

## 随机非线性动态系统数值模拟与性态分析

彭云建, 程培, 邓飞其

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 针对具有随机参数非线性系统和随机非线性系统的数值模拟与性态分析问题, 提出将蒙特卡罗模拟方法与数值积分法相结合, 建立了迭代积分算法求取随机非线性系统在不同随机序列作用下的数值解集, 分析了计算误差. 其次, 利用数值解集的样本值进行解过程性态分析, 建立了系统状态的概率分布、均方和矩函数的数值计算公式, 实现了该类系统数值模拟分析的完整算法和程序流程设计. 最后, 通过两类典型示例系统的数值仿真结果验证本文算法与流程的正确性和有效性.

**关键词:** 随机非线性动态系统; 数值模拟; 性态分析

**中图分类号:** TP202      **文献标识码:** A

## Numerical simulation and behavior analysis of stochastic nonlinear dynamic systems

PENG Yun-jian, CHENG Pei, DENG Fei-qi

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

**Abstract:** This paper investigates the numerical simulation and behavior of nonlinear dynamic systems with random parameters or state-dependent noise, and proposes an iterative integral formula to calculate the numerical solutions set of stochastic nonlinear dynamic systems(SNDSs) based on Monte-Carlo simulation scheme and numerical integration method. The evaluation of the algorithm errors is also presented. For analyzing the behavior of SNDSs with sample solutions from the solutions set, we put forward several formulas to calculate the probability distribution of system states, mean-square values and moment function values of SNDSs, by which an integrated simulation algorithm and programming flow are designed for SNDSs. Simulation results of two typical systems are discussed to validate the presented scheme and the programming flow.

**Key words:** stochastic nonlinear dynamic systems; numerical simulation; behavior analysis

### 1 引言(Introduction)

以随机微分方程和随机分析为基础的随机非线性动态系统理论考虑了自然、社会与工业系统中普遍存在的非线性、随机不确定性因素的影响, 探讨系统的演变规律, 内容涵盖了系统建模、求解动态过程、稳定性分析与镇定控制、随机最优控制与性能分析等<sup>[1]</sup>. 近年来, 随着随机动态系统理论越来越广泛地应用于系统科学、工程控制、生态学等各个方面, 对随机微分系统模型及其解过程性态分析的研究受到了学术界广泛关注. 数值模拟分析方法是研究随机非线性系统模型的基本方法之一, 为验证系统模型的正确性、检验随机控制系统性能以及理论分析结果等方面提供有效的仿真试验手段. 随机微分方程(stochastic differential equations, SDE)的数值解法是实现随机系统数值模拟分析的核心问题. 对于常微分系统、偏微分系统等, 已经建

立了很多经典的数值解方法, 如Euler, Runge-Kutta, Adams-Bashforth-Moulton PECE等<sup>[2]</sup>. 对于SDE的数值解问题, 近年来也有很多研究成果. 文献[3]系统地探讨了Itô型随机微分方程的数值解问题, 基于微分方程数值解的基本思想和Itô微分公式, 提出了随机Taylor展开式与随机Runge-Kutta格式等实现SDE的离散时间随机逼近, 得到了几类SDE数值解的基本格式. 文献[4]建立了Itô型随机线性系统一类数值解方法——差分格式法, 给出了相应的计算格式. 文献[5]建立了10个MATLAB仿真程序, 说明随机积分、Euler-Maruyama和Milstein方法等实现问题, 提出了具体的解决方法, 用仿真结果验证SDE数值解方法中一些收敛性条件等. 文献[6, 7]则分别研究了中立型随机泛函微分方程和具有马尔可夫切换与Levy白噪声的随机微分方程数值解问题, 基于Euler-Maruyama方法给出了不同条件下数值解计

算格式和误差收敛条件. 这些成果建立了不同类型的随机微分方程数值解方法, 但是利用这些理论方法实现随机系统模拟仿真时仍存在问题. 譬如, SDE数值解法对模型的依赖性强, 理论约束条件多, 数值解的格式复杂且对应具体类型的随机过程, 因此, 不易建立通用程序算法和流程. 其次, 随机系统解过程的数值模拟结果不仅由SDE数值解法决定, 而且受到系统随机扰动模拟方法的影响, 不同随机扰动序列必然导致不同的数值模拟结果, 如何根据系统的解集从随机分析角度来评估系统性态变化, 需要进一步的工作. 目前在MATLAB等著名计算仿真软件中仍没有解决此类问题的专用仿真工具. 基于此, 本文在对随机微分系统模型进行合理假设与算法简化的基础上提出了一类随机非线性系统数值模拟分析方法和完整程序流程, 对随机非线性系统模型具有通用性.

本文首先基于蒙特卡罗模拟方法和数值积分方法, 选择合适类型的随机序列来模拟系统参数和状态量随机扰动的变化过程, 建立了相应的迭代积分公式求取系统数值解, 分析了数值仿真计算误差, 确立了由数值解集样本进行随机分析的数值计算公式. 其次, 设计了完整的数值仿真程序流程. 最后, 编程实现了随机非线性系统数值仿真过程, 对两类典型系统进行了数值仿真, 仿真结果验证了本文方法的正确性, 探讨了随机扰动序列对系统解过程性态的影响.

