI W H. LQG optimal control of networked control systems with limited communication channels[C] // *Proceedings of the 2009 Chinese Control and Decision Conference*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009, 6: 1574 – 1579.
- [9] ZHANG L, HRISTU-VARSAKELIS D. LQG control under limited communication[C] // *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2005, 10: 185 – 190.
- [10] ZHANG L, HRISTU-VARSAKELIS D. Stabilization of networked control systems: designing effective communication sequences[R] // *Proceedings of the 16st International Federation Automatic Control World Congress*. Research Triangle Park, NC: Army Research Office, 2005, 0704-0188.
- [11] BARAM Y, KAILATH T. Estimability and regulability of linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(12): 1116 – 1121.
- [12] 章辉, 孙优贤. 随机系统的可估计性-信息理论方法[J]. *控制理论与应用*, 1996, 13(5): 567 – 572.
(ZHANG Hui, SUN Youxian. Estimability of stochastic system-an information theory approach[J]. *Control Theory & Applications*, 1996, 13(5): 567 – 572.)
- [13] JAYNES E T. Information theory and statistical mechanics[J]. *Physical Review*, 1957, 106(4): 620 – 630.
- [14] ZHANG H. *Information descriptions and approaches s in control system*[D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2003.
- [15] KAM M, CHENG R, KALATA P. An information-theoretic interpretation of stability and observability[C] // *Proceedings of American Control Conference*, Piscataway, NJ, USA: IEEE, 1987, 6: 1957 – 1962.
- [16] BYRNES C I, ENQVIST P, Lindquist A. Identifiability and well-posedness of shaping-filter parameterization: a global analysis approach[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2002, 41(1): 23 – 59.
- [17] SUN Y X. *The Modeling and Control of the Process of Papermaking*[M]. Hangzhou: The Publishing House of Zhejiang University, 1993.

作者简介:

王丽娟 (1986—), 女, 研究方向为通讯访问约束控制系统, E-mail: ljwang@iipc.zju.edu.cn;

章辉 (1967—), 男, 副教授, 研究方向为通讯约束控制系统、控制系统的信息论方法等, E-mail: zhanghui@iipc.zju.edu.cn, 通讯作者.