## 2 问题描述(Problem descriptions)

考虑如下两类随机非线性系统:

### 1) 含随机参数的非线性系统.

设非线性系统存在的某些随机不确定性因素, 可以用某一个或一组随机参数来描述, 其数学模型为

$$\dot{x} = f(x(t), t; \alpha). \quad (1)$$

式中: 状态向量  $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \cdots \ x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ , 参数  $\alpha \in \mathbb{R}^p$  为  $p$  个随机参数组成的向量, 每个参数均为某一类随机过程,  $f(x(t), t; \alpha) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$  关于  $x(t)$  满足对  $t, \alpha$  一致局部Lipschitz条件和线性增长条件, 且  $f(0, t; \alpha) = 0$ .

相应地, 具有输入输出和多项随机参数的非线性系统, 用如下微分方程描述:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x(t), t; \alpha) + g(x(t), t; \beta)u(t), \\ y(t) = h(x(t), t; \theta). \end{cases} \quad (2)$$

式中: 输入向量  $u(t) = [u_1(t) \ u_2(t) \ \cdots \ u_m(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ , 输出向量  $y(t) \in \mathbb{R}^q$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^r$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^\lambda$  分别是输入系数函数  $g(x(t), t; \beta) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$  和输出函数  $h(x(t), t; \theta) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^q$  的随机参数,  $g(x(t), t; \beta)$  关于  $x(t)$  满足对  $t, \beta$  一致局部Lipschitz条

件和线性增长条件, 且  $f(0, t; \alpha) = 0$ .

微分方程(1)和(2)描述的系统, 其状态变化除了受到系统固有的演变规律、输入等因素的制约, 而且还受到参数随机变化的影响, 包括参数固有的随机不确定性或建模时预估参数的随机不确定性. 参数的随机变化导致了系统运行规律和输入量对系统的作用、输出量等发生变化, 从而改变了整个系统模型的性态表现.

### 2) 随机非线性系统.

很多实际系统所受到的噪声干扰都可以近似看成是具有平稳独立增量的零均值高斯过程. 因此, 考虑Itô型微分方程描述的随机非线性系统:

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + \zeta(x(t), t)W(t). \quad (3)$$

式中, 随机扰动向量  $W(t) = [W_1(t) \ W_2(t) \ \cdots \ W_p(t)] \in \mathbb{R}^p$  为定义在完备概率空间  $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, \mathcal{P})$  上的  $p$  维Brownian运动. 漂移函数  $f(x(t), t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^n$ , 扩散系数函数  $\zeta(x(t), t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^{n \times p}$ , 二者关于变量  $x(t)$  满足局部Lipschitz条件和线性增长条件, 且  $f(0, t) = \zeta(0, t) = 0$ .

相应地, 具有输入输出的随机非线性系统, 用如下微分方程描述:

$$\begin{cases} dx = f(x(t), t; \alpha) + g(x(t), t; \beta)u(t) + \\ \quad \zeta(x(t), t)dW(t), \\ y(t) = h(x(t), t; \theta) + \rho(x(t), t)V(t). \end{cases} \quad (4)$$

式中: 输入系数函数  $g(x(t), t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^{n \times m}$  关于变量  $x(t)$  满足局部Lipschitz条件和线性增长条件, 且  $g(0, t) = 0$ . 输出随机扰动项  $V(t) \in \mathbb{R}^\gamma$  为任意随机过程, 扰动系数函数  $\rho(x(t), t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}^{n \times \gamma}$ .

微分方程(3)与(4)描述的动态系统, 其状态变化由系统固有的演变规律、输入量和随机扰动导致的状态扰动共同决定. 模型准确刻画了存在随机扰动因素的实际系统行为. 譬如, 一个受控随机振荡的电路, 电流和电压的变化遵循物理规律, 由电路结构、元件参数和控制电源等决定, 又受到元件参数的漂移、噪声电量干扰等影响.

对于微分方程(1)(2)和(3)(4), 虽然在理论上已经建立了其解的存在性与唯一性条件, 但是一般难以得到微分系统的解析解<sup>[1,3]</sup>. 当给定系统初始参数或初始状态值时, 如何选择随机序列和扰动方式模拟参数和状态量的随机扰动, 采用合适数值积分方法求取系统的数值解, 是数值模拟分析需要解决的基本问题. 该问题可以表述为: 对随机微分系统(1)和(3), 设数值仿真时间为  $[t_0, t_f]$ , 初始值为  $x(t_0)$ , 选择随机变量和随机过程模拟方法<sup>[3]</sup>产生随机参数序列  $\{\alpha_{\hat{t}_i}\}$  或随机扰动序列  $\{W(\hat{t}_i)\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ ,  $\hat{t}_m = t_f$ , 如何求解随机系统数值解  $x(t_0), \dots,$

$x(t_j), \dots, x(t_f), j = 1, 2, \dots, K, t_K = t_f, M \leq K$ . 其中 $\hat{t}_i$ 是随机序列作用时刻, 时间间隔 $\Delta\hat{t}_i = \hat{t}_i - \hat{t}_{i-1}$ 为固定值或随机变量,  $t_j \in [t_0, t_f]$ 是数值积分时间网格, 积分时间步长 $h_j = t_{j+1} - t_j$ 和步数 $K$ 由数值计算精度决定. 两种时间网格划分值的集合满足 $\{\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_i, \dots, \hat{t}_M\} \subset \{t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_K\}$ .

其次, 在随机分析理论中, 以随机微分系统解集的概率分布、均方或矩分析等为基础, 由此有如下数值计算问题: 基于蒙特卡罗模拟方法, 产生 $N$ 组随机参数序列或状态扰动序列, 利用数值解法求得给定初始状态值下 $N$ 组数值解 $\{x^n(t_0), \dots, x^n(t_j), \dots, x^n(t_f)\}, n = 1, 2, \dots, N$ 形成一个样本解集. 若定义解集在 $t_j$ 时刻的随机变量为 $X(t_j), j = 0, 1, 2, \dots, K$ , 如何计算解集的概率分布 $P\{X(t_j) = \sigma\}$ 或 $P\{X(t_j) \leq \sigma\} (\sigma \in [X^1(t_j), X^2(t_j), \dots, X^N(t_j)])$ 、均方 $E\|X(t_j)\|^2$ 或 $p$ 阶矩 $E\|X(t_j)\|^p$ 等.

对于随机系统而言, 系统初始参数或状态值相同, 选择不同的随机序列和扰动方式, 其解过程的数值模拟结果也不相同. 因此, 不能够直接套用常微分系统的数值仿真方法, 或者将对应的常微分系统数值解叠加一组随机序列来表示随机微分系统的数值解, 二者都不能反映系统在随机扰动下随机游走等变化特征, 实际仿真结果也可能出现与理论分析结论相背离的情况. 文献[8~11]在研究随机系统镇定控制方法时利用数值仿真来验证控制律的正确性, 但是均没有指出具体的数值模拟方法, 而且仅用一个数值解来验证随机系统的稳定性或者控制性能, 缺乏理论依据.

针对上述两类问题, 本文按照参数和系统随机扰动时刻划分数值积分时间子区间, 以参数或系统随机扰动后的状态作为迭代积分的初始状态, 产生合理的随机序列作用于系统时变过程, 正确模拟系统随机扰动的特征, 从而得到系统各个时刻状态值与时变曲线, 在时域上反映系统变化趋势, 为分析系统解过程的性态或随机控制系统性能提供实验依据.

### 3 随机非线性系统数值模拟分析算法(Numeric simulation analysis scheme for SDNSs)

#### 3.1 随机数值解的分段迭代积分算法(Piecewise recursive integrals algorithm to calculate SDNSs' numeric solutions)

随机非线性系统(1)~(4)的数值计算过程基本相同, 因此, 限于篇幅, 仅考虑无输入情况. 根据随机微分系统解过程数值模拟条件, 设式(1)中参数或式(4)中系统发生了 $M$ 次随机扰动, 即 $\alpha_{\hat{t}_i^-} \mapsto \alpha_{\hat{t}_i^+}$ 或 $x(\hat{t}_i^-) \mapsto x(\hat{t}_i^+), i = 1, 2, \dots, M, \hat{t}_i \in (t_0, t_f]$ . 这两类随机变化过程可选择合适的随机序列来模拟,

典型随机序列如伪随机、正态分布平稳过程、白噪声、维纳过程等产生方法见参考文献[3]. 对于系统随机扰动的情况, 理论上要求 $M \rightarrow \infty$ , 在数值仿真过程中可以近似选取某一合适的有限值.

#### 1) 含随机参数的非线性系统.

若式(1)的解过程 $x(t)$ 存在, 则采用如下时间分段的迭代积分公式来计算数值解:

$$\begin{cases} x(t) = \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t f(x(\tau), \tau; \alpha_{\hat{t}_i^-}) d\tau, t \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ \alpha_{\hat{t}_i^-} \mapsto \alpha_{\hat{t}_i^+}, \text{即参数在}\hat{t}_i\text{时刻发生随机扰动.} \end{cases} \quad (5)$$

由上式, 选择合适方法产生符合随机参数统计特征的随机序列 $\{\alpha_{\hat{t}_0}, \alpha_{\hat{t}_1}, \dots, \alpha_{\hat{t}_M}\}$ , 在时刻 $\hat{t}_i$ 改变参数值, 以 $x(\hat{t}_{i-1})$ 为初始值, 选用合适的数值积分方法求取在 $(\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ 上以 $\alpha_{\hat{t}_i^-}$ 为参数的数值解. 参考文献[2], 在 $(\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ 上可以由如下Runge-Kutta公式计算:

$$\begin{cases} x(t_{k+1}^i) = x(t_k^i) + h_k^i \sum_{m=1}^r w_m^i \zeta_m^i, \\ \zeta_1^i = f(x(t_k^i), t_k^i; \alpha_{\hat{t}_i^-}), \\ \zeta_m^i = f(x(t_k^i) + h_k^i \sum_{n=1}^{m-1} \beta_{mn}^i \zeta_n^i + h_k^i \sum_{n=1}^{m-1} \beta_m^i \zeta_n^i; \alpha_{\hat{t}_i^-}), \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $t_k^i \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], k = 1, 2, \dots, K_i$ , 对照上节随机微分系统数值模拟分析问题描述中的时间网格 $\{t_j\}$ ,  $t_k^i$ 是根据随机扰动时间区间重新标注网格时间, 有 $\{t_0, t_1, \dots, t_j, \dots, t_K\} = \{t_1^1, \dots, t_{K_1}^1, t_1^2, \dots, t_{K_2}^2, \dots, t_{K_M}^M\}, j = 0, 1, 2, \dots, K, K = \sum_{i=1}^M K_i, t_{K_i} = \hat{t}_i, h_k^i = t_{k+1}^i - t_k^i$ 表示数值积分的时间步长.  $\beta_{mn}^i, w_m^i$ 为待定系数,  $r$ 为使用 $\zeta_m^i$ 的个数(即阶数), 具体确定方法见文献[2].

#### 2) 随机非线性系统.

若式(3)的解过程 $x(t)$ 存在, 则采用如下时间分段的迭代积分公式来计算数值解:

$$\begin{cases} x(t) = \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t f(x(\tau), \tau) d\tau + \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t \zeta(x(\tau), \tau) dW(\tau), t \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ x(\hat{t}_i^-) \mapsto x(\hat{t}_i^+), \text{即参数在}\hat{t}_i\text{时刻发生随机扰动.} \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)中第1式简写为

$$x(t) = x(t)_{\text{certain}} + x(t)_{\text{ran}}.$$

注意到 $x(t)_{\text{ran}}$ 为一个随机过程, 当积分时间区间足够小( $\Delta\hat{t}_i \rightarrow 0$ ), 根据Lipschitz条件可知

$$\Delta\zeta_i = \zeta(x(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i^-) - \zeta(x(\hat{t}_{i-1}^+), \hat{t}_{i-1}^+) \rightarrow 0,$$

即扩散系数变化很小. 其次, 在 $(\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i]$ 内系统状态

仅在  $\hat{t}_i$  时刻由  $W(\hat{t}_i)$  产生一次随机扰动, 则随机扩散项可以用如下两种计算公式近似求得:

a) 后向式:

$$\begin{cases} x(t)_{\text{ran}} = 0, t \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ x(\hat{t}_i^+)_{\text{ran}} = \zeta(x(\hat{t}_i^- + \sigma \Delta \hat{t}_i), \hat{t}_{i-1} + \sigma \Delta \hat{t}_i) W(\hat{t}_i). \end{cases}$$

b) 前向式:

$$\begin{cases} x(t)_{\text{ran}} = 0, t \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ x(\hat{t}_i^+)_{\text{ran}} = \zeta(x(\hat{t}_i^- + \sigma \Delta \hat{t}_{i+1}), \hat{t}_i + \sigma \Delta \hat{t}_{i+1}) W(\hat{t}_i). \end{cases}$$

式中  $\sigma \in [0, 1]$ . 由此式(7)又可以表示为如下迭代积分计算公式:

$$\begin{cases} x(t) = \int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t f(x(\tau), \tau) d\tau, t \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ x(\hat{t}_i^+) = x(\hat{t}_i^-) + x(\hat{t}_i^+)_{\text{ran}}. \end{cases} \quad (8)$$

式中, 漂移项数值积分  $\int_{\hat{t}_{i-1}^+}^t f(x(\tau), \tau) d\tau$  可以根据  $f(\cdot, \cdot)$  特点选择 Euler, Runge-Kutta 等方法来进行计算, 同样, 有如下 Runge-Kutta 型计算格式:

$$\begin{cases} x(t_{k+1}^i) = x(t_k^i) + h_k^i \sum_{m=1}^r w_m^i \zeta_m^i, \\ \zeta_1^i = f(x(t_k^i), t_k^i), \\ \zeta_m^i = f(x(t_k^i) + h_k^i \sum_{n=1}^{m-1} \beta_{mn}^i \zeta_n^i + h_k^i \sum_{n=1}^{m-1} \beta_m^i). \end{cases} \quad (9)$$

式中符号定义与式(4)相同.

式(5)~(9)求得的随机非线性系统数值解具有如下特点:

1) 数值解由系统的结构、参数和初始状态值决定, 对于不同的参数或系统随机扰动序列, 数值解不同, 每一次模拟计算结果仅是系统随机解集的一个样本.

2) 随机参数或系统随机扰动序列作用方式不同, 即随机扰动频率、幅度和作用方式不同会对系统解过的数值模拟结果产生直接影响, 频率和幅度越大, 即  $\Delta \hat{t}_j$  逼近  $\sup_{j \geq 0} (h_j)$ ,

$$\begin{aligned} & \|f(x(\hat{t}_i), \hat{t}_i; \alpha_{\hat{t}_i^+}) - f(x(\hat{t}_i), \hat{t}_i; \alpha_{\hat{t}_i^-})\| \gg \\ & \|f(x(\hat{t}_i), \hat{t}_i; \alpha_{\hat{t}_i^-}) - f(x(\hat{t}_{i-1}), \hat{t}_{i-1}; \alpha_{\hat{t}_i^-})\|, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & \|W(\hat{t}_i) - W(\hat{t}_{i-1})\| \|\zeta(x(\hat{t}_i), \hat{t}_i)\| \gg \\ & \|f(x(\hat{t}_i), \hat{t}_i) - f(x(\hat{t}_{i-1}), \hat{t}_{i-1})\|, \end{aligned}$$

导致数值解随机振荡频率和幅度越大, 越接近于随机扰动的变化.

3) 对于给定初始状态和不同的随机扰动序列可以计算得到多组数值解, 组成该初始状态对应的一个样本解集, 由此进一步计算解过程的概率分布等.

### 3.2 误差分析(Errors evaluation)

随机微分系统数值解的误差需要用误差的数学期望和方差两个指标来分析<sup>[3]</sup>. 定义误差函数为  $e_r(t_j) = x(t_j) - x^*(t_j), j=0, 1, 2, \dots, K$ , 其中  $x^*(t_j)$  为精确解过程. 由于  $x(t_j)$  为随机过程, 因此,  $e_r(t_j)$  也为随机过程. 根据迭代公式(3)和(6),  $e_r(t_j)$  主要由式(4)和(7)数值解误差决定, 记为  $e_{rs}(t_j)$ , 同时其数学期望和方差又与随机扰动有关.

对于系统(1), 根据式(6), 并参考文献[2]式4.1, 系统数值解截断误差的计算式为

$$e_{rs}(\hat{t}_i^-) = \frac{1}{(r+1)!} x^{(r+1)}(\hat{t}_i^-) h_{K_i}^r + O(h_{K_i}^{r+1}). \quad (10)$$

当  $\alpha_{\hat{t}_i^-} \rightarrow \alpha_{\hat{t}_i^+}$  时, 有  $x^{(r+1)}(\hat{t}_i^-) \rightarrow x^{(r+1)}(\hat{t}_i^+)$ . 记

$$\Delta \hat{x}(\hat{t}_i) = x^{(r+1)}(\hat{t}_i^+) - x^{(r+1)}(\hat{t}_i^-),$$

显然,  $\Delta \hat{x}(\hat{t}_i)$  是一个随机变量. 则由式(10)得到系统参数扰动时刻  $\hat{t}_i$  的数值计算误差为

$$\begin{aligned} e_r(\hat{t}_i^+) &= \frac{1}{(r+1)!} x^{(r+1)}(\hat{t}_i^+) h_{K_i}^r + O(h_{K_i}^{r+1}) = \\ & e_{rs}(\hat{t}_i^-) + \frac{1}{(r+1)!} \Delta \hat{x}(\hat{t}_i) h_{K_i}^r. \end{aligned} \quad (11)$$

因此, 误差  $e_r(t_j)$  的数学期望、方差与  $e_{rs}(t_j)$  的关系分别为:

$$\begin{aligned} E(e_r(\tau)) &= \begin{cases} e_{rs}(\tau), \tau = t_k^i \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ e_{rs}(\hat{t}_i^-) + \frac{1}{(r+1)!} E(\Delta \hat{x}(\hat{t}_i)) h_{K_i}^r, \\ \tau = t_{K_i}^i = \hat{t}_i, \end{cases} \quad (12) \\ \sigma(e_r(\tau)) &= \begin{cases} 0, \tau = t_k^i \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ \frac{1}{(r+1)!} \sigma(\Delta \hat{x}(\hat{t}_i)) h_{K_i}^r, \tau = t_{K_i}^i = \hat{t}_i. \end{cases} \quad (13) \end{aligned}$$

式中:  $k = 1, 2, \dots, K_i; e_{rs}(t_j)$ , 即  $E(e_r(t_j))$  和  $h_{K_i}$ , 在数值求解过程中可以取很小, 如  $e_{rs}(t_j) \leq 10^{-4}$ , 且  $\Delta \hat{x}(\hat{t}_i)$  为有限值, 因此,  $E(e_r(t_j))$  和  $\sigma(e_r(t_j))$  受参数  $\alpha$  扰动的影响很小.

对于随机系统(3), 根据公式(8)和(9), 当  $x(\hat{t}_i^-) \mapsto x(\hat{t}_i^+)$  时, 有  $e_{rs}(\hat{t}_i^-) \mapsto e_{rs}(\hat{t}_i^+)$ , 且  $e_{rs}(\hat{t}_i^+) \approx e_{rs}(\hat{t}_i^-) + \zeta(e_{rs}(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i) w(\hat{t}_i)$ ,  $e_{rs}(\hat{t}_i^-)$  是式(7)计算在  $\hat{t}_i$  时刻的状态值产生的误差, 因此, 误差  $e_r(t_j)$  的数学期望、方差与  $e_{rs}(t_j)$  的关系分别为:

$$E(e_r(\tau)) = \begin{cases} e_{rs}(\tau), \tau = t_k^i \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i], \\ e_{rs}(\hat{t}_i^-) + \zeta(e_{rs}(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i) E(W(t_i)), \\ \tau = t_{K_i}^i = \hat{t}_i, \end{cases} \quad (14)$$

$$\sigma(e_r(\tau)) = \begin{cases} 0, \tau = t_k^i \in (\hat{t}_{i-1}, \hat{t}_i] \\ \zeta(e_{rs}(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i) \sigma(W(\hat{t}_i)), \\ \tau = t_{K_i}^i = \hat{t}_i. \end{cases} \quad (15)$$

式中,对于零均值随机平稳过程 $W(t)$ ,即

$$E(W(\hat{t}_i)) = 0, \sigma(W(\hat{t}_i)) = \sigma_0,$$

数值计算误差满足要求.对于非零均值随机过程 $W(t)$ ,即 $E(W(\hat{t}_i)) \neq 0$ ,则可以通过前向和后向迭代法进一步减少 $\zeta(e_{rs}(\hat{t}_i^-), \hat{t}_i)$ 的值降低整个随机误差,以保证在整个求解过程中 $E(e_r(t_j))$ 逼近 $e_{rs}(t_j)$ .

### 3.3 基于数值解集的性能分析算法(SDNSs' solution-set-based behavior analysis algorithm)

基于蒙特卡罗模拟方法,当给定 $N$ 组随机序列,即 $\{\alpha_{\hat{t}_1}^n, \dots, \alpha_{\hat{t}_M}^n\}$ 或 $\{W^n(\hat{t}_1), \dots, W^n(\hat{t}_M)\}$ ,采用上述数值积分公式求得随机系统 $N$ 组数值解,即

$$\{x^n(t_0), x^n(t_1), \dots, x^n(t_j), \dots, x^n(t_f)\},$$

其中:  $N = 1, 2, \dots, N$ . 设系统解集在 $t_j$ 时刻对应的随机变量为 $X(t_j)$ ,则 $\{x^1(t_j), x^2(t_j), \dots, x^N(t_j)\}$ 的数值集构成 $X(t_j)$ 的一个样本空间 $\Omega_j$ ,根据随机过程的相关定义建立如下数值计算公式:

$$\begin{cases} P\{X(t_j) = \sigma\} = \frac{n_{X(t_j)=\sigma}}{N}, \\ P\{X(t_j) \leq \sigma\} = \frac{n_{X(t_j)\leq\sigma}}{N}, \end{cases} \quad (16)$$

式中:  $\sigma \in [X^1(t_j), X^2(t_j), \dots, X^N(t_j)]$ ,  $n_{X(t_j)=\sigma}$ 表示 $X(t_j) = \sigma$ 的次数,  $n_{X(t_j)\leq\sigma}$ 表示 $X(t_j) \leq \sigma$ 的次数,

$$\bar{X}(t_j) = \frac{\sum_{n=1}^N x^n(t_j)}{N}, \quad (17)$$

$$E\|X(t_j)\|^2 = \frac{\sum_{n=1}^N \|x^n(t_j)\|^2}{N}, \quad (18)$$

$$E\|X(t_j)\|^p = \frac{\sum_{n=1}^N \|x^n(t_j)\|^p}{N}. \quad (19)$$

根据蒙特卡罗模拟原理可知,当 $N$ 足够大时,  $P\{X(t_j) = \sigma\}$ 和 $E\|X(t_j)\|^2$ 等将收敛于与系统初始状态对应的固定曲线.

### 4 随机非线性动态系统数值模拟分析流程(Program flow of numeric simulation analysis for SNDSSs)

根据随机非线性系统数值仿真方法,针对随机序列产生方式的不同,仿真流程可以分为两种情况来设计: 1) 随机序列具有固定的时间步长,且预设随机序列值; 2) 随机序列的时间步长是随机变化的,在各个时刻 $t_i$ 按照参数或系统随机扰动的概率分布特征产生相应的随机序列值.根据数值计算的误差要求,采用迭代方法降低仿真过程计算误差.以2)为例,其仿真流程如图1所示.

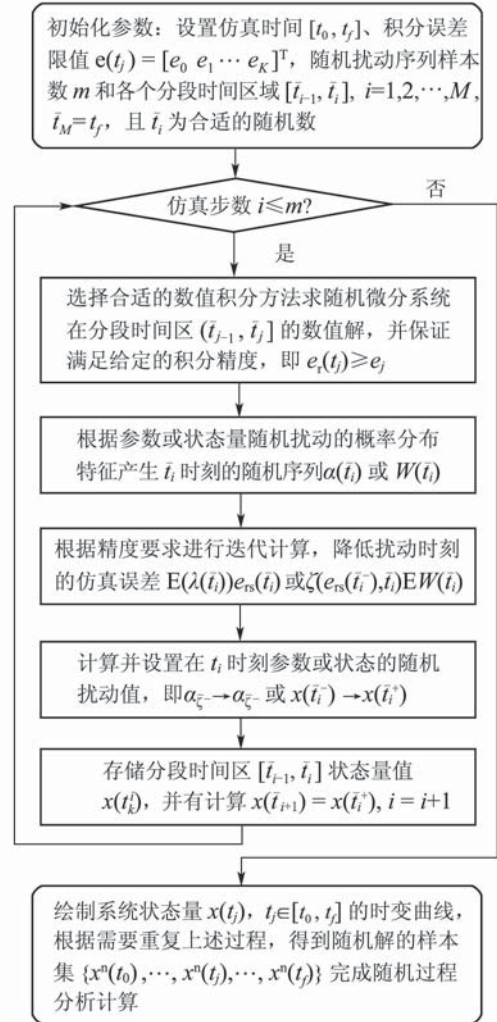


图1 随机时间步长的系统数值仿真流程

Fig. 1 Numerical simulation flow of SDNSs with random time step

对于给定初始值的随机非线性系统,可以选择多组随机序列,采用不同作用方式进行仿真,统计分析各次的数值解过程,获得各个时刻状态的概率分布、均方或矩等数值,用于分析解过程性能.

### 5 典型示例系统仿真(Simulations of the representative systems)

**例1** 考虑含有不确定性参数的常微分系统  $\dot{x}(t) = x(t)[1 + ax(t)]$ ,  $x(0) = x_0 > 0$ , 其解析解为

$$x(t) = \frac{1}{-a + e^{-t}(1 + ax_0)/x_0}.$$

若 $a > 0$ ,则动态系统在有限时间区间 $[0, \ln(\frac{1+ax_0}{ax_0})]$

上状态量逃逸至无穷大,若 $a < -\frac{1}{x_0}$ ,动态系统稳定.设初始状态 $x(0) = 1.5$ ,参数 $a$ 为高斯白噪声过程,取 $a = 1 + 0.25\dot{W}(t)$ ,在时间区间 $[0, 10]$ 上求取系统状态曲线,仿真结果出现稳定和不稳定的情况,选择系统稳定与不稳定解各一个绘制状态曲线如图2所示.

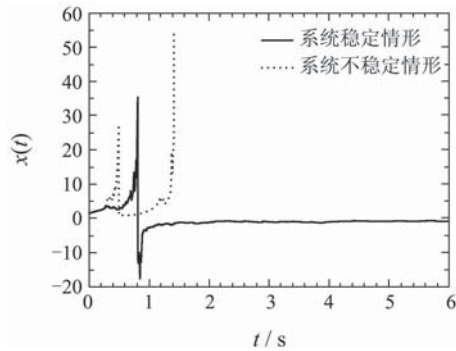


图 2 不同参数扰动序列作用下稳定与不稳定状态曲线  
Fig. 2 Stable and unstable state curves corresponding to stochastic sequences with different parameters

对参数  $a$  随机产生 100, 500, 1000, 1500, 2000 和 3000 组扰动序列, 求取每组随机扰动参数对应的系统状态曲线, 统计系统稳定概率如表 1 所示。

表 1 系统在不同扰动序列组作用下的稳定概率  
Table 1 System stability probability under different stochastic sequences

仿真次数 $N$	100	500	1000	1500	2000	3000
稳定解个数	22	122	247	356	465	696
稳定概率	0.22	0.244	0.247	0.2373	0.2325	0.232

根据式(17)(18), 求上述  $N = 500$  和  $N = 3000$  中稳定解的均值曲线和均方曲线, 如图 3 和 4 所示。

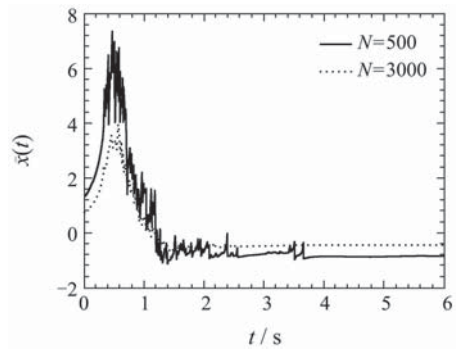


图 3 稳定解的均值曲线  
Fig. 3 Mean curves of stable solutions

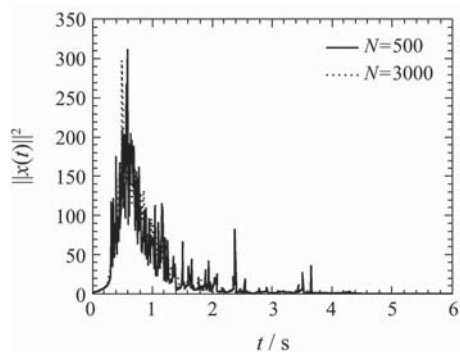


图 4 稳定解的均方曲线  
Fig. 4 Mean square curves stable solutions

仿真结果表明随机参数  $a$  取不同的扰动序列, 在有限时间区间上系统状态曲线不相同, 但其解过程的稳定概率和均方曲线等统计特征随着解过程样本数(或仿真次数)的增大而趋于一致。

例 2 考虑如下三阶随机非线性动态系统:

$$\begin{cases} dx_1(t) = (x_2(t)x_3(t))dt + 1.34x_1(t)dW(t), \\ dx_2(t) = (-1.35x_1(t)x_3(t) + 0.4x_2^2(t))dt, \\ dx_3(t) = (-0.82x_1(t)(x_2(t) + \sqrt{1 + x_3^2(t)}))dt + 2.5x_2(t)x_3(t)dW(t). \end{cases}$$

设初始状态值  $x(0) = [2.45 \quad -4.5 \quad 0.88]^T$ , 用随机序列模拟维纳过程  $W(t)$ , 求取在不同扰动序列作用下系统状态曲线, 仿真结果出现稳定和不稳定情况. 选择系统稳定与不稳定解各一个绘制状态曲线分别如图 5 和图 6 所示。

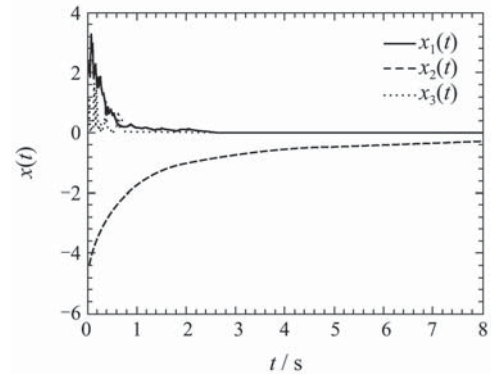


图 5 系统稳定解曲线示例

Fig. 5 An illustrative curve of system stable resolution

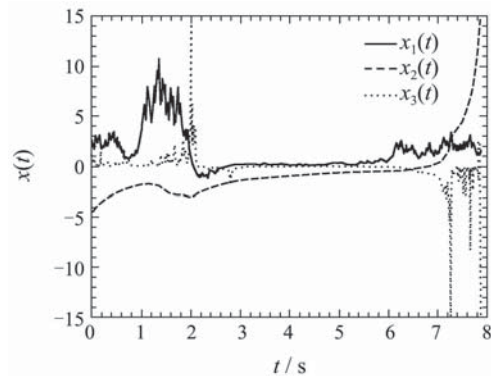


图 6 系统不稳定解曲线示例

Fig. 6 An illustrative curve of system unstable resolution

同样, 随机产生 100, 500, 1000, 1500, 2000 和 3000 组系统扰动序列, 求取每组随机扰动序列对应的系统状态曲线, 统计系统稳定概率如表 2 所示。

表 2 系统在不同扰动序列组作用下的稳定概率  
Table 2 System stability probability under different disturbance sequences

仿真次数 $N$	100	500	1000	1500	2000	3000
稳定解个数	59	330	677	1027	1361	2028
稳定概率	0.59	0.66	0.677	0.6847	0.6805	0.676

根据式(17)(18), 求取上述 $N = 500$ 和 $N = 3000$ 中稳定解的均值曲线和均方曲线, 如图7~9所示.

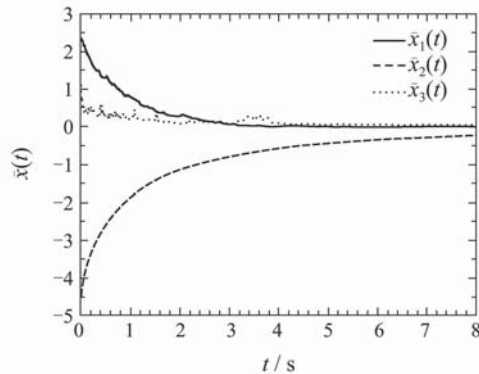


图7 样本数 $N = 500$ 时稳定解的均值曲线

Fig. 7 Mean curves of stable solutions with  $N = 500$

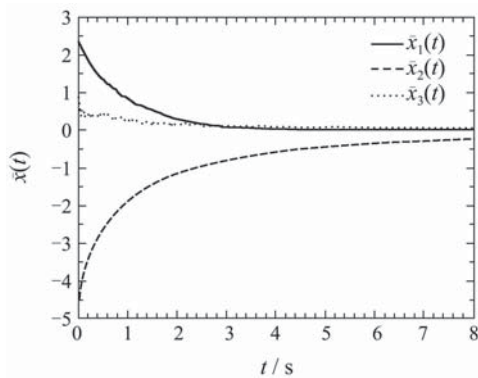


图8 样本数 $N = 3000$ 时稳定解的均值曲线

Fig. 8 Mean curves of stable solutions with  $N = 3000$

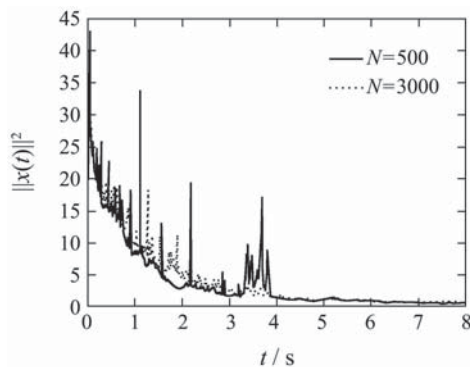


图9 不同样本路径中稳定解的均方曲线

Fig. 9 Mean-square curves of stable solutions in different sample path

上述动态系统的仿真结果表明, 当系统受到随机扰动序列作用时解过程的性态会发生改变, 在给定的时间区间上数值解随着扰动序列随机作用方式不同而不同, 但是系统的统计特征随着解过程的样本数(或仿真总次数)的增加而趋于一致. 因此, 随机动态系统的模拟分析由于解过程的非唯一性, 需要用多组随机序列进行多次仿真, 统计系统稳定概率, 求取系统解的均值曲线等, 才能完全反映系统在参数和系统随机扰动下的变化情况.

## 6 结论(Conclusions)

本文将蒙特卡罗模拟方法和数值积分方法相结合解决随机非线性系统数值模拟分析问题, 建立了该类系统在不同随机扰动序列作用下的迭代积分公式. 针对不同随机扰动序列产生的系统随机解集, 提出了系统性态分析的数值计算方法. 示例系统的仿真结果表明本文仿真算法能够满足理论分析研究的要求, 对一般性随机动态系统具有普适性.

## 参考文献(References):

- [1] MAO X R. *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. England: Horwood, 1997.
- [2] ASCHER U M, PETZOLD L R. *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009.
- [3] KLOEDEN P E, PLATEN E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*[M]. Berlin: Springer, 1992.
- [4] 刘永清, 邓飞其. 随机系统的变结构控制[M]. 广州: 华南理工大学出版社, 1998.  
(LIU Yongqing, DENG Feiqi. *Variable Structure Control of Stochastic Systems*[M]. Guangzhou: South China University of Technology Press, 1998.)
- [5] HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. *SIAM Review*, 2001, 43(3): 525 – 546.
- [6] YUANA C, GLOVERB W. Approximate solutions of stochastic differential delay equations with Markovian switching[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2006, 194(1): 207 – 226.
- [7] WU F, MAO X R. Numerical solutions of neutral stochastic functional differential equations[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 2008, 46(4): 1821 – 1841.
- [8] GRIGORIU M. Numerical solution of stochastic differential equations with Poisson and Le $\grave{v}$ y white noise[J]. *Physics Review E: Statistic Nonlinear Software Matterial Physics*, 2009, 80(2): 026704.
- [9] DENG H, KRSTIĆ M. Output-feedback stochastic nonlinear stabilization [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(2): 328 – 333.
- [10] 刘允刚, 施颂椒, 潘子刚. 随机非线性系统鲁棒自适应反馈控制器的积分反推方法设计[J]. *自动化学报*, 2001, 27(5): 613 – 620.  
(LIU Yungang, SHI Songjiao, PAN Zigang. Backstepping robust adaptive feedback control design for stochastic nonlinear systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(5): 613 – 620.)
- [11] MU X, LIU H. Stabilization for a class of stochastic nonlinear systems via output feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, 53(1): 360 – 367.

## 作者简介:

彭云建 (1974—), 男, 博士, 讲师, 目前研究方向为随机动态系统数值分析, E-mail: pengyj@scut.edu.cn;

程培 (1982—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为时滞脉冲随机系统稳定性分析与镇定, E-mail: chengpei2222915@163.com;

邓飞其 (1961—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为随机系统建模、分析与控制, E-mail: aufqdeng@scut.edu.cn.